UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Topologia di $SO(3, \mathbb{R})$ e la non pettinabilità della sfera

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea Triennale di
Federico Pintore

ANNO ACCADEMICO 2008–2009

Introduzione

Nello studio di una superficie, la ricerca di un campo di vettori tangenti alla stessa assume un ruolo piuttosto rilevante. In questo contesto si inserisce un classico problema della topologia algebrica, quello, cioè, di determinare un'applicazione, continua in senso topologico, che ad ogni punto x della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ associ un vettore unitario tangente alla sfera proprio nel punto x.
Nel 1912 Luitzen Brouwer dimostrò che la sfera S^2 è impettinabile, ossia non esiste un'applicazione con le caratteristiche richieste. Nei decenni successivi sono state date alla luce delle varianti della dimostrazione fornita da Brouwer. Fra queste, nella presente tesi, si è presa in considerazione quella che fa uso del concetto di gruppo fondamentale di spazio topologico.
Nel capitolo 1 sono state riportate alcune caratteristiche della topologia del gruppo ortogonale speciale di grado 3 $SO(3, \mathbb{R})$, di quella dello spazio proiettivo reale di dimensione 3 $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, il concetto di gruppo fondamentale di uno spazio topologico e dei risultati ad esso relativi. Nel capitolo 2, sfruttando quanto visto nel capitolo 1, viene dimostrato il teorema di Brouwer sull'impettinabilità della sfera, teorema conosciuto anche con il nome $''$ Teorema della palla pelosa $''$.

Indice

Capitolo 1

Topologia di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e di $SO(3,\mathbb{R})$

1.1 Topologia quoziente, spazi quoziente e identificazioni

Definizione 1.1.1. *Sia X uno spazio topologico, Y un insieme arbitrario e $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Definiamo una topologia su Y, che chiamiamo topologia quoziente, nel modo seguente : $V \subset Y$ è un aperto della topologia quoziente se e solo se $f^{-1}(V)$ è un aperto della topologia di X.*

È facile verificare che quella sopra definita è effettivamente una topologia. Infatti si ha:

- $f^{-1}(Y) = X$, per cui Y è un aperto della topologia quoziente.
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, quindi $\emptyset$ è un aperto della topologia quoziente.
- prendiamo una famiglia arbitraria A_j di aperti della topologia quoziente. Allora $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(A_j)$. Dato che gli A_j sono aperti della topologia quoziente, le loro controimmagini in X sono aperti. L'unione di un numero arbitrario di aperti della topologia in X è ancora un aperto. Di conseguenza pure l'unione di tutti gli A_j della famiglia è un aperto della topologia quoziente.
- siano U e V due aperti della topologia quoziente. Allora si ha :

$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. L'intersezione di due aperti di X è un aperto, quindi $(U \cap V)$ è un aperto della topologia quoziente.

Osserviamo che se Y è dotato della topologia quoziente rispetto alla funzione f, allora la funzione f è continua (la controimmagine rispetto a f di un qualsiasi aperto di Y è per costruzione un aperto di X) e prende il nome di identificazione.

Proposizione 1.1.1. *Siano X, Y due spazi topologici e $f: X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva. Se f è anche aperta oppure chiusa, allora essa è un'identificazione.*

Vediamo ora un metodo per costruire identificazioni.
Sia $\sim$ una relazione di equivalenza sullo spazio topologico X. Consideriamo l'insieme quoziente $X/\sim$ e la proiezione naturale

$$\begin{array}{rccc} \pi: & X & \to & X/\sim \\ & \mathrm{x} & \mapsto & [\mathrm{x}] \end{array}$$

Tale applicazione è suriettiva, per cui possiamo definire la topologia quoziente su $X/\sim$ e diremo che $X/\sim$ è uno spazio topologico quoziente di X relativamente a $\sim$.

Proposizione 1.1.2 (proprietà universale delle identificazioni)**.** *Sia $f: X \to Y$ un'identificazione, Z uno spazio topologico e $g: X \to Z$ un'applicazione continua tale che se $f(x) = f(y)$ allora $g(x) = g(y)$. Allora esiste un'unica applicazione continua $\widetilde{g}: Y \to Z$ tale che :*

$$g = \widetilde{g} \circ f \tag{1.1}$$

Proposizione 1.1.3. *Siano X, Y spazi topologici, $f: X \to Y$ un'applicazione continua, $\sim$ una relazione di equivalenza su X e π la corrispondente proiezione naturale. Allora esiste $g: X/\sim \to Y$ continua tale che $g \circ \pi = f$ se e solo se f è costante sulle classi di equivalenza.*

1.2 Lo spazio proiettivo

Definizione 1.2.1. *Definiamo lo spazio proiettivo reale di dimensione n, che denotiamo con il simbolo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, come l'insieme degli spazi vettoriali di dimesione 1 di $\mathbb{R}^{n+1}$, cioè gli spazi generati da ogni vettore diverso da quello nullo.*

Dopo aver dato la definizione di spazio proiettivo vogliamo definire in esso una topologia. Per farlo sfruttiamo quanto visto a proposito di topologia quoziente e spazi topologici quoziente.
Consideriamo l'insieme $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ su cui consideriamo la topologia indotta da $\mathbb{R}^{n+1}$.
A questo punto definiamo la funzione :

$$f : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \tag{1.2}$$

che ad ogni x associa il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+1}$ da esso generato.
Tale applicazione è suriettiva in quanto, preso un qualunque sottospazio di dimensione 1, esso avrà come base un vettore x non nullo, che è quindi la sua controimmagine rispetto alla funzione. Allora possiamo dotare $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ della topologia quoziente relativa a *f*.
Inoltre se noi consideriamo su X la relazione di equivalenza $\sim_{pr}$:

$$x \sim_{pr} y \Leftrightarrow x = \lambda y \quad con \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1.3}$$

la proiezione naturale π coincide esattamente con la funzione *f*. Infatti, per ogni x, la sua classe di equivalenza è costituita da tutti i vettori a esso proporzionali e quindi non è altro che lo spazio vettoriale di dimensione uno generato da x.
Lo spazio proiettivo reale di dimensione n è omeomorfo allo spazio quoziente di S^n rispetto alla relazione di equivalenza:

$$x \sim_s y \Leftrightarrow x = \pm y \tag{1.4}$$

Prima di verificare quanto detto vediamo dei risultati sulle funzioni continue che ci torneranno utili sia per dimostrare l'affermazione precedente sia nel prosieguo della tesi.

Proposizione 1.2.1. *La composizione di applicazioni continue è continua*

Dimostrazione. Siano X, Y, Z tre spazi topologici e $f : X \to Y, g : Y \to Z$ funzioni continue. Sia x un generico punto di X. Allora $g(f(x)) \in Z$ e, dato che g è continua, per ogni aperto U di Z contentente $g(f(x))$ esiste un aperto B di Y che contiene $f(x)$ e tale che $g(B) \subset U$. Simmetricamente, $f(x) \in Y$ e dato che B è un aperto che lo contiene, esiste un aperto A di X che contiene x e tale che $f(A) \subset B$. Questo significa che per ogni aperto

U di Z che contiene $g(f(x))$ esiste un aperto A di X che contiene x tale che $g(f(A)) \subset U$. Ciò significa che la funzione composta è continua in ogni suo punto e quindi continua. □

Proposizione 1.2.2. *Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Dati due sottoinsiemi A,B di X e Y rispettivamente, tali che $f(A) \subset B$ allora la restrizione $f_{|AB}$ di f ad A e B è continua.*

Dimostrazione. Sia V un aperto di B. Dato che è un aperto della topologia indotta, esso è della forma $V = U \cap B$, dove U è un aperto di Y. Allora :

$$f^{-1}_{|AB}(U \cap B) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) \cap A = f^{-1}(U) \cap A = Z \cap A$$

dove Z è un aperto di X dato che f è continua.
Ricordando la forma degli aperti di A è evidente che $Z \cap A$ è un aperto di A. □

Proposizione 1.2.3. *Una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ è continua in senso topologico se e solo se è continua in senso analitico.*

Dalla proposizione precedente segue che la proiezione $x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, che ad ogni vettore associa la sua j-esima componente, è continua.

Proposizione 1.2.4. *Sia X uno spazio topologico. Un'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^n$ è continua in x se e solo se sono continue in x le sue componenti, cioè le applicazioni $f_j : X \to \mathbb{R}$ con $f_j = x_j \circ f$ (x_j proiezione j-esima).*

Dimostrazione. Se f è continua in x, dato che le x_j sono continue allora anche le componenti f_j sono continue essendo composizione di funzioni continue.
Supponiamo ora che tutte le componenti f_j siano continue in x. La topologia prodotto $\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ coincide con la topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$. Allora dato un aperto A di $\mathbb{R}^n$ contente $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$, esso sarà della forma $A = U_1 \times ... \times U_n$ con U_i aperto di $\mathbb{R}$ contenente $f_i(x)$. Per la continuità delle componenti di f si ha che esistono n sottoinsiemi aperti V_i di X, ognuno dei quali contiene x, la cui immagine tramite f è contenuta in U_i. Allora $V = V_1 \cap ... \cap V_n$ è un aperto di X tale che :

$$f(V) = f_1(V) \times ... \times f_n(V) \subset U_1 \times ... \times U_n$$

Quanto visto implica che f sia continua in ogni punto x e quindi continua. □

Proposizione 1.2.5. *Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni continue.Allora:*

- *a) αf , con α numero reale, è continua*
- *b) $f + g$ è continua*
- *c) fg è continua*

Dimostrazione. a) Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \alpha x \end{array}$$

che è continua in senso analitico e quindi anche in senso topologico. Allora $\alpha f = \alpha \circ f$, quindi, essendo composizione di funzioni continue, αf è continua.
b)L'applicazione s così definita :

$$\begin{array}{rccc} s : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

è continua in senso analitico quindi anche topologico. Prendiamo poi un'altra funzione :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \text{x} & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

anche essa è contiua dato che le sue componenti sono continue. Allora basta osservare che $s \circ \phi = f + g$ che è continua in quanto composizione di funzioni continue.
c) La dimostrazione in questo caso è identica a quella del punto b), basta sostituire la somma con il prodotto. □

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per dimostrare che lo spazio proiettivo è omeomorfo allo spazio topologico quoziente $S^n / \sim_s$.

Denotiamo con π la proiezione naturale della relazione $\sim_{pr}$, mentre con π' la proiezione naturale di $\sim_s$. Ricordando che con X avevamo denotato $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, consideriamo l'applicazione continua :

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathrm{X} & \rightarrow & S^n \\ & \mathrm{x} & \mapsto & x/\|x\| \end{array}$$

Dato che π' è continua e la composizione di applicazioni continue è continua, allora $t := \pi' \circ r$ è continua. È facile vedere che t è anche suriettiva (per ogni classe di equivalenza di $S^n/\sim_s$ come sua controimmagine prendiamo il rappresentante della classe stessa). Inoltre $x \sim_{pr} y \Leftrightarrow t(x) = t(y)$.
Allora per il teorema di fattorizzazione [1] esiste un'unica applicazione iniettiva $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow S^n/\sim_s$ tale che $t = g \circ \pi$, da cui, per la suriettività di t, si deduce che g è suriettiva. Per la Proposizione 1.1.3 la funzione g è anche continua. Dato che l'applicazione h che ad ogni elemento $[x]$ del spazio proiettivo associa la classe di equivalenza $[x/\|x\|]$ di $S^n/\sim_s$ è una bigezione tale che $t = h \circ \pi$, allora, per l'unicità della g, si ha $h = g$.
L'inversa di g è quell'applicazione che alla classe $[x]$ di $S^n/\sim_s$ associa la classe $[x]$ del spazio proiettivo. Vorremmo far vedere che anche l'inversa di g è continua. Per farlo osserviamo che, indicata con i l'immersione di S^n in X, $\pi \circ i = g^{-1} \circ \pi'$ (è facile verificare che le due funzioni a destra e a sinistra dell'uguaglianza hanno la stessa immagine su ogni elemento di S^n).
L'immersione è continua, la proiezione naturale pure quindi $\pi \circ i$ è continua. È anche suriettiva in quanto presa una qualunque classe del proiettivo, la sua controimmagine è il rappresentante con norma unitaria. Inoltre $(\pi \circ i)(x) = (\pi \circ i)(y)$ se e solo se x e y stanno nella stessa classe di equivalenza di $S^n/\sim$. Per il Teorema di fattorizzazione g^{-1} è l'unica applicazione tale che $(\pi \circ i) = g^{-1} \circ \pi$ ed inoltre, per la Proposizione 1.1.3, deduciamo che g^{-1} è continua e quindi l'applicazione g da $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a $S^n/\sim_s$ è un omeomorfismo.

1.3 Lo spazio proiettivo è di Hausdorff

Definizione 1.3.1. *Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Tale relazione si dice aperta se la corrispondente proiezione naturale è aperta.*

[1] Sia $f: A \rightarrow B$ un'applicazione compatibile con una relazione di equivalenza $\sim$ su A (cioè f è tale che se due elementi di A sono equivalenti allora hanno la stessa immagine rispetto a f). Allora esiste un'unica applicazione $g : A/\sim \rightarrow B$ tale che $g \circ \pi = f$. Inoltre se $\sim$ è tale che x $\sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ allora la funzione g è iniettiva

Proposizione 1.3.1. *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza aperta sullo spazio topologico X. Allora*

$$R = \{(x, y) \in X \times X | x \sim y\} \subset X \times X \tag{1.5}$$

è un sottoinsieme chiuso di $X \times X$ con la topologia prodotto se e solo se lo spazio quoziente $X/\sim$ è di Hausdorff

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'implicazione in cui per ipotesi R è chiuso.
Siano u e v due punti di $X/\sim$ diversi fra loro. Ciò significa che in u e in v non ci sono punti di X che sono equivalenti. Dato che ogni classe di equivalenza è non vuota, esisterà una coppia (x, y) di elementi di X non equivalenti, e quindi $(x, y) \in X \times X \setminus R$, tale che $\pi(x) = u$ e $\pi(y) = v$. R è un chiuso della topologia prodotto $X \times X$, per cui il suo complementare è un aperto.
Esso sarà della forma $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$, dove $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ sono due aperti di X. Ora ci ricordiamo che π per ipotesi è aperta, quindi le immagini dei due aperti sono ancora due aperti U e V : $\pi(\widetilde{U}) = U$; $\pi(\widetilde{V}) = V$. Essi sono due aperti che contengono u e v, rispettivamente, e sono disgiunti. Possiamo allora concludere che $X/\sim$ è di Hausdorff. □

Grazie al precedente teorema si può dedurre che lo spazio proiettivo è di Hausdorff. Continuando a denotare $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con X, consideriamo l'insieme :

$$R = \{(x, y) \in X \times X | x \sim_{pr} y\} \subset X \times X \tag{1.6}$$

Introduciamo inoltre l'applicazione continua

$$\begin{array}{rccc} f: & X \times X & \to & \mathbb{R} \\ & \text{(x,y)} & \mapsto & \sum_{i,j=1}^{n+1}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \end{array}$$

Se $f(x, y) = 0$ significa che tutti i quadrati sono nulli (la somma di quadrati è nulla se e solo se tutti i quadrati sono nulli). Si deduce allora che le coppie di vettori la cui immagine è zero sono tutte e sole quelle di vettori equivalenti, di conseguenza $f^{-1}(\{0\}) = R$. Dato che $\mathbb{R}$ è metrizzabile e quindi di Hausdorff, ogni suo elemento è chiuso e quindi la controimmaigine di 0 è un chiuso per la continuità della f. Segue che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di Hausdorff per la proposizione precedente.

1.4 Gruppo ortogonale speciale

L'insieme di tutte le matrici ortogonali di ordine 3 prende il nome di gruppo ortogonale di grado 3 e lo si denota con il simbolo $O(3,\mathbb{R})$.
Una matrice ortogonale ha sempre determinante in modulo uguale ad 1. Infatti, data una matrice ortogonale A, abbiamo :

$$(det(A))^2 = det(A)det(A) = det(A^t)det(A) = det(AA^t) = det(Id) = 1 \Rightarrow det(A) = \pm 1$$

Inoltre le matrici di O(3,$\mathbb{R}$) hanno un autovalore reale λ e anch'esso in modulo è uguale ad 1. Partiamo osservando che il polinomio caratteristico di una matrice $A \in O(3,\mathbb{R})$ ha grado 3, dato che coincide con l'ordine della matrice. Per il teorema fondamentale dell'algebra, tale polinomio ammette almeno una radice reale λ. Preso un autovettore v relativo a λ si ha $Av = \lambda v$. Allora osserviamo che:

$$< Av, Av >=< A^t Av, v >=< v, v >\Rightarrow \|Av\| = \|v\| = |\lambda|\|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad (1.7)$$

Ora ci ricordiamo che il determinante di una matrice è uguale al prodotto dei suoi autovalori. Dato che gli altri due autovalori della matrice, sempre per quanto ci dice il teorema fondamentale dell'algebra, sono complessi e coniugati, allora il loro prodotto sarà uguale alla somma di quadrati, quindi positivo. Ma allora il determinante di una matrice ortogonale deve avere lo stesso segno del suo autovalore λ. Quindi $\lambda = 1$ per le matrici ortogonali con determinante uguale a 1, $\lambda = -1$ per le matrici ortogonali con determinante uguale a -1.
Se l'autovalore di A è 1 allora la matrice manda in se stessi tutti i punti della retta passante per l'autovettore v. Quindi nel caso $\lambda = 1$ la matrice A rappresenta una rotazione attorno alla retta passante per l'autovettore. Quando $\lambda = -1$, invece, la matrice A rappresenta una simmetria.
Per quanto appena visto, $O(3,\mathbb{R})$ coincide con l'insieme di tutte le isometrie dello spazio $\mathbb{R}^3$, le quali sono rotazioni di un dato angolo attorno ad una data retta oppure simmetrie rispetto ad un dato.
Noi siamo interessati al sottoinsieme di $O(3,\mathbb{R})$ costituito da tutte le matrici con determinante uguale ad 1. Tale sottoinsieme lo denotiamo con il simbolo $SO(3,\mathbb{R})$ e lo chiamiamo

gruppo ortogonale speciale. Esso, come abbiamo sopra appurato, è l'insieme di tutte le rotazioni dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Una matrice quadrata di ordine 3 la possiamo vedere come un vettore w di $\mathbb{R}^9$: le prime 3 componenti sono gli elementi della prima riga, le componenti dalla quarta alla sesta sono gli elementi della seconda riga, le ultime tre componenti sono gli elementi dell'ultima riga. Quindi $SO(3, \mathbb{R})$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^9$, di conseguenza lo possiamo dotare della topologia indotta da quella euclidea.

1.5 Spazio proiettivo omeomorfo al gruppo ortogonale speciale

Mostriamo ora che $SO(3, \mathbb{R})$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (cioè esiste una bigezione fra i due spazi che è continua e con inversa continua).
Anche in questo caso per dimostrare quanto vogliamo ci servono dei risultati preliminari.

Definizione 1.5.1. *Con il simbolo S^n denotiamo la sfera di $\mathbb{R}^{n+1}$ di centro l'origine e raggio 1.*

Proposizione 1.5.1. *S^n è compatta*

Dimostrazione. Affinchè la sfera sia compatta, essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ è necessario e sufficiente che sia chiusa e limitata. Il fatto che sia limitata è evidente (il disco aperto di raggio 2 e centro l'origine la contiene). Per quanto riguarda la caratteristica di essere chiusa consideriamo l'applicazione :

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \qquad ; \qquad x \mapsto x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 - 1$$

Essa è continua analiticamente e quindi topologicamente per la Proposizione 1.2.3. Inoltre la controimmagine di 0 è la sfera S^n. Ma dato che $\mathbb{R}$ è metrizzabile, per cui di Hausdorff, ogni suo punto è chiuso. Quindi S^n è la controimmagine di un chiuso tramite un'applicazione continua. Ciò comporta che esso stesso sia un chiuso. □

Lemma 1.5.1 (dell'applicazione chiusa)**.** *Sia X uno spazio topologico compatto e Y uno spazio topologico di Hausdorff. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua allora:*

- *a) f è un'applicazione chiusa*
- *b) se f è una bigezione allora è un omeomorfismo*
- *c)se f è iniettiva allora è un embedding topologico*

Ora abbiamo tutto ciò che ci serve per verificare la veridicità dell'affermazione con cui abbiamo iniziato il paragrafo.
Consideriamo l'applicazione :

$$\begin{array}{rccc} f: & S^2 \times \mathbb{R} & \rightarrow & SO(3,\mathbb{R}) \\ & (x,\alpha) & \mapsto & f(x,\alpha) \end{array}$$

la quale, ad ogni vettore unitario di $\mathbb{R}^3$ e ad ogni angolo α, associa la matrice che rappresenta la rotazione attorno alla retta passante per x (che funge da vettore direttore della retta), di angolo α in senso antiorario rispetto al verso di x.
Da come è definita, segue che la f è un'applicazione suriettiva (data una rotazione attorno ad una retta e di un certo angolo α, essa è immagine tramite f del vettore direttore della retta e di α).

Inoltre f è anche continua. Per vederlo basta considerare che l'immagine di un vettore di S^2 e di un angolo α è la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x^2 + (1-x^2)\cos\alpha & (1-\cos\alpha)xy - z\sin\alpha & (1-\cos\alpha)xz + y\sin\alpha \\ (1-\cos\alpha)xy + z\sin\alpha & y^2 + (1-y^2)\cos\alpha & (1-\cos\alpha)yz - x\sin\alpha \\ (1-\cos\alpha)zx - y\sin\alpha & (1-\cos\alpha)xy + x\sin\alpha & z^2 + (1-z^2)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Allora la funzione f la possiamo vedere come la restrizione di una funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^9$ (se la somma dei quadrati delle prime tre componenti del vettore non è uguale ad 1 dobbiamo dividere x, y, z per quella quantità, ma ciò non cambia la sostanza delle cose). Le sue componenti sono le entrate della matrice A. Osserviamo che $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ le possiamo vedere come funzioni continue da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}$ che ad ogni vettore associano il coseno e il seno, rispettivamente, della loro quarta componente. Allora le componenti di f non sono altro che somme e prodotti di funzioni continue (le proiezioni e le funzioni $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$), quindi la f è continua come pure la sua restrizione per quanto visto nelle Proposizioni 1.2.2,1.2.4 e 1.2.5.

Osserviamo che :

$$f(x, \alpha) = f(x, 2\pi + \alpha) = f(-x, 2\pi - \alpha) \tag{1.8}$$

dato che una rotazione di angolo α in senso antiorario è equivalente ad una rotazione di angolo $2\pi - \alpha$ in senso orario. Questo è importante in quanto permette che la restrizione della funzione f al dominio $S^2 \times [0, \pi]$ sia suriettiva. Infatti se vogliamo fare una rotazione attorno ad un retta passante per il vettore x di un angolo α compreso fra π e 2π basta prendere l'immagine tramite f del vettore $-x$ e dell'angolo $2\pi - \alpha$.
S^2 è compatto, ma pure [0,π] lo è, essendo chiuso e limitato. Il prodotto di spazi topologici compatti è ancora un compatto.
$SO(3, \mathbb{R})$ è invece di Hausdorff essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^9$ che è metrizzabile e quindi di Hausdorff.

Riassumendo, f è un'applicazione continua che va da un compatto a uno spazio di Hausdorff. Per il lemma dell'applicazione chiusa allora f è chiusa.
Quindi f è continua, suriettiva e chiusa per cui è un'identificazione per la Proposizione 1.1.1.

Introduciamo a questo punto l'applicazione g così definita :

$$\begin{array}{cccc} g: & S^2 \times [0,\pi] & \rightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ & ((x_1, x_2, x_3), \alpha) & \mapsto & [(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \pi - \alpha)] \end{array}$$

L'applicazione è continua in quanto la possiamo vedere come composizione di due funzioni continue: quella da $S^2 \times [0,\pi]$ a $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ che alla coppia $((x_1, x_2, x_3), \alpha)$ associa il vettore$(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \pi - \alpha)$ e la proiezione naturale π. Inoltre g è suriettiva.
Noi abbiamo che $f(x, \alpha) = f(y, \beta)$ nei casi in cui x = y e $\alpha = \beta$, $x = -y$ e $\alpha = \beta = 0$ oppure $x = -y$ e $\alpha = \beta = \pi$.
Se consideriamo il primo caso è ovvio che $g(x, \alpha)$=$g(y, \beta)$, se consideriamo il secondo $[(0,0,0,\pi)]$=$[(0,0,0,\pi)]$ e se consideriamo il terzo caso $[(-\pi x_1, -\pi x_2, -\pi x_3, 0)]$=$[(\pi x_1, \pi x_2, \pi x_3, 0)]$.
Ciò significa che se $f(x, \alpha)$=$f(y, \beta)$ allora $g(x, \alpha)$=$g(y, \beta)$.

Applicando la proprietà universale delle identificazioni si ricava che esiste un'unica applicazione continua $\widetilde{g} : SO(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tale che $g = \widetilde{g} \circ f$.

Ora, dato che $S^2 \times [0,\pi]$ è compatto, $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è di Hausdorff e g è continua, allora per il Lemma dell'applicazione chiusa g è chiusa, di conseguenza, per la Proposizione 1.1.1, g è un'identificazione.
Inoltre se $g(x,\alpha)= g(y,\beta)$ allora $f(x,\alpha)=f(y,\beta)$ e quindi, per la proprietà universale delle identificazioni, esiste un'unica applicazione continua $\widetilde{f} : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to SO(3,\mathbb{R})$ tale che $f = \widetilde{f} \circ g$.

Da ciò si deduce:

- a) $g = \widetilde{g} \circ f = \widetilde{g} \circ \widetilde{f} \circ g$ e dato che g è suriettiva, quindi cancellabile a destra, si ha $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \mathrm{Id}(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}))$.
- b) $f = \widetilde{f} \circ g = \widetilde{f} \circ \widetilde{g} \circ f$ e dato che f è suriettiva, quindi cancellabile a destra, si ha $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \mathrm{Id}(SO(3,\mathbb{R}))$.

In conclusione $\widetilde{g}$ e $\widetilde{f}$ sono una l'inversa dell'altra, per cui, essendo continue, sono entrambi omeomorfismi. Ciò significa che $SO(3,\mathbb{R})$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

1.6 Gruppo fondamentale

Definizione 1.6.1. *Siano X e Y spazi topologici e $f_0, f_1 : X \to Y$ due applicazioni continue. Diremo che f_0 e f_1 sono omotope, e lo indicheremo scrivendo $f_0 \sim f_1$, se esiste un'applicazione continua :*

$$F : X \times [0,1] \to Y \tag{1.9}$$

tale che :

- *a) $F(x,0) = f_0(x)\ \forall x \in X$*
- *b) $F(x,1) = f_1(x)\ \forall x \in X$*

Un' applicazione F di questo tipo viene detta omotopia fra f_0 e f_1.

Osservazione : L'intervallo chiuso [0,1] dotato della topologia euclidea lo denotiamo con I.

Definizione 1.6.2. *Due spazi topologici X e Y si dicono omotopi, e si scrive $X \sim Y$, se esistono due applicazioni continue $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tali che :*

$$g \circ f \sim Id_X \quad ; \quad f \circ g \sim Id_Y \tag{1.10}$$

Osserviamo che ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$ è omotopa a se stessa.
Basta considerare :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{X} \times \mathrm{I} & \to & \mathrm{Y} \\ & (x,t) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Essa è continua ed inoltre $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = f(x) \quad \forall x \in X$.
Da questo si può dedurre che due spazi topologici omeomorfi sono anche omotopi.

Definzione 1.6.3. *Sia X uno spazio topologico e x,y due suoi punti. Un arco in X da x a y è un applicazione continua $f\colon [0,1] \to X$ tale che f(0) $= x$ e f(1) $= y$. Si dice che X è connesso per archi se per ogni x,y $\in X$ esiste un arco in X tra x e y.*

Definizione 1.6.4. *Uno spazio topologico X si dice contraibile se è omotopo ad un punto.*

Si può dimostrare che uno spazio contraibile è anche connesso per archi.

Definizione 1.6.5. *Sia X uno spazio topologico e a,b una coppia di punti di X. Chiamiamo spazio dei cammini l'insieme, che denotiamo con il simbolo $\Omega(X,a,b)$, così definito :*

$$\Omega(X,a,b) := \{\alpha : I \to X | \ \alpha \ \ continua, \alpha(0) = a, \alpha(1) = b\} \tag{1.11}$$

Definizione 1.6.6. *Due cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$ si dicono omotopicamente equivalenti se esiste un'applicazione continua*

$$F : I \times I \to X \tag{1.12}$$

tale che :

- *a) F(t,0)=* $\alpha(t) \qquad F(t,1) = \beta(t) \quad \forall t \in I$

- *a) F(0,s)=a* *F(1,s)= b* $\forall s \in X$

Una tale applicazione viene detta omotopia di cammini. Scriveremo $\alpha \sim \beta$ *per indicare che* α *e* β *sono cammini omotopicamente equivalenti.*

Proposizione 1.6.1. *Sia X uno spazio topologico e a un suo punto. L'omotopia di cammini é una relazione di equivalenza in* $\Omega(X, a, a)$.

Definizione 1.6.7. *Definiamo la giunzione * dei cammini* $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ *e* $\beta \in \Omega(X, b, c)$ *come il cammino* $\alpha * \beta \in \Omega(X, a, c)$ *così costruito :*

$$(\alpha * \beta) = \begin{cases} \alpha(2t) & \textit{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definizione 1.6.8. *Definiamo l'inversione i(*α*) del cammino* $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ *come il cammino di* $\Omega(X, b, a)$ *così costruito:*

$$(i(\alpha))(t) = \alpha(1-t) \tag{1.13}$$

.

Denotiamo con π_1(X,a) il quoziente di $\Omega(X, a, a)$ rispetto alla relazione di equivalenza omotopia di cammini.

Teorema 1.6.1. *L'insieme* π_1*(X,a) possiede una struttura di gruppo con elemento neutro* $[1_a]$ *(applicazione costante cha ad ogni* $x \in X$ *associa a), con* $[i(\alpha)]$ *inverso di* $[\alpha]$ *e con l'operazione di prodotto definita come :*

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta] \tag{1.14}$$

Definizione 1.6.9. *Il gruppo* π_1*(X,a) viene detto gruppo fondamentale o anche primo gruppo di omotopia, o anche gruppo di Poincarè, di X con punto base a.*

Possiamo vedere il gruppo fondamentale π_1 come un'applicazione dall'insieme degli spazi topologici puntati, cioè gli spazi topologici insieme ad un loro punto, all'insieme dei gruppi tale che alla coppia (X,a) associa π_1(X,a)

1.7 Proprietà del gruppo fondamentale

Elenchiamo ora dei risultati importanti a proposito del gruppo fondamentale (per le dimostrazioni si rimanda ai capitoli 11,13 di [1] e ai capitoli 15,16 di [3]):

- a) se X è uno spazio topologico connesso per archi allora i gruppi $\pi_1(X,a)$, al variare di a in X, sono tutti fra loro isomorfi.
  È importante osservare che i gruppi fondamentali che incontreremo nella nostra trattazione sono tutti di spazi topologici connessi per archi, per cui i risultanti di seguito riportati e quanto ottenuto nel capitolo seguente, sono tutti sotto l'ipotesi che gli spazi topologici considerati siano connessi per archi.

- b) se X è uno spazio topologico contraibile allora π_1(X,a)= $\{1\}$ ossia il suo gruppo fondamentale coincide con quello banale.

- c) il gruppo fondamentale di S^1 è $\mathbb{Z}$

- d) il gruppo fondamentale di S^2 è $\{1\}$ ossia il gruppo banale

- e) il gruppo fondamentale di X $\times$ Y è uguale al prodotto dei gruppi fondamentali di X e Y

- e) se X e Y sono due spazi topologici omotopi allora $\pi_1(X)$ è isomorfo a $\pi_1(Y)$

Da quanto detto possiamo dedurre che il gruppo fondamentale di $S^2 \times S^1$ è $\mathbb{Z} \times \{1\}$. Esso è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Infatti possiamo considerare l'applicazione :

$$\begin{array}{rccc} t: & \mathbb{Z} \times \{1\} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & (z,1) & \mapsto & z \end{array}$$

Se $t((z,1)) = t((q,1))$ allora $z = q$ e quindi, ricordando quando due coppie ordinate sono uguali, si ha $(z,1) = (q,1)$. La funzione t è quindi iniettiva. Inoltre ogni $z \in \mathbb{Z}$ è l'immagine tramite t di $(z,1)$ per cui la funzione è pure suriettiva e quindi una bigezione. Infine, ricordando come si definiva il prodotto in un gruppo ottenuto come prodotto di due gruppi, si ha:

$$(z,1)(q,1) = (zq,1) \qquad ; \qquad t(z,1)t(q,1) = zq = t((z,1)(q,1)) = t((zq,1))$$

Possiamo allora concludere che t è un isomorfismo di gruppi.

Concludiamo questo paragrafo con un teorema essenziale per la dimostrazione della non pettinabilità di S^2.

Teorema 1.7.1. *Il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, per $n \geq 2$, è isomorfo al gruppo ciclico con due elementi, cioè :*

$$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$$

Essendo $SO(3, \mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ omeomorfi, allora da quest'ultimo teorema a dal punto e) segue che $\pi_1(SO(3, \mathbb{R})) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^3(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$ e quindi, per la transitività della relazione di isomorfismo fra gruppi, si ha :

$$\pi_1(SO(3, \mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$$

Capitolo 2

La non pettinabilità di S^2

Definizione 2.1. *Una sfera S^n é pettinabile se esiste un' applicazione*

$$f : S^n \to S^n \tag{2.1}$$

tale che :

- *a) è continua*
- *b)* $\forall x \in S^n \quad f(x) \cdot x = 0$

Se n è pari allora S^n non è pettinabile. Noi analizzeremo solo il caso in cui $n = 2$.

Teorema 2.1. *La sfera S^2 non è pettinabile.*

Dimostrazione. La sfera S^2 ha la proprietà che il piano tangente alla sfera in suo generico punto è ortogonale al raggio vettore nel punto stesso (cioè il vettore applicato nell'origine avente come secondo estremo il punto della sfera considerato).
Quindi dire che esiste un'applicazione continua f tale che $f(x) \cdot x = 0 \; \forall x \in S^n$ è equivalente a dire che esiste un'applicazione continua che ad ogni punto della sfera associa un vettore unitario tangente alla sfera nel punto stesso. Ipotizziamo per assurdo che esista una tale applicazione.
Consideriamo la funzione :

$$\begin{array}{rccl} g: & S^2 & \to & S^2 \\ & x & \mapsto & g(x) = x \wedge f(x) \end{array}$$

Innanzitutto verfichiamo che il codominio della funzione sia effettivamente S^2 e, cioè, che $g(x)$ abbia norma uguale ad 1. Ricordando la norma di un vettore ottenuto con un prodotto vettoriale si ha:

$$\|g(x)\| = \|x\|\|f(x)\|| \sin 90| = 1 \tag{2.2}$$

in quanto l'angolo compreso fra x e $f(x)$ è pari a 90^o essendo i due vettori ortogonali. L'applicazione g è continua. Infatti, denotando con f_1, f_2, f_3 le componenti di f, che per la Proposizione 1.2.4 sono continue in quanto f è continua, le componenti di g sono:

$$\begin{cases} g_1 = x_2 f_3 - x_3 f_2 \\ g_2 = x_3 f_1 - x_1 f_3 \\ g_3 = x_1 f_2 - x_2 f_1 \end{cases}$$

Le componenti di g sono somma e prodotto di applicazioni continue, allora, per la Proposizione 1.2.5, sono continue e di conseguenza pure g lo è.

I vettori ortogonali ad x si trovano nel piano tangente a S^2 nel punto x. In tale piano giacciono sia $f(x)$ che $g(x)$, in quanto quest'ultimo è sia ortogonale ad x che ad $f(x)$. Per questo motivo $f(x)$ e $g(x)$ sono indipendenti e di conseguenza una base del piano tangente. Allora i vettori ortogonali a x sono tutti e soli quelli della forma :

$$af(x) + bg(x) \tag{2.3}$$

Ora noi vogliamo solo i vettori di norma 1, quindi imponendolo si ottiene :

$$< af(x) + bg(x), af(x) + bg(x) >= a^2\|f(x)\|^2 + b^2\|g(x)\|^2 = a^2 + b^2 = 1 \tag{2.4}$$

Questo implica che $a = \cos\alpha$ e $b = \sin\alpha$ per un qualche reale α.
Cioè i vettori di norma unitaria e ortogonali a x sono tutti e soli quelli della forma :

$$\cos\alpha f(x) + \sin\alpha g(x) \tag{2.5}$$

Definiamo ora un'altra funzione $F : S^2 \times S^1 \to SO(3, \mathbb{R})$ tale che

$$F(x, e^{i\alpha}) = (x, \cos\alpha f(x) + \sin\alpha g(x), - \sin\alpha f(x) + \cos\alpha g(x))$$

dove $e^{i\alpha}$ é il vettore di $\mathbb{R}^2$ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Prima di procedere dobbiamo verificare che le immagini della funzione siano delle matrici ortogonali con determinante uguale a 1.

Affinchè una matrice quadrata di ordine n sia ortogonale è necessario e sufficiente che le sue colonne costituiscano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Nel nostro caso questo avviene:

- $\|x\| = 1$
- $\|f(x)\cos\alpha + g(x)\sin\alpha)\| = \cos\alpha^2\|f(x)\|^2 + \sin\alpha^2\|g(x)\|^2 = 1$
- $\| - f(x)\sin\alpha + g(x)\cos\alpha\| = 1$
- $<x, f(x)\cos\alpha + g(x)\sin\alpha >= 0$
- $<x, -f(x)\sin\alpha + g(x)\cos\alpha >= 0$
- $<-f(x)\sin\alpha + g(x)\cos\alpha, f(x)\cos\alpha + g(x)\sin\alpha) >= 0$

Vediamo ora il determinante. Una base ortonormale $\{x, y, z\}$ di $\mathbb{R}^3$ puó essere tale che $z = x \wedge y$ oppure tale che $z = -x \wedge y$, dato che z deve essere ortogonale sia ad x che ad y. Se x, y sono indipendenti allora $det(x, y, x \wedge y)$ è maggiore di 0[1]

Allora a noi basta dimostrare che l'ultima colonna della matrice immagine è il prodotto vettoriale delle prime due. Se abbiamo questo, dato che il determinante di una matrice ortogonale è uguale a 1 o a -1, il determinante della nostra matrice non può che essere 1. Facendo i calcoli si ha:

$$x \wedge [f(x)\cos\alpha + g(x)\sin\alpha] = \cos\alpha[x \wedge f(x)] + \sin\alpha[x \wedge g(x)] = g(x)\cos\alpha - f(x)\sin\alpha \quad (2.6)$$

e quindi otteniamo proprio quello che stavamo cercando. Inoltre la funzione F è continua e bigettiva.

[1] Se x,y sono vettori indipendenti allora:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$$

Ma dato che le righe sono indipendenti il determinante non può essere nullo. Se passiamo alla trasposta, in cui le colonne sono x,y e $x \wedge y$, il risultato è lo stesso.

Per quanto riguarda la continuità, dobbiamo vedere F come un'applicazione da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^9$.Le prime tre componenti sono:

$$\begin{cases} F_1 = x_1 \\ F_2 = x_4 f_1 + x_5 g_1 \\ F_3 = -x_5 f_2 + x_4 g_2 \end{cases}$$

Esse sono continue poichè non sono altro che somme e prodotti di funzioni continue (le proiezioni e le componenti continue della f e della g). Per le altre componenti il discorso è identico. Quindi la F è continua come pure la sua restrizione per quanto visto nelle Proposizioni 1.2.2,1.2.4 e1.2.5.

Per quanto riguarda l'iniettività se $F(x, e^{i\alpha})= F(y, e^{i\beta})$ sicuramente $x = y$ ed inoltre si ha:

$$[\cos\alpha - \cos\beta] + [\sin\alpha - \sin\beta] = 0; \tag{2.7}$$

$$[-\cos\alpha + \cos\beta] + [\sin\alpha - \sin\beta] = 0 \tag{2.8}$$

Sommando le due equazioni si ottiene $\sin\alpha = \sin\beta$, facendo la differenza $\cos\alpha = \cos\beta$. Per cui non può che essere $\alpha = \beta$.

Infine dimostriamo la suriettività. Sia $A \in SO(3, \mathbb{R})$, allora le sue colonne A_1,A_2,A_3 costituiscono una base ortonormale. Noi vogliamo trovare una coppia $(x, y) \in S^2 \times S^1$ tale che $F(x, y)$ =A. Per come è definita la F poniamo $x = A_1$. L'insieme di tutti i vettori ortogonali ad x è un piano e $\{f(x), g(x)\}$ sono una sua base. Essendo A_2 e A_3 ortogonali ad x si ha: $A_2 = af(x) + bg(x)$.

Dato che A_1, A_2, A_3 sono una terna destra allora:

$$A_3 = A_1 \wedge A_2 = x \wedge af(x) + bg(x) = a(x \wedge f(x)) + b(x \wedge g(x)) = ag(x) - bf(x). \tag{2.9}$$

Imponendo che la norma di A_2 sia uguale ad 1, si ottiene che $a^2 + b^2$ deve essere uguale 1. Da ciò consegue che $a = \cos\alpha$ e $b = \sin\alpha$ per un certo α. Abbiamo trovato il modo per scrivere A nella forma che volevamo.

Il codominio della funzione F, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^9$, il quale è metrizzabile e quindi di Hausdorff, è di Hausdorff. Il dominio della funzione è invece uno spazio topologico

compatto.
Infatti ci ricordiamo che S^2 e S^1 sono compatti e che lo spazio prodotto di due spazi topologici compatti è ancora un compatto. Dato che F è continua, bigettiva, con dominio compatto e codominio di Hausdorff, per il Lemma dell'applicazione chiusa, essa è un omeomorfismo.

Ma questo è un assurdo! I gruppi fondamentali di spazi topologici omeomorfi sono isomorfi. Da ciò consegue che il gruppo fondamentale del codominio $SO(3, \mathbb{R})$ di F è isomorfo a $\mathbb{Z}$ (dato che il gruppo fondamentale di $S^2 \times S^1$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$). Ma ci ricordiamo anche di quanto visto nell'ultimo paragrafo del capitolo precedente, ossia che $\pi_1(SO(3, \mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$ Per la transitività della relazione di isomorfismo fra gruppi, si deduce che $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$. Ma ciò è impossibile dato che $\mathbb{Z}_2$ ha solo due elementi, la classe dei numeri pari e la classe dei numeri dispari, mentre $\mathbb{Z}$ è infinito e non possono esistere bigezioni da un insieme finito a uno infinito.

$\square$

Bibliografia

[1] Manetti Marco, *Topologia*, Springer 2008

[2] Loi Andrea, *Appunti di Topologia Generale*

[3] Kosnioswski Czes, *Introduzione alla Topologia Algebrica*, Zanichelli 1989