I quaternioni e i gruppi di rotazioni

Elisa Paglia

Università degli studi di Cagliari - Corso di studi Matematica

23 luglio 2021

Indice

Premessa

Definizione

Definiamo il gruppo ortogonale di dimensione n come

$$O(n) := \left\{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \;\middle|\; A^T A = AA^T = I_n \right\}.$$

Osservazione

In particolare, è possibile visualizzare $O(2)$ come il gruppo di tutte le matrici di rotazione $\left(\begin{smallmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{smallmatrix}\right)$ e di riflessione $\left(\begin{smallmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{smallmatrix}\right)$. Dunque, esso può essere geometricamente descritto dall'unione di due circonferenze.

Premessa

Definizione

Definiamo il gruppo ortogonale speciale come

$$SO(n) := \{A \in O(n) \mid detA = 1\}.$$

Osservazione

L'applicazione

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \mapsto e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

definisce un omeomorfismo tra $SO(2)$ e S^1.

Premessa

Obiettivo

Lo scopo di questo lavoro è trovare una descrizione simile per i gruppi ortogonali speciali $SO(3)$ e $SO(4)$ in termini della 3-sfera S^3.

Quaternioni

Definizione

L'algebra dei quaternioni è lo spazio vettoriale reale

$$\mathbb{H} = \{\, a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \,\},$$

con le regole moltiplicative:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, jk = i, ki = j,$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

Quaternioni

Definizione

Rifacendoci alla terminologia dei numeri complessi, diciamo:

- $q^* = a - bi - cj - dk$ coniugato di $q = a + bi + cj + dk$,
- q reale se $b = c = d = 0$,
- q immaginario puro se $a = 0$.

Quaternioni

Proprietà

1. L'operazione di coniugato $q \mapsto q^*$ è un'antiinvoluzione, cioè $(pq)^* = q^* p^* \ \ \forall p, q \in \mathbb{H}$.
2. $|q|^2 = qq^* = q^* q = a^2+b^2+c^2+d^2$ è una forma quadratica positiva su $\mathbb{H}$. Inoltre $\forall q \in \mathbb{H}$ diverso da 0, l'elemento $q^{-1} = q^*/|q|^2$ è l'inverso destro e sinistro di q.

Proprietà

3. È possibile scrivere ogni quaternione $q \notin \mathbb{R}$, con $q = a + bi + cj + dk$, come somma di una parte reale e di una parte immaginaria, ovvero:

$$q = A + BI,$$

dove I è un quaternione immaginario puro, $I^2 = -1$, $A = a$ e $B = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$.
Da cui, è facile intuire che $\mathbb{R}[q] \cong \mathbb{C}$.

4. Se I è immaginario puro con $I^2 = -1$, allora esistono $J, K \in \mathbb{H}$ tali che I, J, K rispettino la stessa legge di moltiplicazione di i, j, k.

Definizione

Definiamo l'insieme dei quaternioni unitari come

$$U := \{q \in \mathbb{H} \mid |q|^2 = qq^* = 1\} = S^3 \subset \mathbb{R}^4.$$

Teorema 1

Siano $a_p : x \mapsto px$, $b_q : x \mapsto xq^*$ la moltiplicazione a sinistra e la moltiplicazione a destra rispettivamente, dove $p, q \in U$. Sia $\varphi : U \times U \to SO(4)$ l'omomorfismo di gruppi, definito come

$$\varphi(p, q) = a_p \circ b_q : x \mapsto pxq^*.$$

Allora:

1. φ è suriettivo;
2. $\varphi(p, q) = id_{\mathbb{H}}$ se e solo se $(p, q) = (1, 1)$ o $(p, q) = (-1, -1)$.

Quaternioni e rotazioni

Dimostrazione 1.1

La prova della suriettività si basa sui seguenti punti:

- φ è un'applicazione C^∞.
- Il differenziale $\varphi^*: T_{(p,q)}(UxU) \rightarrow T_{\varphi(p,q)}(SO(4))$ è invertibile.
- Per il Teorema della funzione inversa, φ è un diffeomorfismo locale. Ma un diffeomorfismo locale è un applicazione aperta.
- Poichè UxU è un aperto, $\varphi(UxU)$ è un aperto di $SO(4)$.
- UxU è compatto, $SO(4)$ è uno spazio di Hausdorff, di conseguenza, per il lemma dell'applicazione chiusa, φ è chiusa. Ciò significa che $\varphi(UxU)$ è un chiuso.
- $\varphi(UxU)$ è un aperto e chiuso del connesso $SO(4)$ ed è diverso da $\emptyset$, dunque $\varphi(UxU) = SO(4)$.

Dimostrazione 1.2

Mostriamo che $\varphi(p,q) = id_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow (p,q) = (1,1)$ o $(p,q) = (-1,-1)$.

È chiaro che, se $(p,q) = (1,1)$ o $(p,q) = (-1,-1) \Rightarrow pxq^* = x \quad \forall x \in \mathbb{H}$.

L'altra implicazione si ricava scegliendo opportunamente $x \in \mathbb{H}$:

- Se $x = q \Rightarrow p(qq^*) = q \Rightarrow p = q \Rightarrow \varphi(p,q) = \varphi(p,p)$;
- Se $x = i$ allora $pip^* = i \Leftrightarrow pi = ip$. Ricordando che $p = a+bi+cj+dk$, e, svolgendo il prodotto, si ottiene $p = a+bi$;
- Se $x = j$, svolgendo lo stesso calcolo di sopra si ricava $p = a$. Ma, poiché $p \in U$, segue che $q = p = \pm 1$.

Quaternioni e rotazioni

Osservazione

Dalla Proprietà (3), sappiamo che $\forall q \in \mathbb{H}$, con $q \notin \mathbb{R}$, è possibile scrivere $q = A + BI$, dove I è un quaternione immaginario puro e $I^2 = -1$. Se q è anche unitario, allora

$$1 = qq^* = (A + BI)(A - BI) = A^2 + B^2,$$

dunque $\exists \vartheta \in (0, \pi)$ tale per cui $q = \cos\vartheta + I \sin\vartheta$.

Teorema 2

Sia $r_q : x \mapsto qxq^*$ l'applicazione definita da $r_q : x \mapsto qxq^*$, con $q \in U$. Allora, essa coincide con l'identità per gli elementi reali di $\mathbb{H}$ e manda quaternioni immaginari puri in quanternioni immaginari puri.
Inoltre r_q è la rotazione di $\mathbb{R}^3$ di un angolo 2ϑ attorno l'asse la cui direzione è definita da I.
Infine, l'omomorfismo di gruppi $\psi : U = S^3 \to SO(3)$ definito da

$$\psi(q) = r_q$$

è suriettivo, e $\psi(q_1) = \psi(q_2)$ se e solo se $q_1 = \pm q_2$.

Quaternioni e rotazioni

Dimostrazione

Verifichiamo la prima affermazione.
$a \in \mathbb{R}$ commuta nel prodotto con i quaternioni, dunque $r_q(a) = qaq^* = aqq^* = a$.
Invece, se p è immaginario puro $\Rightarrow p^* = -p \Rightarrow r_q(p) = qpq^*$ e $(r_q(p))^* = (qpq^*)^* = qp^*q^* = -qpq^*$. Dunque qpq^* è immaginario puro.
Verifichiamo che $r_q \equiv Rot(I, 2\vartheta)$.
$r_q(I) = I$ segue da $q = \cos\vartheta + I\sin\vartheta$, così come $q^* = q^{-1}$ e $qIq^{-1} = I$.

Dimostrazione

Ora, siano J, K come nella proprietà (4). Allora

$$qJq^* = (\cos\vartheta + I\sin\vartheta)J(\cos\vartheta - I\sin\vartheta) =$$

$$= (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)J + (2\sin\vartheta\cos\vartheta)K = \cos(2\vartheta)J + \sin(2\vartheta)K$$

e, allo stesso modo, $qKq^* = -2(\sin\vartheta\cos\vartheta)J + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)K$. Pertanto, r_q fissa l'asse definto da I, e compie una rotazione di 2ϑ nel piano definito da J, K.

Dimostrazione

Verifichiamo che ψ è suriettiva.
Sia $s \in SO(3)$, allora s è una rotazione di un angolo ϑ attorno ad un asse I. Dunque, basta prendere $q \in U$ in modo tale che identifichi la direzione I con un angolo $\alpha = \vartheta/2$:

$$q = \cos\alpha + I \sin\alpha,$$

per cui $\psi(q) = r_q = s$.
L'ultima affermazione è una diretta conseguenza della presenza dell'angolo 2ϑ.

Le sfere e i gruppi ortogonali speciali

Corollario

1. Vi è un omeomorfismo
$$SO(3) \simeq S^3/\sim = \mathbb{RP}^3$$
dove $\sim$ è la relazione di equivalenza su S^3 che identifica i punti antipodali x e $-x$.
2. Vi è un omeomorfismo
$$SO(4) \simeq (S^3 x\, S^3)/\approx$$
dove $\approx$ è la relazione di equivalenza su $S^3 x\, S^3$ che identifica (x, y) con $(-x, -y)$.

Dimostrazione

1. Dal Teorema (2), sappiamo che esiste un'applicazione continua e suriettiva $\psi : U = S^3 \to SO(3)$, con $\psi(x) = \psi(y)$ se e solo se $x = y$ o $x = -y$. Inoltre, per la proprietà universale delle applicazioni della topologia quoziente, esiste un'applicazione continua

$$\overline{\psi} : (S^3/\sim) \to SO(3)$$

la quale è una biiezione. Ora, S^3 è compatto, e di conseguenza anche $S^3/\sim$ lo è. Anche la topologia di sottospazio di $SO(3) \subset \mathbb{R}^9 = \{\textit{matrici } 3x3\}$ è metrica, quindi di Hausdorff. Da cui segue che $\overline{\psi}$ è un omeomorfismo.