Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Una semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Elisa Manfredi

Anno Accademico 2009/2010

Introduzione

Il *Teorema fondamentale dell'algebra* asserisce che ogni polinomio non costante di una sola variabile a coefficienti complessi ha almeno una radice complessa. Equivalentemente, il campo dei numeri complessi è algebricamente chiuso.

Vista l'indubbia importanza di questo teorema esistono in letteratura diverse dimostrazioni del Teorema fondamentale dell'algebra (il lettore può trovare in rete svariate informazioni e notizie su questo teorema). E' interessante osservare che nonostante il suo nome non può esistere una sua dimostrazione algebrica.

Le dimostrazioni conosciute possono essere idealmente suddivise in due filoni: 1) topologiche e 2) analitiche. In questa tesi siamo interessati alle dimostrazioni del primo tipo.

Probabilmente la dimostrazione topologica più elementare è quella fornita da Carl Friedrich Gauss (vedi [5] pagina 111) dove si usa il fatto che una funzione continua a valori reali definita su un compatto $K \subset \mathbb{R}^2$ è limitata. Un' altra dimostrazione topologica molto elegante è stata fornita da John Milnor [2] tramite l'utilizzo della teoria del grado.

In questa tesi presentiamo una semplice dimostrazione del Teorema fondamentale dell'algebra dovuta a Anindya Sen [4] basata sul Teorema della funzione inversa. La tesi è organizzata come segue. Nel primo Capitolo vengono richiamati e dimostrati i concetti topologici di base, quali compattezza, connessione e separabilità che verranno poi utilizzati nel Capitolo 2 per fornire la dimostrazione di Anindya Sen del Teorema fondamentale dell'algebra.

Indice

Capitolo 1

Topologia

1.1 Spazi metrici

Sia X un insieme, si dice metrica sull'insieme X una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che per qualunque $x, y, z \in X$ si ha che :

- $d(x, x) = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Definizione 1.1.1. *Sia X un insieme e sia d una metrica su X, allora la coppia (X, d) è detta spazio metrico.*

Definizione 1.1.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x \in X$, definiamo la bolla aperta $B_\varepsilon(x)$ di raggio $\varepsilon > 0$ e centro x l'insieme $B_\varepsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$.*

Definizione 1.1.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $U \subset X$, U è detto aperto se per qualunque $x \in U$ esiste $\varepsilon_x > 0$ tale che $B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$.*

Definizione 1.1.4. *Siano (X, d) e (Y, d') due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione, f è continua in un punto $x \in X$ se $\forall \varepsilon_x > 0 \Rightarrow \exists \delta_x > 0$ t.c.*

$d(x, y) < \delta_x \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon_x$. *Diremo che* f *è untinua se è continua in ogni punto di* X.

Teorema 1.1.5. *Siano* X *e* Y *due spazi metrici e sia* $f : X \to Y$ *una funzione,* f *è continua se e solo se preso un aperto* $U \subset Y$ *allora* $f^{-1}(U) \subset X$ *è un aperto di* X.

Dimostrazione. Sia d_1 la metrica su X e d_2 la metrica su Y. Supponiamo f continua, e prendiamo $U \subset Y$ aperto, vogliamo dimostrare che $f^{-1}(U)$ è un aperto di X. Sia $x \in f^{-1}(U)$, essendo U un aperto, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Poichè f è continua sappiamo che $\exists \delta > 0$ t.c. $d_1(x, y) \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Dunque $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ e $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$, poichè questo vale per qualunque $x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq X$ è aperto in X.

Supponiamo ora che preso un aperto $U \subset Y \Rightarrow f^{-1}(U) \subset X$ è ancora aperto. Sia $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, si ha che $B_\varepsilon(f(x))$ è un aperto di Y e dunque $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ è un aperto di X. Dalla definizione di insieme aperto segue che $\exists \delta > 0$ t.c. $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Abbiamo mostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ se $d_1(x, y) < \delta$. Dunque f è continua. □

1.2 Spazi topologici

Definizione 1.2.1. *Una topologia* $\mathcal{T}$ *su un insieme* X *è una famiglia di sottoinsiemi di* X *tali che:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. *se* $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
3. *se* $A_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

La coppia $(X, \mathcal{T})$ *è chiamata spazio topologico, gli elementi di* $\mathcal{T}$ *vengono detti aperti di* X.

Definizione 1.2.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico allora la famiglia $\mathcal{T}$ costituita dagli insiemi aperti definiti nella Definizione 1.1.3 è una topologia. Se $\mathcal{T}$ è una topologia indotta da una metrica, $\mathcal{T}$ prende il nome di topologia metrica.*

Infatti le proprietà 1) e 3) della Definizione 1.2.1 sono immediatamente soddisfatte mentre la proprietà 2) è facilmente verificabile. Siano $U, V \in \mathcal{T}$ e sia $x \in U \cap V$ allora esistono ε_1 e ε_2 t.c. $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ e $B_{\varepsilon_2}(x) \subset V$. Quindi se $\varepsilon_0 = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ allora $B_{\varepsilon_0}(x) \subset U \cap V$. Dunque $U \cap V$ è aperto.

Definizione 1.2.3. *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $Y \subset X$ allora la famiglia $\mathcal{T}' = \{Y \cap A | A \in \mathcal{T}\}$ è una topologia e la coppia $(Y, \mathcal{T}')$ è detta sottospazio di $(X, \mathcal{T})$*

Definizione 1.2.4. *Un sottoinsieme C di uno spazio topologico X è un chiuso se è il complementare di un aperto di X.*

Definizione 1.2.5. *Una funzione $f : X \to Y$ da uno spazio topologico X ad uno spazio topologico Y è continua se la controimmagine di un aperto di Y è un aperto di X. Equivalentemente la controimmagine di un chiuso di Y è un chiuso di X.*

Definizione 1.2.6. *Sia $x \in X$ un punto di uno spazio topologico X, diremo che $U \subset X$ è un intorno di x se contiene un aperto A tale che $x \in A$.*

Definizione 1.2.7. *Sia X uno spazio topologico e A un sottoinsieme di X, $x \in X$ è un punto di accumulazione per A se preso un intorno U di x esiste almeno un punto di A in $U \setminus \{x\}$.*

Proposizione 1.2.8. *Sia $C \subset X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico X allora C è chiuso se e solo se contiene ogni suo punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Supponiamo che C sia chiuso e che $x \notin C$ sia un punto di accumulazione di C, allora il complementare di C è un intorno aperto di x che non interseca C, ma questo contraddice l'ipotesi che x fosse di accumulazione per C.

Viceversa supponiamo che C contenga ogni suo punto di accumulazione. Sia C^c il complementare di C. Se $x \in C^c$ allora non è di accumulazione per C, esiste pertanto un intorno aperto A_x contenuto in C^c. Dunque $C^c = \cup_{x \in C^c} A_x$, cioè è unione di aperti e dunque aperto. $\square$

Definizione 1.2.9. *Sia K un insieme, allora un ricoprimento aperto per l'insieme K è una famiglia $F = \{U_i\}_{i \in I}$ di aperti tale che $K \subseteq \cup_{i \in I}(U_i)$.*

Definizione 1.2.10. *Un insieme K è compatto se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento aperto finito.*

Teorema 1.2.11. *Sia X compatto e $Y \subset X$ un insieme infinito, allora Y ha un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y non abbia punti di accumulazione, allora per ogni $x \in X$ esiste un aperto A_x tale che $A_x \cap Y$ sia l'insieme vuoto, oppure $\{x\}$, quest'ultima eventualità si verifica nel caso in cui $x \in Y$. $\mathcal{F} = \{A_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento di X, osserviamo che ogni sottoricoprimento deve necessariamente contenere la famiglia $\{A_x\}_{x \in Y}$, pertanto $\mathcal{F}$ non ammette un sottoricoprimento finito, ciò che è in contraddizione con l'ipotesi di compattezza di X. $\square$

Lemma 1.2.12. *Ogni sottoinsieme chiuso di un insieme compatto è compatto.*

Dimostrazione. Sia K un insieme compatto e sia $C \subset K$ chiuso. Sia $\mathcal{I}$ un ricoprimento aperto di C e sia C^c il complementare di C. Allora $\mathcal{I} \cup \{C^c\}$ è un ricoprimento di K. Poichè K è compatto si può estrarre da $\mathcal{I}$ un sottoricoprimento finito, della forma $\{U_1, U_2, \dots, U_n, C^c\}$. Pertanto $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subset \mathcal{I}$ è un sottoricoprimento finito di C. Dunque C è compatto. $\square$

Definizione 1.2.13. *Uno spazio topologico X è di Hausdorff se comunque si prendano due punti distinti $x, y \in X$ esistono un intorno aperto U di x e un intorno aperto V di y tali che $U \cap V = \emptyset$.*

Proposizione 1.2.14. *Uno spazio X dotato di una topologia metrica è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ due punti distinti. Indichiamo con d la distanza che induce la topologia metrica. $B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x)$ e $B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$ sono due intorni disgiunti di x e di y rispettivamente. $\square$

Proposizione 1.2.15. *Un compatto K in uno spazio X di Hausdorff è chiuso.*

Dimostrazione. Sia x un punto del complementare K^c di K. Vogliamo far vedere che K^c contiene un intorno aperto di x. Poichè X è di Hausdorff per ogni $y \in K$ possiamo scegliere un intorno aperto U_y di x e un intorno aperto V_y di y t.c. $U_y \cap V_y = \emptyset$. La famiglia $\{V_y\}_{y \in K}$ è chiaramente un ricoprimento aperto di K, per la compattezza di K possiamo estrarne un ricoprimento finito $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$. $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ è un intorno aperto di x t.c. $U \cap K = \emptyset$. Abbiamo trovato un intorno aperto di x completamente contenuto in K^c, dunque K è chiuso. $\square$

Definizione 1.2.16. *Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici suoi sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$. Equivalentemente X è connesso se non è unione di due aperti disgiunti non banali.*

1.3 Topologia di $\mathbb{R}^2$

Dotiamo $\mathbb{R}^2$ della topologia euclidea, cioè la topologia metrica indotta dalla metrica euclidea d, data da

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Lemma 1.3.1. *Ogni rettangolo T della forma $T = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ è compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{I}$ sia un ricoprimento di B dal quale non sia possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Sia $T_0 = [a_0, b_0] \times [c_0, d_0] = T$, costruiamo una successione di rettangoli $T_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ tramite il seguente passo induttivo: dividiamo T_k in quattro quadranti uguali e definiamo T_{k+1} un quadrante per cui nessuna sottofamiglia finita di $\mathcal{I}$ sia un suo ricoprimento. Per costruzione $0 \leq \inf_k(b_k) - \sup_k(a_k) \leq (b_k - a_k) = \frac{b-a}{2^k}$ dunque $\sup_k(a_k) = \inf_k(b_k)$ chiamiamo x questo valore. In maniera analoga definiamo $y = \sup_k(c_k) = \inf_k(d_k)$. Dunque $z = (x, y) \in \cap_{k=1}^{\infty} T_k$. Sia $A \in \mathcal{I}$ un aperto che contiene z. Per ε sufficientemente piccolo esiste $B_\varepsilon(z) \subset A$, allora per k abbastanza grande $T_k \subset B_\varepsilon(z) \subset U$, dunque abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $\mathcal{I}$ per T_k. Dalla contraddizione segue che B è compatto. $\square$

Teorema 1.3.2. *Sia $K \subset \mathbb{R}^2$, K è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo $K \subset \mathbb{R}^2$ compatto. Allora $\{B_r(0)\}_{r\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}^2$, e dunque di K. Poichè K è compatto possiamo estrarre da $\{B_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sotto ricoprimento finito di K, allora K sarà contenuto in una bolla $B_n(0)$ per qualche n, dunque K è limitato. Inoltre essendo $\mathbb{R}^2$ di Hausdorff K è chiuso (Proposizione 1.2.15).

Supponiamo ora K chiuso e limitato. Sia $B_n(x)$ una bolla che contiene K e scegliamo un rettangolo T della forma $T = [a, b] \times [c, d]$ t.c. $B_n(x) \subset T$. Poichè T è compatto e $K \subset T$ è chiuso allora K è compatto. $\square$

Corollario 1.3.3. *Sia $D_\varepsilon(x)$ la bolla chiusa di centro x e raggio $\varepsilon > 0$ l'insieme definito da $D_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 | d(x, y) \leq \varepsilon\}$. L'insieme $D_\varepsilon(x)$ è compatto.*

Proposizione 1.3.4. *Una successione di $\mathbb{R}^2$ contenuta in un compatto ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un compatto e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ una successione, per il Teorema 1.2.11 esiste un punto di accumulazione x_∞ per $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per ogni n scegliamo un punto y_n della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenuto in

$B_{\frac{1}{n}}(x_\infty)$. È una semplice osservazione che $\lim_{n\to\infty} y_n = x_\infty$. Dunque $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione convergente di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Proposizione 1.3.5. *Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un insieme finito di punti (eventualmente vuoto). $\mathbb{R}^2 \setminus K$ è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}^2 \setminus K$ sia unione disgiunta di due sottoinsiemi aperti (e quindi anche chiusi) non banali U e V. Fissiamo un punto $x_0 \in U$ e una bolla aperta di raggio $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon \subset V$. Poichè K è finito, possiamo scegliere $y_0 \in B_\varepsilon$ in modo che il segmento $l_0 \subset \mathbb{R}^2$, che unisce x_0 e y_0, non intersechi K. Osserviamo che l_0 è chiuso e limitato, dunque è compatto. Sia l_n una successione di segmenti di estremi x_n e y_n tali che

- $x_n \in U$ e $y_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$
- $d(x_n, y_n) \leq \frac{d(x_0,y_0)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$
- $l_{n+1} \subset l_n$, $n \in N$

Osserviamo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione contenuta nel compatto l_0, ammette dunque (Proposizione 1.3.4) una sottosuccessione convergente ad un punto x_∞. Se W è un intorno di x_∞, per n abbastanza grande, l_n è contenuto in W, qiundi W contiene almeno un punto di U e almeno un punto di V. Per l'arbitrarietà di W segue che x_∞ è un punto di accumulazione di U e V. Per la proposizione 1.2.8 si ha che $x_\infty \in U \cap V$, ma per ipotesi $U \cap V = \emptyset$, dalla contraddizione segue la tesi. □

1.4 Funzioni continue

Definizione 1.4.1. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua da uno spazio topologico X a uno spazio topologico Y, f è propria se preso $K \subset Y$ compatto $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset X$ è ancora compatto.*

Proposizione 1.4.2. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione propria, allora f è chiusa, cioè l'immagine di un insieme chiuso è ancora un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ un chiuso, e sia $y \in \mathbb{R}^2$ un punto di accumulazione per $f(C)$. Vogliamo far vedere che $y \in f(C)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo $f(x_n) \in B_{\frac{1}{n+1}}(y) \cap f(C)$, osserviamo che $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di $f(C)$ convergente a y. L'insieme $K = \{y, f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots\}$ è un compatto. Infatti se $\mathcal{F}$ è un ricoprimento aperto di K e A è un elemento di $\mathcal{F}$ che contiene y, allora $A \setminus K$ è costituito da un numero finito di punti. Poichè f è propria $f^{-1}(K)$ è un compatto, quindi per la Proposizione 1.3.4 la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammetterà una sottosuccessione $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ covergente ad un limite x. Poichè $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di C e C è chiuso, $x \in C$. Per la continuità di f si ha $f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_{i_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{i_n}) = y$. Quindi $y \in f(C)$. $\square$

Nel resto di questa tesi identificheremo come spazio metrico e topologico lo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con lo spazio $\mathbb{R}^2$ tramite la seguente legge $z = x + iy \to (x, y)$.

Teorema 1.4.3. *Ogni polinomio $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione propria.*

Dimostrazione. Sia $P(z)$ della forma $P(z) = a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$. Indicato con $|\cdot| = d(\cdot,\cdot)$ per la diseguaglianza triangolare si ha che $|P(z)| = |a_0z^n + a_1z^{n-1}+\cdots+a_n| \geq |a_0||z|^n-|a_1||z|^{n-1}-\cdots-|a_n| = |z^n|(|a_0|-\frac{|a_1|}{|z|}-\cdots-\frac{|a_n|}{|z|^n})$. Pertanto se $\{z_n\}_{n\in N}$ è una successione tale che $|z_n| \to \infty$ allora $|P(z)| \to \infty$. Supponiamo che $K \subset \mathbb{C}$ sia compatto (quindi chiuso e limitato) e che $P^{-1}(K)$ non sia compatto. Poichè P è una funzione continua $f^{-1}(K)$ è un chiuso. Resta da mostrare che $P^{-1}(K) \subset \mathbb{C}$ è limitato. Supponiamo che $P^{-1}(K)$ non sia limitato. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo un punto $z_n \in f^{-1}(K) \setminus B_{n+1}(0)$, osserviamo che $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, pertanto $\lim_{n\to\infty} |P(z_n)| = \infty$. Essendo $P(z_n)$ una successione di K abbiamo ottenuto una contraddizione con l'ipotesi di limitatezza di K. Pertanto $f^{-1}(K)$ è compatto. $\square$

Teorema 1.4.4. *(Teorema della funzione inversa) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ una funzione C^1 (cioè derivabile con derivata continua), tale* *che il determinante jacobiano di f in x è non nullo*

$$|J_f(x)| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \neq 0,$$

allora esiste un intorno U di x_0 tale che la restrizione di f su U, $f : U \to f(U)$ è invertibile. Inoltre l'inversa f^{-1} è C^1 e per ogni $y \in f(U)$ vale

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f^{-1}(f^{-1}(y)).$$

Definizione 1.4.5. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione C^1. Un punto $x \in \mathbb{R}$ è un punto critico se*

$$|J_f(x)| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = 0$$

altrimenti è un punto regolare. Un punto $y \in \mathbb{C}$ è detto valore regolare se la sua controimmagine non contiene punti critici, altrimenti è un valore regolare.

Proposizione 1.4.6. *Sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio dato da*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_k z^{n-k} + \cdots + a_n,$$

allora $z \in \mathbb{C}$ è un punto critico se e solo se $P'(z) = 0$.

Dimostrazione. Il polinomio $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ visto come applicazione che va da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ è della forma $P(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, dove $f_1 = \frac{P+\overline{P}}{2}$, $f_2 = i\frac{\overline{P}-P}{2}$, $z = x_1 + ix_2$ e $\overline{z} = x_1 - ix_2$. Dunque lo jacobiano sarà dato da

$$J_P(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{P+\overline{P}}{2}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \frac{P+\overline{P}}{2}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} & \frac{\partial \frac{P+\overline{P}}{2}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \frac{P+\overline{P}}{2}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\left(i\frac{\overline{P}-P}{2}\right)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(i\frac{\overline{P}-P}{2}\right)}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} & \frac{\partial\left(i\frac{\overline{P}-P}{2}\right)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(i\frac{\overline{P}-P}{2}\right)}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{P'+\overline{P}'}{2} & i\frac{P'-\overline{P}'}{2} \\ i\frac{\overline{P}'-P'}{2} & \frac{P'+\overline{P}'}{2} \end{pmatrix}$$

Pertanto $|J_P(z)| = \left(\frac{P'+\overline{P}'}{2}\right)^2 + \left(i\frac{P'-\overline{P}'}{2}\right)^2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2$.

Dunque $|J_f(z)| = 0$ se e solo se $\left(\frac{P'+\overline{P}'}{2}\right)^2 = 0$ e $\left(i\frac{P'-\overline{P}'}{2}\right)^2 = 0$ se e solo se $P'(z) = 0$.

$\square$

Capitolo 2

Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema fondamentale dell'algebra. *Sia*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_k z^{n-k} + \cdots + a_n$$

un polinomio di grado $n \geq 1$, con coefficienti complessi a_i. Allora $P(z)$ ha una radice, cioè esiste $\xi \in \mathbb{C}$ tale $P(\xi) = 0$.

Lemma 2.0.7. *Un polinomio P di grado n a coefficienti complessi, ammette al più n radici.*

Dimostrazione. Sia $z_1 \in \mathbb{C}$, per il teorema di unicità del quoziente e resto dei polinomi $P(z) = (z - z_1)Q(z) + r(z)$ con $deg(Q(z)) = n - 1$ e $deg(r(z)) \leq deg(z - z_1) = 1$, dunque $r(z)$ è una costante e se z_0 è una radice di $P(z)$ allora $0 = P(z_0) = r(z)$. Poichè $deg(P(z)) = n$, $P(z)$ ammetterà una scomposizione della forma $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_m)\tilde{Q}(z)$ con $m \leq n$ e $deg(\tilde{Q}) = n - m$, dunque $P(z)$ ammetterà al più n radici. $\square$

Lemma 2.0.8. *Sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio di grado n a coefficienti complessi e sia K l'insieme dei valori critici di $P(z)$ allora K e $P^{-1}(K)$ sono sottoinsiemi finiti di $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Siccome P' è un polinomio di grado $n-1$, per la Proposizione 1.4.6 e per il Lemma 2.0.7 K è costituito al più di $n-1$ punti. Osserviamo che dato $a \in \mathbb{C}$, l'insieme $P^{-1}(a)$ coincide con le radici del polinomio $P(z) - a$, il quale ha grado uguale al grado di $P(z)$. Dunque $P^{-1}(K)$ contiene al più $n(n-1)$ punti. $\square$

Lemma 2.0.9. *Siano* $X = \mathbb{C} \setminus P^{-1}(K)$ *e* $Y = \mathbb{C} \setminus K$ *allora* $P(X) = Y$.

Dimostrazione. Per la proposizione 1.3.5 X e Y sono aperti e connessi. Osserviamo che K è immagine dell'insieme dei punti critici, dunque $P(P^{-1}(K)) = K$. Valgono le seguenti uguaglianze

$$Im(P) = P(P^{-1}(K) \sqcup (\mathbb{C} \setminus P^{-1}(K)))$$

$$= P(P^{-1}(K)) \sqcup P(\mathbb{C} \setminus P^{-1}(K)) = K \sqcup P(X)$$

Pertanto $P(X) = Im(P) \setminus K = Im(P) \cap (\mathbb{C} \setminus K) = Im(P) \cap Y$. Ora dal Teorema 1.4.2 sappiamo che essendo P una funzione propria, $Im(P) \subset \mathbb{C}$ è chiusa in $\mathbb{C}$. Quindi $P(X) = Im(P) \cap Y$ è chiuso in Y. Sia $P(x) = y \in Y$, poichè x è un punto regolare, dal teorema della funzione inversa sappiamo che esiste un intorno aperto $U \subset X$ tale che $P(U) = V \subset Y$ è un intorno aperto di y. Dall'arbitrarietà di y segue che $P(X)$ è aperto in Y. Poichè Y è connesso e $P(X)$ è aperto e chiuso in Y allora $P(X) = Y$. $\square$

Dimostrazione del Teorema fondamentale dell'algebra. Per il Lemma 2.0.9 e poichè K è immagine dell'insieme dei punti critici si ha rispettivamente che $P(X) = Y$ e $P(P^{-1}(K)) = K$ dunque

$$P(\mathbb{C}) = P(P^{-1}(K) \cup X) = K \cup P(X) = K \cup Y = \mathbb{C}.$$

La dimostrazione del teorema è completa.

Bibliografia

[1] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli (1988).

[2] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997

[3] C.D. Pagani, S.Salsa, *Analisi matematica, Volume 1*, Masson S.p.A, Milano.

[4] A. Sen, *Fundamental Theorem of Algebra – Yet Another Proof*, Amer. Math. Monthly 107 (2000), no. 9, 842–843.

[5] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri (1994).