Università degli Studi di Cagliari

Analisi convessa e Poliedri

Relatore

Andrea Loi

Candidato

Ester Stefania Aresu

31 Marzo 2014
Anno Accademico 2012/2013

Introduzione

- Programmazione lineare
  - Brevi cenni storici
  - Cos'è?
  - Definizione di *funzione obiettivo e regione ammissibile*
- Elementi di Analisi convessa
  - Poliedri
  - *Punti estremi, direzioni estreme*
- Applicazione pratica e conclusioni
  - Un problema dei trasporti

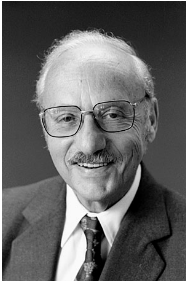

Figura:

George Bernard Dantzig, 1914-2005

Programmazione lineare

Definizione

La programmazione lineare si occupa di ottimizzare (massimizzare o minimizzare) una funzione lineare, detta funzione obiettivo f.o., soggetta a vincoli espressi da equazioni e disequazioni anch'esse lineari.

Programmazione lineare

Definizione

La programmazione lineare si occupa di ottimizzare (massimizzare o minimizzare) una funzione lineare, detta funzione obiettivo f.o., soggetta a vincoli espressi da equazioni e disequazioni anch'esse lineari.

Vantaggi

- ✓ Modellizzazione di un vasto numero di problemi
- ✓ Fornire soluzioni in un tempo ragionevole
- ✓ Capacità di approssimare problemi non lineari

Programmazione lineare

Definizione

Sia il dominio di f.o. z=$\mathbf{cx}$, determinato dal seguente sistema di *vincoli tecnologici*; dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono i *coefficienti di costo*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le *variabili decisionali* da determinare e a_{ij} i *coefficienti tecnologici*

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 \cdots + c_nx_n \\ \text{subject to} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m \qquad \textbf{(forma standard)} \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Programmazione lineare

Definizione

Sia il dominio di f.o. z=**cx**, determinato dal seguente sistema di *vincoli tecnologici*; dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono i *coefficienti di costo*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le *variabili decisionali* da determinare e a_{ij} i *coefficienti tecnologici*

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & \mathbf{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 \cdots + c_nx_n \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m \qquad \textbf{(forma standard)} \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Definizione (Feasible region)

Un vettore non negativo $\mathbf{x}$ tale che sia soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dove $A = (a_{ij})$, è detto *punto ammissibile*.

L'insieme di tutti i punti ammissibili costituisce la **regione ammissibile**.

Elementi di Analisi convessa

Poliedri

Definizione (Poliedro)

Un **poliedro** è un insieme convesso generato dall'intersezione finita di semispazi.
In particolare $P = \{x \in R^n : \; Ax \leq b \, , x \geq 0\}$ è un poliedro interamente contenuto nel primo ortante.
Si dice **politopo** un poliedro limitato.

Definizione

Un punto $\bar{x} \in P$ è un vertice per il poliedro P se e solo se esistono n righe della matrice $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}$ corrispondenti ai vincoli attivi in $\bar{x}$ linearmente indipendenti.

Un poliedro ammette un numero finito di vettori $v \leq \binom{m+n}{n}$.

Osservazione

Se $rg(A) < n$ allora P è privo di vertici.

Elementi di Analisi convessa

punti estremi e *direzioni estreme*

Definizione (punto estremo)

Un punto x di un insieme convesso X è detto punto estremo di X se
$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in (0,1)$ e $x_1, x_2 \in X$, allora $x = x_1 = x_2$.

Definizione. Direzione

Dato un insieme convesso X, un vettore non nullo d è detto direzione di X se
$\{x + \lambda d,\ \lambda \geq 0\} \in X \qquad \forall x_0 \in X$.

Osservazione
Sia X un poliedro. Allora d è una direzione di X se e solo se

$$\begin{aligned} &A(x+\lambda d) \leq b \\ &x + \lambda d \geq 0 \qquad \forall \lambda \geq 0, \forall x \in X \end{aligned}$$

cioé se e solo se $d \geq 0, d \neq 0, Ad \leq 0$.

Elementi di Analisi convessa

Esempi di regioni ammissibili

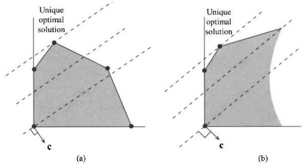

Figure 1.5. Unique optimal solution: (a) Bounded region. (b) Unbounded region.

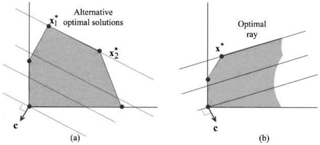

Figure 1.6. Alternative optima: (a) Bounded region. (b) Unbounded region.

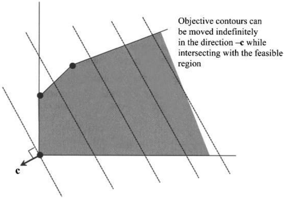

Figure 1.7. Unbounded optimal objective value.

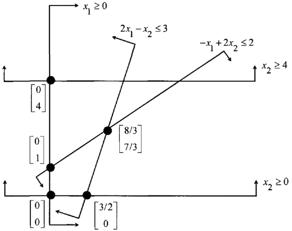

Figure 1.8. An example of an empty feasible region.

Elementi di Analisi convessa

Teorema (Fondamentale della Programmazione Lineare)

Sia dato il problema di PL in forma canonica

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Allora è vera una e una sola delle seguenti affermazioni

- *Il problema non ammette soluzioni ammissibili (la regione ammissibile è vuota)*
- *Il problema è illimitato inferiormente*
- *Esiste almeno una soluzione ottimale di cui almeno una di esse è un vertice.*

Elementi di Analisi convessa

Teorema (Fondamentale della Programmazione Lineare)

Sia dato il problema di PL in forma canonica

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Allora è vera una e una sola delle seguenti affermazioni

- *Il problema non ammette soluzioni ammissibili (la regione ammissibile è vuota)*
- *Il problema è illimitato inferiormente*
- *Esiste almeno una soluzione ottimale di cui almeno una di esse è un vertice.*

Corollario

Dato un poliedro $P = \{x \in R^n : \; Ax \leq b \, , x \geq 0\}$,
se $P \neq \emptyset$ allora ammette sempre un vertice.

Applicazione

Un problema dei trasporti

Siano p un porto, I un insieme di importatori, E un insieme di esportatori, e K l'insieme di k distinti camion di capacità u_k ciascuno.
Sia inoltre $d_i \geq 0$ il numero di container richiesto per soddisfare ogni cliente, c_{ij}^k i costi di rotta non negativi relativi al k-esimo camion sull'arco (i,j) e h_{pj}^k i costi di carico di container sul camion.
Si denoti con $N = \{p \cup I \cup E\}$ e
$A = \{(i,j) \mid i \in p, j \in N, i \neq j \cup (i,j) \mid i \in E, j \in p, i \neq j\}$
l'insieme degli archi di tragitto in cui si muovono i camion. Si suppone inoltre un camion non possa percorrere l'arco (e,i), ma debba necessariamente passare per il porto, dove si arresta definitivamente.
Le variabili decisionali sono:
x_{ij}^k l'arco di rotta, da i a j attraversata dal camion k
y_{ij}^k il numero di camion carichi lungo l'arco (i,j)
z_{ij}^k il numero di camion vuoti lungo l'arco (i,j).

Applicazione

Il problema può essere rappresentato come segue:

$$\min \sum_{k\in K}\left[\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{j\in N} h_{pj}^k (y_{pj}^k + z_{pj}^k)\right]$$

$$\text{s.t.} \sum_{k\in K}\sum_{l\in N} y_{il}^k = \sum_{k\in K}\sum_{j\in p\cup I} y_{ji}^k - d_i \quad \forall i\in I$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{l\in N} z_{il}^k = \sum_{k\in K}\sum_{j\in p\cup I} z_{ji}^k + d_i \quad \forall i\in I$$

$$\sum_{l\in N} y_{il}^k \leq \sum_{j\in p\cup I} y_{ji}^k \quad \forall i\in I, \forall k\in K$$

$$\sum_{l\in N} z_{il}^k \geq \sum_{j\in p\cup I} z_{ji}^k \quad \forall i\in I, \forall k\in K$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{l\in p\cup E} y_{il}^k = \sum_{k\in K}\sum_{j\in N} y_{ji}^k + d_i \quad \forall i\in E$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{l\in p\cup E} z_{il}^k = \sum_{k\in K}\sum_{j\in N} z_{ji}^k - d_i \quad \forall i\in E$$

$$\sum_{l\in p\cup E} y_{il}^k \geq \sum_{j\in N} y_{ji}^k \quad \forall i\in E, \forall k\in K$$

$$\sum_{l\in p\cup E} z_{il}^k \leq \sum_{j\in N} z_{ji}^k \quad \forall i\in E, \forall k\in K$$

$$\sum_{(i,j)\in A} (y_{ji}^k + z_{ji}^k) = \sum_{(i,l)\in A} (y_{il}^k + z_{il}^k) \quad \forall i\in I\cup E, \forall k\in K$$

$$y_{ij}^k + z_{ij}^k \leq u_k x_{ij}^k \quad \forall (i,j)\in A, \forall k\in K$$

$$\sum_{j\in N} x_{ji}^k - \sum_{l\in N} x_{il}^k = 0 \quad \forall i\in N, \forall k\in K$$

$$\sum_{j\in N} x_{pj}^k \leq 1 \quad \forall k\in K$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I\cup E} z_{ip}^k - \sum_{k\in K}\sum_{i\in I\cup E} z_{pi}^k = \sum_{i\in I} d_i - \sum_{i\in E} d_i$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i,j)\in A, \forall k\in K$$

$$y_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i,j)\in A, \forall k\in K$$

$$z_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i,j)\in A, \forall k\in K$$

Applicazione

caso 1. Consideriamo il caso $I = i, E = e, k = 1, u_k = 1, d_i = d_e = 1$

$$x_6 - x_7 + x_8 = -1 \quad (1)$$
$$x_{11} - x_{12} + x_{13} = 1 \quad (2)$$
$$x_6 - x_7 + x_8 \le 0 \quad (3)$$
$$-x_{11} + x_{12} - x_{13} \le 0 \quad (4)$$
$$x_8 - x_9 + x_{10} = -1 \quad (5)$$
$$x_{13} - x_{14} + x_{15} = 1 \quad (6)$$
$$x_8 - x_9 + x_{10} \le 0 \quad (7)$$
$$-x_{13} + x_{14} - x_{15} \le 0 \quad (8)$$
$$x_6 - x_7 + x_8 + x_{11} - x_{12} + x_{13} = 0 \quad (9)$$
$$x_8 - x_9 + x_{10} + x_{13} - x_{14} + x_{15} = 0 \quad (10)$$
$$-x_1 + x_6 + x_{11} \le 0 \quad (11)$$
$$-x_2 + x_7 + x_{12} \le 0 \quad (12)$$
$$-x_3 + x_8 + x_{13} \le 0 \quad (13)$$
$$-x_4 + x_9 + x_{14} \le 0 \quad (14)$$
$$-x_5 + x_{10} + x_{15} \le 0 \quad (15)$$
$$x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0 \quad (16)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad (17)$$
$$x_3 - x_4 + x_5 = 0 \quad (18)$$
$$x_2 + x_5 \le 1 \quad (19)$$
$$x_{11} - x_{12} - x_{14} + x_{15} = 0 \quad (20)$$
$$x_i \ge 0 \quad i = 1, \ldots, 15 \quad (21)$$
$$(22)$$

dove $x_1 = x_{ip}, x_2 = x_{pi}, x_3 = x_{ie}, x_4 = x_{ep}, x_5 = x_{pe}$
$x_6 = y_{ip}, x_7 = y_{pi}, x_8 = y_{ie}, x_9 = y_{ep}, x_{10} = y_{pe}$
$x_{11} = z_{ip}, x_{12} = z_{pi}, x_{13} = z_{ie}, x_{14} = z_{ep}, x_{15} = z_{pe}$

Applicazione

Sistema lineare equivalente in $n = 15$ incognite del PPL

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\
x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\
x_6 - x_7 + x_8 &= -1 \\
x_8 - x_9 + x_{10} &= -1 \\
x_{11} - x_{12} + x_{13} &= 1 \\
x_{13} - x_{14} + x_{15} &= 1 \\
x_6 - x_1 + x_{11} &\leq 0 \\
x_8 - x_3 + x_{13} &\leq 0 \\
x_{10} - x_5 + x_{15} &\leq 0 \\
x_2 + x_5 &\leq 1 \\
x_i \geq 0 \quad i &= 1, \ldots, 15
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Applicazione

Soluzione intera data dall'esperienza $v = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

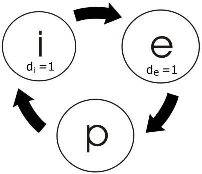

Figura: grafo soluzione del problema

Applicazione

Proposizione

Sia P il poliedro convesso generato dal sistema lineare (23), allora P è costituito da uno e un solo punto v , ed esso è vertice per P.
Equivalentemente, la *regione ammissibile* del problema di LP riportato sopra è formata da un unico punto ammissibile v soluzione ottimale della *funzione obiettivo*.

Applicazione

Proposizione

Sia P il poliedro convesso generato dal sistema lineare (23), allora P è costituito da uno e un solo punto v , ed esso è vertice per P.
Equivalentemente, la *regione ammissibile* del problema di LP riportato sopra è formata da un unico punto ammissibile v soluzione ottimale della *funzione obiettivo*.

Dimostrazione.

Mettiamo in evidenza $x_7 = x_6 + x_8 + 1$ e $x_2 \geq x_7 + x_{12}$. Dalle condizioni di non-negatività si ha $x_7 \geq 1 \Rightarrow x_2 \geq 1$, e per $x_2 + x_5 \leq 1$ necessariamente $x_2 = 1$ e $x_5 = 0$; da cui per la (15) $x_{10} = x_{15} = 0$.
Dalla (6) $x_{14} = x_{13} + x_{15} - 1 \Rightarrow x_{13} + x_{15} \geq 1 \Rightarrow x_{13} \geq 1$; considerando la (13) otteniamo $x_3 \geq x_8 + x_{13} \Rightarrow x_3 \geq 1$ ma per (17), $x_2 = x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$ $x_1 = 0$ e quindi $x_{13} = 1$ e $x_6 = x_8 = x_{11} = 0$ e per la (2), $x_{12} = 0$. Sostituendo nella (18) $1 = x_3 = x_4 - x_5 = x_4$.
Consideriamo poi le equazioni (1),(5) e (6), da cui ricaviamo le relazioni $x_7 = x_9 = 1$ e $x_{14} = 0$.
Osservazione
Se l'arco $x_{ij} = 0$ allora $y_{ij} = z_{ij} = 0$, cioè nessun camion percorre quel tragitto.
La soluzione ammissibile del sistema è quindi il vettore di componenti positive intere $v = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, che è l'unica soluzione ottimale della funzione obiettivo. □

Applicazione

caso 2. $I = i, E = e, k = 1, u_k = 1, d_i \geq 2, d_e = 1$

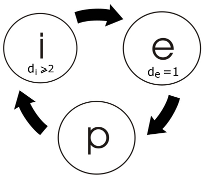

Figura: grafo soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\
x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\
x_8 - x_9 + x_{10} &= -1 \\
x_{13} - x_{14} + x_{15} &= 1 \\
x_6 - x_7 + x_8 + x_{11} - x_{12} + x_{13} &= 0 \\
x_6 - x_7 + x_8 &\leq -2 \\
x_6 - x_1 + x_{11} &\leq 0 \\
x_8 - x_3 + x_{13} &\leq 0 \\
x_{10} - x_5 + x_{15} &\leq 0 \\
x_2 + x_5 &\leq 1 \\
x_i \geq 0 \quad i &= 1, \ldots, 15
\end{aligned} \tag{24}
$$

Osservazione
Un ragionamento analogo al *caso 1* porta all'inconsistenza del sistema:

$$0 = 1$$

Grazie per la cortese attenzione.