Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Se $\mathbb{RP}^n$ sconnette $\mathbb{RP}^{n+1}$ allora $n = 1$

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Daria Uccheddu

Anno Accademico 2008/2009

Indice

Introduzione **i**

1 Strumenti necessari per la dimostrazione del Teorema 1 **1**

1.1 Richiami di base sulle varietà 1

1.2 Gruppo fondamentale 4

1.3 Rivestimenti 5

1.4 Azioni di Gruppi 9

1.4.1 Gruppo fondamentale di un rivestimento 11

2 $\mathbb{RP}^n$ non sconnette $\mathbb{RP}^{n+1}$ per $n > 1$ **15**

Bibliografia 19

Introduzione

Sia $\mathbb{RP}^n$ il proiettivo reale n-dimensionale. Questa tesi è dedicata alla dimostrazione del seguente:

Teorema 1. *Sia* $\Phi : \mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$ *un embedding di* $\mathbb{RP}^n$ *in* $\mathbb{RP}^{n+1}$*, allora* $\Phi(\mathbb{RP}^n)$ *non sconnette* $\mathbb{RP}^{n+1}$ *per* $n > 1$.

La dimostrazione di questo teorema non sembra essere nota nella letteratura matematica e si basa su strumenti di topologia differenziale e algebrica quali il Teorema del punto fisso di Brouwer (Teorema 1.36), il Teorema di Schöenflies generalizzato (Teorema 1.41) e su un profondo risultato dovuto a W. Massey (Teorema 1.37) di non esistenza di un embedding di $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ per $n > 1$.

La tesi è organizzata come segue. Nel Capitolo 1 vengono richiamati i concetti di base sulle varietà differenziabili, del gruppo fondamentale e dei rivestimenti. Il Capitolo 2 contiene la dimostrazione del Teorema 1.

Capitolo 1

Strumenti necessari per la dimostrazione del Teorema 1

1.1 Richiami di base sulle varietà

Definizione 1.1. *Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff X che possiede una base numerabile ed è localmente Euclideo, cioè per ogni punto $x \in X$ esiste un aperto U di X omeomorfo ad un aperto dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.*

Definizione 1.2. *Una varietà differenziabile di dimensione n è una varietà topologica X dotata di una struttura differenziabile o C^∞. Ovvero esiste una famiglia $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ dove U_α è un aperto di X e $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo tale che :*

1. *U_α ricopre X,*
2. *per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è differenziabile.*
3. *$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è massimale, cioè preso (U, φ) che soddisfi la (2) allora $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$.*

Denotiamo con H^n il semi-spazio positivo, ovvero $H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Il bordo di H^n è $\partial H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Definizione 1.3. *Una varietà differenziabile con bordo n-dimensionale, è una varietà topologica X dotata di una struttura differenziabile o C^{∞} (in senso generalizzato). Ovvero esiste una famiglia $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ dove U_α è un aperto di X e $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset H^n$ è un omeomorfismo tale che :*

1. *U_α ricopre X,*
2. *per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è differenziabile.*
3. *$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è massimale.*

In particolare il bordo di X, ∂X è costituito da quei punti di $x \in X$ tali che $\varphi(x) \in \partial H^n$.

Teorema 1.4. *Se X è una varietà differenziale con bordo n-dimensionale, allora ∂X è una varietà differenziale $(n-1)$-dimensionale senza bordo.*

Dimostrazione. Si veda [Bo, Teor.4.2, pp.253-254]. □

Definizione 1.5. *Una varietà differenziabile X è detta orientabile se esiste una famiglia $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tale che, per ogni α, β con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ il determinante del differenziale di $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è positivo.*

Teorema 1.6. *Sia X è una varietà con bordo, $\partial X \neq 0$. Se X è orientabile allora ∂X è una varietà orientabile.*

Per una dimostrazione di questo teorema si rimanda a [Bo, Teor.4.4, pp.256-257].

Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ è una varietà differenziale di dimensione n che si ottiene quozientando $\mathbb{R}^{n+1}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim_\lambda$ per cui x ed $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ sono in relazione tra loro se e solo se $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$. Ovvero

$$\mathbb{RP}^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1}}{\sim_\lambda}.$$

Una definizione equivalente si ottiene quozientando la sfera n-dimensionale,

$\mathbb{S}^n$ rispetto alla relazione antipodale, per la quale x, $y \in \mathbb{S}^n$ sono in relazione tra loro se e solo se $x = y$ oppure $x = -y$. Ovvero

$$\mathbb{RP}^n = \frac{\mathbb{S}^n}{\{\pm 1\}}.$$

Lo spazio proiettivo è una varietà topologica connessa e quindi connessa per archi, localmente connessa e semplicemente localmente connessa. Inoltre $\mathbb{RP}^n$ è anche una varietà compatta, essendo il quoziente di $\mathbb{S}^n$ che è compatta.

Teorema 1.7. *Lo spazio proiettivo n-dimensionale $\mathbb{RP}^n$ è orientabile se e solo se n è dispari.*

Dimostrazione. Si veda [Do, Es.9, p.33]. □

Definizione 1.8. *Un'immersione $f : X \to Y$ tra varietà differenziabili è un'applicazione differenziabile (o C^∞) tra due varietà differenziabili tale che il differenziale $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ sia iniettivo per ogni $x \in X$.*

Definizione 1.9. *Un **embedding** $f : X \to Y$ tra varietà differenziabili è un'immersione iniettiva tale che f è un omeomorfismo tra X e la sua immagine dotata della topologia indotta da Y.*

Corollario 1.10. *Se X e Y sono varietà differenziabili compatte, allora data un'immersione iniettiva f si ha che f è un embedding.*

Dimostrazione. Se $f : X \longrightarrow Y$ è un'immersione iniettiva, affinchè f sia un embedding si deve avere $\widehat{f} : X \longrightarrow f(Y)$ omeomorfismo. Risulta chiaro che $\widehat{f}$ è suriettiva e iniettiva per ipotesi, dunque ammette un'inversa $\widehat{f}^{-1}$. $\widehat{f}$ è continua dal momento che f è differenziabile. Resta da mostrare che $\widehat{f}^{-1}$ è continua. Sia C un chiuso di X. Poichè X è compatto, allora ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto, quindi C è compatto. La controimmagine di C tramite $\widehat{f}^{-1}$ è $f(C) \cap f(X)$, ma C è compatto quindi anche $f(C)$ risulta essere compatto e quindi chiuso in Y che è uno spazio di Hausdorff. Questo mostra che $f(C) \cap f(X)$ è un chiuso di $f(X)$ rispetto alla topologia indotta e quindi $\widehat{f}^{-1}$ è continua. □

Notazione. Useremo spesso la notazione $X \hookrightarrow Y$ per indicare che esiste un embedding tra X e Y.

1.2 Gruppo fondamentale

Se X è uno spazio topologico e $x \in X$ allora si chiama laccio (o cammino) di base x un'applicazione continua $f : I = [0,1] \longrightarrow X$ tale che $f(0) = f(1) = x$. Due lacci f ed h si dicono equivalenti se esiste un'applicazione F continua, detta omotopia,

$$\begin{aligned} F : I \times I &\longrightarrow X \\ (t,s) &\longmapsto F(t,s) \end{aligned}$$

tale che $F(t,0) = f(t)$, $F(t,1) = h(t)$ e $F(0,s) = F(1,s) = x$.
Poichè tale relazione è una relazione di equivalenza sull'insieme dei lacci di X, denoteremo con $[f]$ la classe di equivalenza del laccio f. Se f e g sono due lacci di base $x \in X$ allora il prodotto di f e g, $f * g : I \longrightarrow X$ è

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Poniamo $[f][g] = [f * g]$, si ottiene così un prodotto ben definito di classi di equivalenza (per i dettagli si veda [Ko, Lem.14.2, p.132]).

Definizione 1.11. *Sia X uno spazio topologico. L'insieme delle classi di equivalenza di lacci basati in x, insieme con l'operazione $[f][g] = [f * g]$ dove il prodotto $*$ è il prodotto di cammini, risulta essere un gruppo detto gruppo fondamentale di X nel punto x e si indica con $\pi_1(X,x)$.*

Definizione 1.12. *Sia X uno spazio topologico. Se $\pi_1(X,x) = \{1\}$ per qualche $x \in X$ allora lo spazio si dice semplicemente connesso.*

Ricordiamo ora alcune proprietà importanti del gruppo fondamentale:

Teorema 1.13. *Siano X e Y spazi topologici:*

1. *Se X è uno spazio connesso per archi, allora $\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$ per qualunque $x, y \in X$,*

2. *Se $\phi : X \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora $\pi_1(X,x) \cong \pi_1(Y,\phi(x))$.*

Dimostrazione. Si veda [Ko, pp.139-141]. □

Teorema 1.14. *Siano X e Y due spazi topologici e sia $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua, allora l'applicazione $\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_*(Y, \varphi(x))$ è ben definita e gode delle proprietà seguenti:*

1. *φ_* è un omomorfismo di gruppi detto omomorfismo indotto da φ,*
2. *se $id : X \longrightarrow X$ è l'appliazione identica, allora id_* è l'omomorfismo identico di $\pi_1(X, x)$,*
3. *se $\psi : Y \longrightarrow Z$ è un'applicazione continua, allora $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$,*
4. *se $\varphi : X \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora $\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_*(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Si veda [Ko, pp.141-143]. □

1.3 Rivestimenti

Tra le nozioni che utilizzeremo per la dimostrazione del teorema svolgono un ruolo molto importante i rivestimenti

Definizione 1.15. *Un'applicazione continua e suriettiva $p : \tilde{X} \to X$ tra spazi topologici è chiamata* ***rivestimento*** *se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U di x tale che $p^{-1}(U)$ è unione di aperti disgiunti di $\tilde{X}$ ognuno dei quali viene mandato omeomorficamente su U tramite p.*
In altre parole si ha che $p : \tilde{X} \to X$ è un rivestimento se:

- *p è continua,*
- *p è suriettiva,*
- *$\forall x \in X$ esiste $U \ni x$, tale che*

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j \text{ con } U_j \text{ aperto in } \tilde{X} \text{ e } U_j \cap U_k = \emptyset \ \ \forall j \neq k$$

- *$p_{|U_j} : U_j \to U$ è un omeomorfismo.*

In tal caso U è anche detto aperto banalizzante per p. Gli spazi $\tilde{X}$ e X sono detti rispettivamente spazio totale e spazio base.

Osservazione 1.16. Se $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ è un rivestimento tra varietà differenziabili e p è differenziabile allora $p_{|U_j} : U_j \longrightarrow U$ è un diffeomorfismo. Nel seguito, se $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ è un rivestimento tra varietà differenziabili intenderemo p differenziabile.

Lemma 1.17. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento tra varietà topologiche e sia $C \subset X$ un sottoinsieme qualunque. Allora se $\tilde{C} = p^{-1}(C)$ si ha che $p_{|\tilde{C}} : \tilde{C} \to C$ è ancora un rivestimento.*

Dimostrazione. Verifichiamo che $p_{|\tilde{C}}$ è ancora un rivestimento. La continuità si mantiene attraverso la restrizione. La suriettività è garantita perchè $\tilde{C}$ è l'insieme di tutti i punti che hanno immagine in C tramite p, per cui $p(\tilde{C}) = p(p^{-1}(C))$ è esattamente C. Infine sia $x \in C$, poiché p è un rivestimento, esiste un aperto $U \subset X$ di x banalizzante per p. Consideriamo quindi $V = U \cap C$, questo è un aperto banalizzante per $p_{|\tilde{C}}$ infatti, che si tratti di un aperto segue dalla definizione di topologia indotta, inoltre

$$\begin{aligned} p_{|\tilde{C}}^{-1}(V) = p_{|\tilde{C}}^{-1}(U \cap C) = p_{|\tilde{C}}^{-1}(U) \cap p_{|\tilde{C}}^{-1}(C) = \\ = \tilde{C} \cap p^{-1}(U) = \tilde{C} \cap \bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap \tilde{C}) \end{aligned}$$

dove gli $U_j \cap \tilde{C}$ sono aperti disgiunti di $\tilde{C}$. Inoltre poiché $p_{|U_j} : U_j \to U$ è un omeomorfismo, anche $p_{|U_j \cap \tilde{C}} : U_j \cap \tilde{C} \to U \cap C$ è un omeomorfismo. □

Lemma 1.18. *Sia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento tra varietà topologiche e X connesso. Sia $Y \subset \tilde{X}$ una componente connessa di $\tilde{X}$, $Y \neq \emptyset$, allora $q = p_{|Y} : Y \longrightarrow X$ è ancora un rivestimento.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia U_x un aperto banalizzante per p, allora è chiaro che $q^{-1}(U_x) = p^{-1}(U_x) \cap Y = \bigcup_{j \in J}(U_j \cap Y)$ e quindi è unione di aperti (nella topologia indotta) disgiunti, ognuno omeomorfo a U_x. Resta da dimostrare che q è suriettiva. Y è un aperto in $\tilde{X}$, in quanto si tratta di una componente connessa di una varietà topologica, quindi $q(Y) = p(Y)$ è aperto essendo p è un'applicazione aperta e $p(Y) \neq \emptyset$ poichè $Y \neq \emptyset$. Inoltre $p(Y)$ è chiuso: sia $x \in \overline{p(Y)}$ un punto di accumulazione per $p(Y)$ e sia $U_x \subset X$ un aperto connesso banalizzante per p contenente x. Poiché x è un punto di accumulazione, si ha che

$$U_x \cap p(Y) \neq \emptyset \tag{1.1}$$

Dalla precedente si ha che

$$p^{-1}(U_x) \cap Y \neq \emptyset \tag{1.2}$$

(se così non fosse applicando p ad entrambi i membri della (1.2) si ottiene un'espressione in contrasto con la (1.1)). Poiché U_x è un aperto banalizzante, la (1.2) si scrive

$$\bigcup_{j \in J} U_j \cap Y \neq \emptyset \text{ da cui } \bigcup_{j \in J} (U_j \cap Y) \neq \emptyset$$

e quindi esiste un U_0 tale che $U_0 \cap Y \neq \emptyset$. U_0 è omeomorfo ad U_x quindi è connesso, inoltre contiene un punto $\tilde{x}$ tale che $p(\tilde{x}) = x$. Y è connesso e poichè ha un punto in comune con U_0 si ha che $U_0 \subset Y$ e dunque $\tilde{x} \in Y$. Se $\tilde{x} \in Y$ allora $p(\tilde{x}) = x \in p(Y)$ e quindi $p(Y)$ è chiuso. In conclusione, dunque, $p(Y)$ è contemporaneamente aperto e chiuso in X che è connesso, quindi essendo $p(Y) \neq \emptyset$ si ha che $p(Y) = X$ e quindi la restrizione di p alla componente connessa Y è suriettiva e dunque è ancora un rivestimento. □

Dato un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$, non è difficile dimostrare che se X è connesso per archi la cardinalità della fibra $\#p^{-1}(x)$ non dipende dal punto x scelto. In particolare, se $\#p^{-1}(x) = 1$, si dice che il rivestimento è *ad un foglio* e quindi p è un omeomorfismo, se la cardinalità è due, si dice che è *a due fogli*, etc.

Lemma 1.19. *Siano X e Y varietà differenziabili, $p : \tilde{X} \to X$ e $q : \tilde{Y} \to Y$ due rivestimenti e sia $f : X \to Y$ un'immersione, allora esiste un'immersione $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ che rende commutativo il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, hook, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Che $\tilde{f}$ sia continua e differenziabile deriva dal fatto che il diagramma è commutativo e che la composizione di funzioni differenziabili è

ancora differenziabile.
Sia ora $\tilde{x}$ un punto di $\tilde{X}$, e indichiamo con $x = p(\tilde{x})$, si ha che

$$d_{\tilde{x}}\tilde{f} = d_{f(x)}q^{-1} \circ d_x f \circ d_{\tilde{x}} p$$

(per la regola della catena) e quindi $d_{\tilde{x}}\tilde{f}$ è iniettiva in quanto composizione di applicazioni iniettive. □

Il seguente esempio mostra che il Lemma 1.19 non si estende al caso degli embedding:

Esempio 1.20. Sia $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ l'inclusione canonica di $\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^2$ e siano $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ il rivestimento definito come $p(t) = (\cos t, \sin t)$ e q l'identità di $\mathbb{R}^2$ in se stesso, ovvero il rivestimento *banale* e $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(t) = (\cos t, \sin t)$. Allora il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, hook, "f"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

è commutativo ma $\tilde{f}$ non è iniettiva.
Un caso interessante dove il Lemma 1.19 si estende agli embeddings è quando il rivestimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ è la restizione del rivestimento $q : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ come illustra il seguente lemma:

Lemma 1.21. *Sia $q : \tilde{Y} \to Y$ un rivestimento tra varietà differenziabili, e sia $X \subset Y$ una sottovarietà qualunque. Sia $\tilde{X} = q^{-1}(X)$ e consideriamo il rivestimento $q_{|\tilde{X}} : \tilde{X} \to X$ dato dal Lemma 1.17. Allora esiste un embedding $j : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ che rende commutativo il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q_|"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, hook, "i"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

dove i indica l'immersione (embedding) di X in Y.

Dimostrazione. Per il Lemma 1.19, si ha che essendo i un'immersione, anche j risulta essere un'immersione. Per il Corollario 1.10 resta da dimostrare che dall'iniettività di i segue l'iniettività di j.
Dalla commutatività del diagramma segue che $i \circ q_| = q \circ j$ e dalla suriettività di q si ha che esiste un inversa destra, $q \circ q^{-1} = id_Y$. Siano quindi $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ punti di $\tilde{X}$ tali che

$$j(\tilde{x}_1) = j(\tilde{x}_2). \tag{1.5}$$

Ma $\tilde{X} = q^{-1}(X)$ per cui $\tilde{x}_1 = q^{-1}(x_1)$ e $\tilde{x}_2 = q^{-1}(x_2)$ che sostituito nella (1.5) dà

$$j(q^{-1}(x_1)) = j(q^{-1}(x_2)), \tag{1.6}$$

da cui componendo con q segue:

$$q \circ j(q^{-1}(x_1)) = q \circ j(q^{-1}(x_2)) \text{ e quindi } i \circ q_|(q^{-1}(x_1)) = i \circ q_|(q^{-1}(x_2)),$$

da cui $i(x_1) = i(x_2)$ e dall'iniettività di i, $x_1 = x_2$ e quindi si ha l'iniettività di j. □

1.4 Azioni di Gruppi

Dato un insieme X, e un gruppo G si ha un'azione a sinistra su G o diremo che G agisce a sinistra su X, se esiste un'applicazione

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned} \tag{1.7}$$

con $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in X$ e $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ per ogni g_1, $g_2 \in G$ e $x \in X$.
Un'azione è **transitiva** se per ogni x, $y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.
Un'azione è **fedele** se per ogni $g \neq 1$ di G esiste $x \in X$ tale che $g \cdot x \neq x$.
Infine un'azione è **libera** se per ogni $g \neq 1$ di G e per ogni $x \in X$ si ha che $g \cdot x \neq x$. In altre parole un'azione è libera se l'unico elemento che fissa i punti $x \in X$ è l'identità di G. Chiaramente un'azione libera è anche fedele.

Definizione 1.22. *Se G è un gruppo che agisce transitivamente su X, allora X è detto G-insieme omogeneo.*

Definizione 1.23. *Sia X uno spazio topologico e sia G un gruppo. X è detto G-spazio se G agisce su X e per ogni $g \in G$ la funzione $\vartheta_g : X \longrightarrow X$, $\vartheta_g(x) = g \cdot x$ è continua.*

Un'altra definizione che si rivelerà utile in seguito è quella di azione *propriamente discontinua*:

Definizione 1.24. *Sia X un G-spazio, diremo che G agisce in modo propriamente discontinuo se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U che contiene x e tale che per ogni $g \in G$ si ha $gU \cap U = \emptyset$.*

Si osservi che se G agisce in modo propriamente discontinuo su X, allora G agisce in modo libero.

Teorema 1.25. *Sia G un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico X, allora $p : X \to \frac{X}{G}$ è un rivestimento.*

Per la dimostrazione si rimanda a [Ko, Teor.17.1, p.162].

Esempio 1.26. Consideriamo $X = \mathbb{R}$ e sia $G = \mathbb{Z}$. $\mathbb{R}$ quozientato rispetto a $\mathbb{Z}$ è la sfera unidimensionale $\mathbb{S}^1$. L'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (m, x) &\longmapsto x + m \end{aligned}$$

è propriamente discontinua. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si prenda $\varepsilon < \frac{1}{2}$, allora l'aperto $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ è tale che $gU \cap U = \emptyset$ e dunque per il teorema precedente

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1$$

è un rivestimento.

Esempio 1.27. Consideriamo $X = \mathbb{S}^n$ e sia $G = \mathbb{Z}_2$. Poiché quozientare rispetto alla relazione antipodale $\{\pm 1\}$ equivale a quozientare rispetto a $G = \mathbb{Z}_2$ abbiamo $\mathbb{RP}^n = \frac{\mathbb{S}^n}{\mathbb{Z}_2}$. $\mathbb{Z}_2$ agisce in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{S}^n$, infatti se

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (\pm 1, x) &\longmapsto \pm x \end{aligned}$$

è l'azione sinistra, $\forall\, x \in \mathbb{S}^n$, l'aperto

$$U = \{y \in \mathbb{S}^n \text{ tali che } \|y - x\| < \frac{1}{2}\}$$

è tale che $-U \cap U = \emptyset$. Per il Teorema 1.25 la proiezione

$$p : \mathbb{S}^n \longrightarrow \frac{\mathbb{S}^n}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{RP}^n$$

è un rivestimento dello spazio proiettivo n-dimensionale.

1.4.1 Gruppo fondamentale di un rivestimento

Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento, siano $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $\pi_1(X, x_0)$ i gruppi fondamentali di $\tilde{X}$ e X rispettivamente, con $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Allora l'applicazione

$$\begin{aligned} p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\tilde{f}] &\longmapsto p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] \end{aligned}$$

è iniettiva ed è un omomorfismo di gruppi per il Teorema 1.14.
Non ci addentreremo in questi argomenti ma ricordiamo esclusivamente quelli che sono i teoremi utilizzati nel corso della dimostrazione del teorema principale della tesi.

Definizione 1.28. *Un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è detto regolare (o Galoisiano) se $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$.*

In particolare, se $\pi_1(X, x_0)$ è abeliano, allora il rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è regolare.
Se la cardinalità della fibra è due, allora p è regolare, in quanto l'indice di $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ è due.

Teorema 1.29. *Sia G un gruppo che agisce a sinistra su uno spazio topologico X in modo propriamente discontinuo, allora*

$$p : X \longrightarrow \frac{X}{G} \text{ è regolare. Ed inoltre si ha che } \frac{\pi_1(\frac{X}{G}, p(x_0))}{p_*\pi_1(X, x_0)} \cong G.$$

Viceversa se $p : \tilde{X} \to X$ ($\tilde{X}$ connesso per archi) è un rivestimento regolare, allora esiste un gruppo G che agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$ e $\frac{\tilde{X}}{G}$ è isomorfo a X.

Per la dimostrazione si rimanda a [Ko, Teor.19.3, p.175].
In particolare l'insieme di tutti gli isomorfismi del rivestimento $(\tilde{X}, p)$ in se stesso $Aut(\tilde{X}, p)$ agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$ e si ha che $G \subset Aut(\tilde{X}, p)$.(Si veda [Ko, Teor.21.9, p.191]). Più in generale si definisce isomorfismo tra rivestimenti il seguente:

Definizione 1.30. *Dati due rivestimenti dello spazio X, $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \longrightarrow X$, si dice che $(\tilde{X}_1, p_1)$ è isomorfo a $(\tilde{X}_2, p_2)$ se esiste una funzione φ continua tale che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

ed esiste $\psi : \tilde{X}_2 \longrightarrow \tilde{X}_1$ continua tale che $\psi \cdot \varphi = id_{\tilde{X}_1}$ e $\varphi \cdot \psi = id_{\tilde{X}_2}$.

Corollario 1.31. *Se nelle stesse ipotesi del Teorema 1.29 si ha che X è semplicemente connesso, allora*

$$\pi_1(\frac{X}{G}, p(x_0)) \cong G.$$

Esempio 1.32. Ricordando l'Esempio 1.26 e applicando il corollario precedente, si ha che $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.
Nel caso in cui n sia maggiore di 1 invece si ha che $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$ (vedi[Ko, p.147]) e quindi ricordando l'Esempio 1.27 e applicando il corollario precedente, si ha che $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$ per ogni $n > 1$.

Teorema 1.33. *Sia X una varietà topologica connessa e $\pi_1(X)$ il suo gruppo fondamentale. Allora per ogni sottogruppo H di $\pi_1(X)$ esiste un rivestimento $p_H : X_H \longrightarrow X$, con X_H connesso, unico a meno di isomorfismi, tale che $p_*(\pi_1(X_H)) \simeq H$.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione del teorema si veda [Ko, Cor.22.2, pp.198-199]. □

Esempio 1.34. Si noti che nel caso di $\mathbb{RP}^n$, essendo $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$, gli unici sottogruppi possibili di $\mathbb{Z}_2$ sono i sottogruppi banali, ovvero $\{1\}$ e $\mathbb{Z}_2$, che inducono a meno di isomorfirmi soltanto $p_{\mathbb{Z}_2} : \mathbb{RP}^n \sqcup \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ e $p_{\{1\}} : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ che è detto rivestimento universale di $\mathbb{RP}^n$ per $n > 1$.

In generale

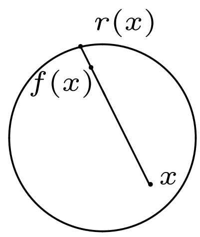
Definizione 1.35. *Se $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ è un rivestimento e $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, allora p è detto rivestimento* ***universale****.*

Ricordiamo inoltre che il rivestimento universale di una varietà topologica connessa X esiste ed è unico a meno di isomorfismi. Per una dimostrazione di questo fatto si veda ad esempio [Ko, Teor.22.1, pp.196-198].

Denotiamo con B^n la bolla chiusa n-dimensionale, dove $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ e $\| \cdot \|$ è la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.36 (del punto fisso di Brouwer)**.** *Ogni funzione continua $f : B^n \longrightarrow B^n$, ammette un punto fisso, cioé $f(x) = x$ per qualche $x \in B^n$.*

Dimostrazione. In questa sede riportiamo solamente la dimostrazione del caso $n = 2$, poiché per dimostrare il caso generale si richiede l'utilizzo di nozioni di omologia singolare (o di coomologia) che non tratteremo in questa tesi, a tal proposito si rimanda a [Ko, Cor.29.20, b), pp.294-295].
Il caso bidimensionale risulta di più semplice soluzione grazie al fatto che la circonferenza $\mathbb{S}^1$ ha gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ mentre per $n \neq 2$ la sfera $(n-1)$-dimensionale è semplicemente connessa, $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) = \{1\}$.
Per dimostrare il caso $n = 2$ supponiamo che esista una funzione $f : B^2 \longrightarrow B^2$ senza punti fissi, cioè $f(x) \neq x$ per tutti $x \in B^2$. Definiamo $r : B^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ come l'applicazione che associa ad ogni punto x l'intersezione della semiretta per x e $f(x)$ con $\mathbb{S}^1$ e $r(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{S}^1$. Si ha $r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$, inoltre si



può scrivere esplicitamente

$$r(x) = x + (\sqrt{1 - \|x\|^2 + (x \cdot g(x))^2} - x \cdot g(x)) \cdot g(x)$$

dove $g(x) = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$. Poiché f non ha punti fissi per ipotesi, si ha che $g(x)$ e $r(x)$ sono continue.
La condizione $r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$ induce tra i gruppi fondamentali (per il Teorema 1.14) la relazione $(r \circ i)_* = r_* \circ i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ o in altre parole $r_* \circ i_* = id_{\mathbb{Z}}$ poiché $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Dunque $i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(B^2)$ ha inversa sinistra (equivalentemente è iniettiva), cioè $i_* : \mathbb{Z} \longrightarrow \{1\}$ è iniettiva, il che è chiaramente assurdo. □

Per dimostrare il Teorema 1 abbiamo bisogno dei tre teoremi che seguono.

Teorema 1.37 (W.S. Massey[Ma], R. Thom[Th]). *Sia n un numero naturale $n > 1$. Non esiste un embedding di $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Osservazione 1.38. La dimostrazione di questo teorema, che non fa parte di questa tesi, richiede nozioni di coomologia, in particolare la ragione della non esistenza di un embedding deriva dal fatto che la classe di coomologia modulo 2 di $\mathbb{RP}^n$, $H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$, non è somma diretta di algebre disgiunte di un certo tipo. Per il lettore interessato si consiglia l'articolo di W. S. Massey ([Ma]) e l'articolo di R. Thom ([Th, Teor.V.15]) in cui si trovano le condizioni che deve soddisfare $H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$ affinché esista l'embedding.

Osservazione 1.39. Il corrispondente di questo enunciato relativo alle immersioni e non agli embeddings, non è più valido. Per esempio $\mathbb{RP}^3$ ammette un'immersione in $\mathbb{R}^4$. Si veda Davis [Da] per lista dettagliata relativa alle immersioni di proiettivi in proiettivi .

Teorema 1.40. *Sia X una varietà differenziale di dimensione n, Y una varietà differenziabile di dimensione m ed $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione differenziale, se $n < m$ allora l'applicazione f non è suriettiva.*

Dimostrazione. Segue dal Lemma di Sard [GP, Cap.1,§7]. □

Teorema 1.41 (Teorema di Schöenflies generalizzato). *Sia $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ un embedding. Allora esiste un omeomorfismo $F : \mathbb{S}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ tale che $F(\mathbb{S}^n) = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} | x_{n+2} = 0\}$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a [Ru, p.33-34]. □

Capitolo 2

$\mathbb{RP}^n$ non sconnette $\mathbb{RP}^{n+1}$ per $n > 1$

In questo capitolo dimostreremo il Teorema 1 del quale riportiamo l'enunciato:

Teorema 1. *Sia* $\Phi : \mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$ *un embedding di* $\mathbb{RP}^n$ *in* $\mathbb{RP}^{n+1}$*, allora* $\Phi(\mathbb{RP}^n)$ *non sconnette* $\mathbb{RP}^{n+1}$ *per* $n > 1$.

Osservazione 2.1. Nel caso $n = 1$ è possibile fornire esempi di embeddings di $\mathbb{RP}^1$ in $\mathbb{RP}^2$ che sconnettono e che non sconnettono. Osserviamo che $\mathbb{RP}^1$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$ mentre $\mathbb{RP}^2$ può essere visualizzato come la sfera in cui si identificano i punti antipodali, ovvero un disco con i punti del bordo identificati. Consideriamo l'inclusione di $\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^2$ composta con $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2 : (x, y) \mapsto [x, y, 1]$, ossia l'embedding $\psi = \varphi \circ i : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ che associa ad ogni punto (x, y) della circonferenza la classe di equivalenza $[x, y, 1]$ di $\mathbb{RP}^2$. Poiché $\mathbb{S}^1$ sconnette $\mathbb{R}^2$ si ha che $\psi(\mathbb{S}^1)$ sconnette $\mathbb{RP}^2$. D'altra parte l'embedding $\zeta : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ che associa alla classe di equivalenza $[x]$ la classe di equivalenza $[x, 0]$ di $\mathbb{RP}^2$, non sconnette $\mathbb{RP}^2$.

Osservazione 2.2. Nel caso n sia pari la dimostrazione del Teorema 1 è immediata. Sia infatti $\Phi : \mathbb{RP}^{2k} \hookrightarrow \mathbb{RP}^{2k+1}$ un embedding. Supponiamo che $\mathbb{RP}^{2k+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^{2k})$ sia sconnesso, quindi esistono U_1 e U_2 aperti e disgiunti tali che

$$\mathbb{RP}^{2k+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^{2k}) = U_1 \sqcup U_2.$$

Per il Teorema 1.7 $\mathbb{RP}^{2k+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^{2k})$ è orientabile e quindi U_1 e U_2 sono orientabili e per il Teorema 1.6 anche ∂U_1 e ∂U_2 sono orientabili. D'altra parte $\partial U_1 = \partial U_2 = \mathbb{RP}^{2k}$ e dunque ∂U_1 e ∂U_2 non sono orientabili (sempre per il Teorema 1.7). Non potendo sussistere entrambe le condizioni si ha che $\mathbb{RP}^{2k}$ non disconnette $\mathbb{RP}^{2k+1}$.

Dimostrazione del Teorema 1:
Consideriamo il rivestimento universale $\pi : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{RP}^{n+1}$ di $\mathbb{RP}^{n+1}$ (vedi Esempio 1.27). Poiché la fibra di ogni punto tramite π è costituita da due punti di $\mathbb{S}^{n+1}$ si ha che il rivestimento π è a due fogli. Dato l'embedding Φ, ne risulta il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathbb{RP}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_|"'] & \mathbb{S}^{n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{RP}^n \arrow[r, hook, "\Phi"] & \mathbb{RP}^{n+1}. \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Per il Lemma 1.17 si ha che la restrizione $\pi_|$ è ancora un rivestimento. Ora, dal fatto che π sia un rivestimento a due fogli, segue che il rivestimento $\pi_|$ avrà un numero di fogli minore o uguale a due, dunque abbiamo solo due casi possibili:

- CASO 1: Il rivestimento $\pi_|$ è ad un foglio. In tal caso, si ha che per il Teorema 1.33 $\pi^{-1}(\mathbb{RP}^n)$ è esattamente uno spazio proiettivo n dimensionale. Per il Lemma 1.21 si ha che l'embedding Φ induce un embedding di $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{S}^{n+1}$. Grazie al Teorema 1.40, tale applicazione non è suriettiva e dunque se esiste un embedding di $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{S}^{n+1}$ allora lo stesso può essere visto come embedding di $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, giacché $\mathbb{S}^{n+1}$ meno un punto è diffeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1}$. Un tale embedding però non può esistere per il Teorema 1.37. Quindi questo caso non si può verificare.

- CASO 2: Il rivestimento $\pi_|$ è a due fogli. In tal caso, per il Teorema 1.33 si può avere che $\pi^{-1}(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{RP}^n \sqcup \mathbb{RP}^n$, oppure $\pi^{-1}(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{S}^n$. Se $\pi^{-1}(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{RP}^n \sqcup \mathbb{RP}^n$ poiché l'unione è disgiunta, ognuno dei proiettivi è, per il Lemma 1.21, *embedded* in $\mathbb{S}^{n+1}$ e quindi si ricade nel caso precedente. Dunque $\pi^{-1}(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{S}^n$. Consideriamo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_|"'] & \mathbb{S}^{n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{RP}^n \arrow[r, hook, "\Phi"] & \mathbb{RP}^{n+1}. \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Per capire quando $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^n)$ risulta essere uno spazio sconnesso osserviamo cosa accade nei rispettivi spazi totali. Grazie al Teorema di Schöenflies (Teorema 1.41) l'embedding di $\mathbb{S}^n$ in $\mathbb{S}^{n+1}$ sconnette $\mathbb{S}^{n+1}$, infatti $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ corrisponde all'unione disgiunta di due insiemi D_1 e D_2 entrambi omeomorfi ad una calotta sferica rispettivamente, con $\partial D_1 = \partial D_2 = \mathbb{S}^n$. Quindi $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ risulta essere sconnesso. Supponiamo quindi che $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^n)$ sia sconnesso e quindi si avrà

$$\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^n) = U_1 \sqcup U_2,$$

con U_1 e U_2 disgiunti.

Se restringiamo il rivestimento π ad una delle due componenti connesse di $\mathbb{S}^{n+1}$, diciamo $\overline{D_1}$, si ha che $\pi_{|\overline{D_1}}(\overline{D_1})$ è una componente connessa di $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^n)$ e quindi possiamo considerare $\pi_{|\overline{D_1}} : \overline{D_1} \longrightarrow U_1$ (oppure $\pi_{|\overline{D_1}} : \overline{D_1} \longrightarrow U_2$) che risulta essere ancora un rivestimento per il Lemma 1.18. Ci chiediamo quindi quanti fogli abbia tale rivestimento, e anche in questo caso le possibilità sono solamente due: $\pi_{|\overline{D_1}}$ è un rivestimento ad un foglio, oppure $\pi_{|\overline{D_1}}$ è un rivestimento a due fogli.

- Caso 1. Se il rivestimento $\pi_{|\overline{D_1}} : \overline{D_1} \longrightarrow U_1$ è ad un foglio, significa che $\pi_{|\overline{D_1}}$ è un omeomorfismo, e quindi il bordo di $\overline{D_1}$ deve essere omeomorfo al bordo di U_1. Ma il bordo di $\overline{D_1}$ è $\mathbb{S}^n$ mentre il bordo di U_1 è $\mathbb{RP}^n$ e i due risultano omeomorfi solo per $n = 1$ mentre per $n > 1$ si ha l'assurdo.
- Caso 2. Se il rivestimento $\pi_{|\overline{D_1}}$ è a due fogli allora per le osservazioni successive alla Definizione 1.28 si ha che il rivestimento è regolare. Quindi per il Teorema 1.29

$$\overline{D_1}/\Gamma \simeq U_1 \tag{2.3}$$

con $\Gamma \subset Aut(\overline{D_1})$ che agisce in modo propriamente discontinuo. Sia dunque $\gamma \in \Gamma$, allora $\gamma : \overline{D_1} \longrightarrow \overline{D_1}$ ha un punto fisso per il Teorema di Brouwer (Teorema 1.36). Inoltre se Γ agisce in modo propriamente discontinuo, allora agisce in modo libero, e quindi l'unica applicazione che fissa un punto è l'identità; ne segue quindi che $\Gamma = \{id_{\overline{D_1}}\}$ e quindi dalla (2.3):

$$\overline{D_1} \simeq U_1. \tag{2.4}$$

Come nel caso precedente, anche in questo caso, l'omeomorfismo tra i bordi è possibile solo se $n = 1$.

L'assurdo in entrambi i casi, ci porta a concludere che lo spazio $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \Phi(\mathbb{RP}^n)$ non può essere sconnesso e dunque resta dimostrato il Teorema.

Bibliografia

[Bo] Boothby, W. M, *An Introduction to Differentiable Manifold and Riemannian geometry*, Academic Press Inc., 1986.

[Da] Davis, D., *Table of immersions and embeddings of real projective spaces*, http://www.lehigh.edu/ dmd1/immtable.

[Do] Do Carmo, M. P., *Riemannian geometry*, Birkhauser Boston, 1992.

[GP] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[Ko] Kosniowski, C., *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988.

[Ma] Massey, W. S., *On the imbeddability of the real projective spaces in Euclidean Space*, Pacific J. Math, 9 (1959), 783-789.

[Ru] Rushing, T. B., *Topological Embeddings*, Academic Press Inc., 1973.

[Th] Thom, R., *Espace fibrès eu Spherés et Carrès de Steenrod*, Ann. Ecole Norm. Sup., 69(1952), 109-182.