I Complessi CW

Antonio Pio Contrò

Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2021/2022
Relatore: Prof. Andrea Loi

Introduzione

L'obiettivo di questa trattazione è quello di introdurre il lettore ad un primo studio e ad una prima conoscenza dei cosiddetti complessi di celle. Intuitivamente, un complesso di celle è uno spazio topologico costruito a partire da un insieme discreto di punti "attaccando" in successione delle n-celle chiuse di dimensione crescente, ossia spazi topologici omeomorfi ad una palla euclidea chiusa. Fra tutti i vari tipi di complessi di celle esistenti, la nostra attenzione sarà rivolta ai complessi CW. L'acronimo CW deriva dal nome inglese che l'inventore dei complessi CW John Henry Constantine Whitehead diede alle due condizioni tecniche che caratterizzano questa classe di complessi: la lettera "C" proviene da "Closure finiteness" (finitezza della chiusura), mentre la lettera "W" da "Weak topology" (topologia debole). Sarà chiaro nel Capitolo 2 il senso di questi due nomi. L'aggiunta delle condizioni CW assicurano che le proprietà topologiche del complesso siano in un certo senso determinabili interamente sulla base della struttura cellulare del complesso stesso.
L'esposizione è articolata in quattro capitoli. Nel Capitolo 1, vengono richiamati e approfonditi alcuni utili concetti di topologia generale. Nel Capitolo 2, vengono date le definizioni fondamentali come quella di complesso di celle e di complesso CW, le prime proprietà e alcuni utili esempi chiave. Nel Capitolo 3, tratteremo le principali proprietà topologiche di un complesso CW, in particolare la connessione, la connessione per archi, la compattezza e la compattezza locale. Nel Capitolo 4 si accenna ad una definizione alternativa di complesso CW, basata su un processo induttivo alquanto intuitivo, e ai complessi CW come varietà topologiche.
Benché questo non sia il luogo opportuno per farlo in modo specifico e dettagliato, vorrei dare una risposta, in merito ai complessi di celle, alla fatidica domanda che spesso si pone a chi studia matematica: «Ma quello che fai a cosa serve?». In primo luogo, all'interno della stessa topologia, i complessi di celle rivestono un ruolo molto importante nello studio delle varietà; ed è noto ai più che le varietà sono, ad oggi, oggetti fondamentali della matematica e della fisica. Inoltre, alcuni tipi di complessi di celle, detti complessi

simpliciali (che noi non tratteremo), sono fondamentali nella modellizzazione del sistema nervoso umano e nello studio volto alla cura di alcune malattie neurodegenerative. Insomma, le frontiere della matematica contemporanea sono veramente vastissime.

Vorrei concludere quest'introduzione ringraziando tutta la mia famiglia, i miei colleghi Giuseppe e Matteo, tutti i docenti del Corso di Laurea triennale in Matematica dell'Università di Cagliari (in particolare, il mio relatore prof. Andrea Loi e il prof. Stefano Bonzio) e con una riflessione del tutto personale riguardante il senso della domanda «Ma quello che fai a cosa serve?» nel momento in cui essa viene posta ad un matematico. L'aspetto applicativo della matematica è fondamentale; tutto ciò che ci circonda, volendo, è matematica. Tuttavia vorrei porre l'accento su una questione altrettanto importante. La bellezza e l'eleganza di moltissimi argomenti della matematica, per quanto poco abbia potuto vedere in questi tre anni, li rendono solidissimi di fronte ad una prima e apparente inutilità pratica. Ridurre, confinare lo studio della matematica ad una mera ricerca della soluzione di alcuni problemi reali vuol dire vìolare, tradire gli stessi concetti filosofici di bellezza, eleganza ed estetica. Tutto ciò che è astratto, bello ed elegante possiede un interesse e un fascino che, a mio modesto parere, trascendono e sono indipendenti da qualunque applicazione pratica e reale.

Indice

Capitolo 1

Richiami e approfondimenti di topologia

In questo capitolo rivediamo velocemente e introduciamo da capo alcune nozioni (che ci torneranno utili più avanti) di topologia generale. Il lettore dovrà comunque avere una certa familiarità con alcuni concetti fondamentali, quali quelli di:

- spazio topologico, interno, esterno, frontiera, derivato e chiusura;
- base di uno spazio topologico;
- continuità, omeomorfismo, applicazione aperta e chiusa.

Inoltre, benché quelle fondamentali siano riprese in questo capitolo, è opportuna la conoscenza delle principali proprietà topologiche (di numerabilità, di separazione, connessione e compattezza). Rimandiamo il lettore interessato ad un ripasso di questi argomenti a [1].
Quando in questa trattazione faremo riferimento a $\mathbb{R}^n$, lo intenderemo sempre come spazio topologico in cui la topologia è quella euclidea.

Notazione. Se X è uno spazio topologico e $A \subseteq X$, indicheremo rispettivamente con $IntA, \partial A,$ e $\overline{A}$ l'interno, la frontiera e la chiusura (o aderenza) di A.

1.1 Una caratterizzazione delle funzioni continue e chiuse

Proposizione 1.1.1. *Siano X e Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione. Allora:*

(i) f è continua se e solo se $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ $\forall A \subseteq X$;
(ii) f è chiusa se e solo se $f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$ $\forall A \subseteq X$.

Dimostrazione. (i) "$\Rightarrow$" Supponiamo che f sia continua. Sia $A \subseteq X$ e consideriamo $f(A)$; per definizione di chiusura si ha $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, quindi $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Poiché $\overline{f(A)}$ è un chiuso di Y, per continuità di f $f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso di X, il quale contiene A; ma $\overline{A}$ è il più piccolo chiuso di X che contiene A, ergo $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ da cui segue $f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$, ossia $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ $\forall A \subseteq X$. Sia C un chiuso di Y; allora $C = \overline{C}$ e perciò da $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ segue che C è un chiuso di Y contenente $f(f^{-1}(C))$, quindi $\overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq C$. Dall'ipotesi, $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq C$ quindi $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C)})) \subseteq f^{-1}(C)$. Segue che $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$: perciò $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$ quindi $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X. Pertanto f è continua.
(ii) "$\Rightarrow$" Supponiamo che f sia un'applicazione chiusa. Sia $A \subseteq X$; allora $A \subseteq \overline{A}$ e quindi $f(A) \subseteq f(\overline{A})$. Poiché $\overline{A}$ è chiuso in X, per ipotesi $f(\overline{A})$ è un chiuso di Y. Perciò $f(\overline{A})$ è un chiuso di Y contenente $f(A)$. Dalla definizione di chiusura $f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che $f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$ $\forall A \subseteq X$. Sia C un chiuso di X; allora per ipotesi $\overline{f(C)} \subseteq f(\overline{C}) = f(C)$, poiché $C = \overline{C}$ in quanto C è un chiuso di X. Pertanto $\overline{f(C)} \subseteq f(C)$, da cui segue $\overline{f(C)} = f(C)$. Perciò $f(C)$ è un chiuso di Y e f è un'applicazione chiusa. □

1.2 Topologie coerenti e famiglie localmente finite

In questa sezione ci occuperemo di introdurre la definizione di topologia coerente e di famiglia localmente finita.

Sia X uno spazio topologico. Dato $x \in X$, diremo d'ora in avanti che U è un intorno di x in X (o più semplicemente un intorno di x) se U è un aperto di X con $x \in U$. Sceglieremo di adottare questa convenzione nonostante in molta della letteratura un intorno di x sia definito come un sottoinsieme $U \subseteq X$ il quale contiene un aperto di X che contiene x. Inoltre, con sottospazio di X intenderemo un sottoinsieme di X munito della topologia indotta da quella del suo ambiente X. Notiamo che se $S \subseteq X, T \subseteq X$ e $S \subseteq T$, allora dalla definizione di topologia indotta la topologia indotta da X su S coincide con la topologia indotta da T su S, dove la topologia su T è quella indotta da X.

Definizione 1.2.1. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di sottospazi di X che lo ricoprono, nel senso che $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$. Si dice che la topologia di X è coerente con $\mathcal{B}$ se un sottoinsieme $U \subseteq X$ è aperto in X se e solo se $U \cap B_\alpha$ è aperto in B_α $\forall \alpha \in A$.*

Equivalentemente, passando ai complementari, la topologia su X è coerente con $\mathcal{B}$ se un sottoinsieme $C \subseteq X$ è chiuso in X se e solo se $C \cap B_\alpha$ è chiuso in B_α $\forall \alpha \in A$.

Osservazione 1.2.2. Osserviamo che nella Definizione 1.2.1 se $U \subseteq X$ è aperto in X (rispettivamente, se $C \subseteq X$ è chiuso in X), allora $U \cap B_\alpha$ è sempre aperto in B_α (rispettivamente, $C \cap B_\alpha$ è chiuso in B_α) $\forall \alpha \in A$, per com'è definita la topologia indotta. Quindi la vera novità introdotta dalla Definizione 1.2.1 riguarda il fatto "opposto", cioè se $U \cap B_\alpha$ è aperto in B_α (rispettivamente, se $C \cap B_\alpha$ è chiuso in B_α) $\forall \alpha \in A$, allora U è aperto in X (rispettivamente, C è chiuso in X).

Osservazione 1.2.3. Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora la topologia di X è coerente con $\mathcal{U}$. Supponiamo che $V \subseteq X$ sia tale che $V \cap U_i$ sia un aperto di U_i $\forall i \in I$; sicché U_i è un aperto di X $\forall i \in I$ segue che $V \cap U_i$ è un aperto di X $\forall i \in I$. Allora $V = V \cap X = V \cap \bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcup\limits_{i \in I} (V \cap U_i) \Rightarrow V = \bigcup\limits_{i \in I} (V \cap U_i)$, ossia V è unione di aperti di X quindi esso stesso un aperto di X.

Una proprietà notevole delle topologie coerenti è la seguente.

Proposizione 1.2.4. *Sia X uno spazio topologico e supponiamo che la topologia di X sia coerente con una famiglia $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di sottospazi di X. Allora, se Y è un qualunque altro spazio topologico, un'applicazione $f : X \to Y$ è continua se e solo se $f_{|B_\alpha}$ è continua $\forall \alpha \in A$.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Se $f : X \to Y$ è continua, allora ovviamente $f_{|B_\alpha}$ è continua $\forall \alpha \in A$, essendo B_α un sottospazio di X.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che $f_{|B_\alpha}$ sia continua $\forall \alpha \in A$. Sia V un aperto di Y; dimostriamo che $f^{-1}(V)$ è aperto in X. Per farlo, utilizziamo il fatto che la topologia di X è coerente con $\mathcal{B}$. Infatti $\forall \alpha \in A$ $f^{-1}(V) \cap B_\alpha = f^{-1}_{|B_\alpha}(V)$; ma ora $f^{-1}_{|B_\alpha}(V)$ è aperto in B_α $\forall \alpha \in A$ in virtù dell'ipotesi di continuità di $f_{|B_\alpha}$, ergo $f^{-1}(V) \cap B_\alpha$ è aperto in B_α $\forall \alpha \in A \Rightarrow f^{-1}(V)$ è aperto in X. $\square$

Definizione 1.2.5. *Sia X uno spazio topologico. Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice localmente finita se ogni punto di X possiede un intorno il quale interseca al più un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$.*

Osservazione 1.2.6. Sia X uno spazio topologico. Allora una famiglia finita di sottoinsiemi di X è sempre, banalmente, localmente finita.

Lemma 1.2.7. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora $\mathcal{A}$ è localmente finita se e solo se la famiglia $\overline{\mathcal{A}} :=$ $= \left\{ \overline{A} : A \in \mathcal{A} \right\}$ è localmente finita.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia localmente finita. Sia $x \in X$ e sia U un intorno di x che interseca al più un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$, siano essi $A_1, \ldots, A_n$. Consideriamo ora un punto p tale che $p \in U \cap \overline{A}$ per qualche $A \in \mathcal{A}$. Poiché U è un intorno di p e p è di chiusura per A, per la caratterizzazione della chiusura tale intorno U dovrà contenere pure elementi di A. Sicché U interseca al più $A_1, \ldots, A_n$, segue che A deve coincidere con uno dei sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_n$. Questo dimostra che lo stesso intorno di x U interseca al più un numero finito di elementi di $\overline{\mathcal{A}}$, ossia $\overline{\mathcal{A}}$ è localmente finita.
"$\Leftarrow$" Se $\overline{\mathcal{A}}$ è localmente finita, allora ovviamente lo sarà pure $\mathcal{A}$: basta infatti considerare per ogni punto il medesimo intorno già esistente per $\overline{\mathcal{A}}$. □

1.3 Varietà e varietà con bordo

Qui richiamiamo brevemente la definizione di varietà topologica e trattiamo le varietà con bordo. In seguito avremo a che fare con alcuni spazi che saranno varietà o varietà con bordo, quindi potrebbe essere utile tenere a mente le loro proprietà.

Definizione 1.3.1. *Uno spazio topologico X è detto uno spazio di Hausdorff se per ogni coppia di punti distinti di X $x, y \in X, x \neq y$ esistono un intorno U di x e un intorno V di y tali che $U \cap V = \emptyset$.*

Definizione 1.3.2. *Uno spazio topologico X è detto secondo numerabile (N_2) se esso ammette una base al più numerabile per la sua topologia.*

Definizione 1.3.3. *Uno spazio topologico X è detto localmente euclideo di dimensione n se ogni suo punto ammette un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.*

Di seguito due risultati sugli spazi N_2 e su quelli localmente euclidei.

Proposizione 1.3.4. *Sia X uno spazio topologico secondo numerabile. Allora ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base al più numerabile di X, e sia $\mathcal{U}$ un qualunque ricoprimento aperto di X. Definiamo la sottofamiglia $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ nel seguente modo: $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} : \exists\, U \in \mathcal{U} \,|B \subseteq U\}$. Poiche $\mathcal{B}$ è al più numerabile e $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, anche $\mathcal{B}'$ è al più numerabile. Ora, dalla definizione di $\mathcal{B}'$, per ogni elemento $B \in \mathcal{B}'$ si scelga un elemento $U_B \in \mathcal{U}$ tale che $B \subseteq U_B$. Allora la sottofamiglia $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ data da $\mathcal{U}' := \{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ è al più numerabile poiché $\mathcal{B}'$ è al più numerabile. Se dimostriamo che $\mathcal{U}'$ ricopre X, allora quest'ultimo sarà il sottoricoprimento al più numerabile di $\mathcal{U}$ ricercato. Sia $x \in X$; sicché $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X, $x \in U$ per qualche $U \in \mathcal{U}$. Ma $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X, quindi U è aperto; dalla definizione equivalente di base esiste quindi $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$. Per definizione di $\mathcal{B}'$, $B \in \mathcal{B}'$ e pertanto $x \in B \subseteq U_B \Rightarrow x \in U_B$. Segue che $\mathcal{U}'$ ricopre ancora X. □

Proposizione 1.3.5. *Uno spazio topologico X è localmente euclideo di dimensione n se e solo se vale una delle seguenti affermazioni:*
(i) ogni punto di X ammette un intorno omeomorfo ad una palla aperta di $\mathbb{R}^n$;
(ii) ogni punto di X ammette un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo risultato si rimanda a [1]. □

Osservazione 1.3.6. Il punto (ii) della Proposizione 1.3.5 fornisce un maggior senso (rispetto a quello che gli si può dare inizialmente) alla definizione di spazio localmente euclideo quando $n = 0$. Infatti, poiché $\mathbb{R}^0$ è uno spazio formato da un singolo punto, dal punto (ii) della Proposizione 1.3.5 uno spazio topologico X è localmente euclideo di dimensione 0 se e solo se ogni suo punto ammette un intorno omeomorfo ad uno spazio costituito da un solo punto; in altre parole, se e solo se X è uno spazio discreto (ossia, se la topologia su X è la topologia discreta).

Definizione 1.3.7. *Sia X uno spazio topologico localmente euclideo di dimensione n. Se $U \subseteq X$ è un aperto di X omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, diremo che U è un dominio coordinato. Un qualunque omeomorfismo φ da U ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ è detto una mappa coordinata, e la coppia (U, φ) prende il nome di carta locale. Un dominio coordinato omeomorfo ad una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ è detto anche palla coordinata. Se $x \in X$ e U è un dominio coordinato tale che $x \in U$, allora U si dirà un intorno coordinato o euclideo di x.*

Vale la pena richiamare la dimostrazione della seguente proposizione.

Proposizione 1.3.8. *Sia X uno spazio topologico localmente euclideo di dimensione n. Se $V \subseteq X$ è un aperto di X, allora anche V (con la topologia indotta da quella di X) è localmente euclideo di dimensione n.*

Dimostrazione. Sia $x \in V \subseteq X$. Consideriamo U un intorno di x in X omeomorfo ad un aperto U' di $\mathbb{R}^n$, e sia $\varphi : U \to U'$ l'omeomorfismo fra U e U'. Ora, $U \cap V$ è per definizione sia un intorno di x in V che un aperto di U (infatti, sia U che V sono aperti in X). Inoltre, $\varphi_{|U \cap V} : U \cap V \to \varphi(U \cap V)$ definisce un omeomorfismo fra $U \cap V$ e $\varphi(U \cap V)$. Ma $U \cap V$ è un aperto di U; quindi, essendo φ un omeomorfismo ergo un'applicazione aperta, $\varphi(U \cap V)$ è un aperto di U', perciò un aperto di $\mathbb{R}^n$ in quanto U' è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Per l'arbitrarietà di $x \in V$, V è localmente euclideo di dimensione n. □

Definizione 1.3.9. *Una varietà topologica di dimensione n (o n-dimensionale) è uno spazio topologico X soddisfacente le tre seguenti proprietà:*
(i) X è di Hausdorff;
(ii) X è secondo numerabile;
(iii) X è localmente euclideo di dimensione n.

D'ora in avanti, ci riferiremo alle varietà topologiche n-dimensionali con le locuzioni "varietà n-dimensionale", "n-varietà" oppure semplicemente "varietà" qualora la dimensione sia chiara dal contesto o ininfluente.

Proposizione 1.3.10. *Sia X una varietà topologica di dimensione n. Se $V \subseteq X$ è un aperto di X, allora V (munito della topologia indotta da quella di X) è anch'esso una varietà topologica di dimensione n.*

Dimostrazione. V eredita da X il fatto di essere di Hausdorff e secondo numerabile (vedi [1] per le proprietà topologiche ereditarie). Inoltre, dalla Proposizione 1.3.8, è anche localmente euclideo di dimensione n. Pertanto è una varietà topologica di dimensione n. □

Esempio 1.3.11. Gli esempi di varietà topologica sono innumerevoli e non è scopo di questa trattazione richiamarli. Si rimanda ad [1] il lettore interessato su quest'argomento. Gli esempi principe di varietà sono $\mathbb{R}^n$, i suoi aperti come le palle aperte e la sfera unitaria $\mathbb{S}^n$.

Un teorema molto importante sulle varietà, che utilizzeremo più avanti ma la cui dimostrazione esula dagli obiettivi del nostro discorso, è il seguente.

Teorema 1.3.12. ***(Teorema di Invarianza Topologica della Dimensione)*** *Se $m \neq n$, uno spazio topologico $X \neq \emptyset$ non può essere contemporaneamente una m-varietà e una n-varietà.*

Osservazione 1.3.13. Il teorema è enunciato esclusivamente per spazi topologici non vuoti. Effettivamente, è immediato osservare che il vuoto $\emptyset$ soddisfa la definizione di n-varietà qualunque sia $n \in \mathbb{N}$.

È intuitivamente evidente che alcune tipologie di spazi, come ad esempio una palla chiusa euclidea, non soddisfano la definizione di varietà topologica (nel caso della palla chiusa euclidea i punti della sua frontiera non possiedono un intorno euclideo). È di vitale importanza, per il ruolo che svolgono alcuni di questi spazi nella teoria delle varietà, allargare in un certo senso la nozione di varietà, ammettendo l'esistenza di una sorta di "bordo" per tali spazi. Partiamo con una notazione. Indicheremo il semispazio superiore chiuso di $\mathbb{R}^n$ con

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

e denotiamo con

$$Int\ \mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$
$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

il suo interno e la sua frontiera rispettivamente.

Definizione 1.3.14. *Una varietà con bordo di dimensione n o n-dimensionale è uno spazio topologico X soddisfacente le tre seguenti proprietà:*
(i) X è di Hausdorff;
(ii) X è secondo numerabile;
(iii) $\forall x \in X$ esiste un intorno di x omeomorfo o ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ o ad un aperto del semispazio superiore chiuso $\mathbb{H}^n$.

Osservazione 1.3.15. Notiamo subito che se $n = 0$ allora $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0$ (entrambi sono spazi formati da un solo punto), e quindi le varietà con bordo 0-dimensionali non sono distinte dalle varietà topologiche 0-dimensionali.

Chiameremo una varietà con bordo di dimensione n una "n-varietà con bordo".

Definizione 1.3.16. *Sia X una n-varietà con bordo. Se $U \subseteq X$ è un aperto di X omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{H}^n$, esso è detto dominio coordinato. L'omeomorfismo φ di cui sopra dicesi mappa coordinata; la coppia (U, φ) è detta una carta locale per X.*

Definizione 1.3.17. *Sia X una n-varietà con bordo. Una carta locale (U, φ) per X è detta una carta interna se $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ (situazione che include il caso in cui $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{H}^n$ interamente contenuto in $Int\ \mathbb{H}^n$, essendo quest'ultimo un aperto di $\mathbb{R}^n$). Una carta locale (U, φ) per X è detta una carta di bordo se $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{H}^n$ tale che $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$.*

Esempio 1.3.18. Gli esempi più espliciti di n-varietà con bordo sono dati dal semispazio superiore chiuso $\mathbb{H}^n$ e dalle palle chiuse euclidee.

Definizione 1.3.19. *Sia X una n-varietà con bordo. Un punto $p \in X$ è detto un punto interno di X se esso appartiene al dominio di una carta interna; è invece chiamato un punto del bordo di X se esso appartiene al dominio di una carta di bordo la quale porta p in $\partial \mathbb{H}^n$. Denotiamo con $Int\ X$ l'insieme di tutti i punti interni di X, detto l'interno di X; denotiamo invece con ∂X l'insieme dei punti del bordo di X, detto il bordo di X.*

Osserviamo che se X è una n varietà con bordo, allora ogni suo punto $x \in X$ è un punto interno o un punto del bordo di X. Infatti, se $x \in X$ è nel dominio di una carta interna, allora è un punto interno; se invece è nel dominio di una carta di bordo, allora esso è un punto interno se la sua immagine appartiene a $Int\ \mathbb{H}^n$, mentre è un punto del bordo se la sua immagine appartiene a $\partial \mathbb{H}^n$.

Osservazione 1.3.20. Sia X una n-varietà con bordo. È doveroso rimarcare il fatto che le nuove nozioni di interno e di bordo di X nulla hanno a che vedere (almeno a priori) con i loro omonimi topologici (interno e frontiera) nel caso in cui X risulti essere un sottoinsieme di uno spazio topologico ambiente.

Osservazione 1.3.21. Poiché niente nella definizione vieta che il bordo sia vuoto, una varietà con bordo potrebbe anche avere bordo vuoto. Ad esempio, basti pensare al fatto che una varietà topologica è automaticamente una varietà con bordo in cui tutti i punti risultano interni. Per rimarcare ulteriormente la differenza fra varietà e varietà con bordo, useremo le seguenti convenzioni. Per varietà senza bordo si intende una varietà topologica; le varietà con bordo saranno invece sempre chiamate "varietà con bordo". Se scriveremo esclusivamente "varietà" senza ulteriori specificazioni, allora ci staremo riferendo ad una varietà topologica, ossia ad una varietà senza bordo.

Proposizione 1.3.22. *Sia X una n-varietà con bordo. Allora $Int\ X$ è un aperto di X. Inoltre, $Int\ X$ è una n-varietà senza bordo (con la topologia indotta da quella di X).*

Dimostrazione. Sia $x \in Int\ X$. Allora x sta nel dominio di una carta interna, ossia esiste un aperto U di X omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ e tale che $x \in U$. In particolare, per definizione di punto interno, tutti i punti di U sono punti interni di X, in quanto giacciono nel dominio di una carta interna: quindi $x \in U \subseteq Int\ X$. Dall'arbitrarietà di x, $Int\ X$ è aperto in X.
Un ragionamento analogo a quello condotto sopra ci permette di asserire che $Int\ X$ è localmente euclideo di dimensione n. Infatti se $x \in Int\ X$ allora esisterà un aperto U di X omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ e con $x \in U \subseteq Int\ X$; sicché U è aperto in X e incluso in $Int\ X$, sarà aperto pure in $Int\ X$

e quindi $Int\ X$ risulta localmente euclideo di dimensione n per arbitrarietà di x. Inoltre $Int\ X$ eredita da X il fatto di essere di Hausdorff e secondo numerabile. La tesi segue. $\square$

Anche per le varietà con bordo esiste un teorema molto importante la cui dimostrazione rimandiamo a [2].

Teorema 1.3.23. ***(Teorema di Invarianza del Bordo)*** *Sia X una n-varietà con bordo. Allora un punto $x \in X$ non può essere contemporaneamente un punto interno e un punto del bordo di X. In particolare, $Int\ X$ e ∂X sono due sottoinsiemi disgiunti di X tali che $X = Int\ X \cup \partial X$.*

Corollario 1.3.24. *Sia $X \neq \emptyset$ una n-varietà con bordo. Allora ∂X è un chiuso di X. Inoltre, X è una n-varietà topologica se e solo se $\partial X = \emptyset$.*

Dimostrazione. Dal Teorema di invarianza del bordo, si ha che $\partial X = X \setminus Int\ X$. Per la Proposizione 1.3.22 $Int\ X$ è un aperto di X, così ∂X è chiuso in X.
"$\Rightarrow$" Se X è una n-varietà topologica, allora ogni punto di X è interno e quindi $X = Int\ X$; dal Teorema di invarianza del bordo segue che $\partial X = \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Se $\partial X = \emptyset$, allora dal Teorema di invarianza del bordo $X = Int\ X$; ma dalla Proposizione 1.3.22 $Int\ X$ è una varietà topologica di dimensione n, e così lo sarà pure X. $\square$

1.4 L'Unione Disgiunta

Questa sezione è dedicata interamente all'unione disgiunta di spazi.

Definizione 1.4.1. *Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia indicizzata di insiemi non vuoti. Si definisce l'unione disgiunta della famiglia indicizzata, denotata con $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, l'insieme $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \{(x, \alpha) : \alpha \in A, x \in X_\alpha\}$.*

Notazione. Se l'insieme degli indici è finito, di solito l'unione disgiunta si indica con $X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$.

Osservazione 1.4.2. $\forall \alpha \in A$ esiste un'applicazione alquanto naturale, detta immersione canonica di X_α nell'unione disgiunta, definita da
$i_\alpha : X_\alpha \to \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha \quad i_\alpha(x) := (x, \alpha)\ \forall x \in X_\alpha$. L'immagine di X_α tramite l'immersione canonica i_α è l'insieme $X_\alpha^* := \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha\}$, il quale è senz'altro in biezione con X_α essendo i_α iniettiva per sua definizione. Così, possiamo pensare a X_α^* come ad una "fotocopia" di X_α all'interno dell'unione disgiunta; nella pratica, con abuso di notazione, ignoreremo per i motivi di cui sopra la

differenza esistente fra X_α e X_α^*, in modo tale da pensare a X_α direttamente come ad un sottoinsieme dell'unione disgiunta e all'immersione canonica i_α come ad un'inclusione. Con la scelta di tale convenzione, fra l'altro, salviamo l'idea pregressa che abbiamo di unione disgiunta: infatti, per definizione, se $\alpha \neq \beta$ allora i due sottoinsiemi di $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ X_α^* e X_β^* sono disgiunti nel senso usuale del termine, cioè $X_\alpha^* \cap X_\beta^* = \emptyset$, e in più $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha^*$.

Fatte tali dovute premesse riguardanti la definizione di unione disgiunta e di uso della notazione, veniamo alla topologia. Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia indicizzata di spazi topologici non vuoti. Definiamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi dell'unione disgiunta:
$\mathcal{T} = \left\{ U \subseteq \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha : U \cap X_\alpha \textit{ aperto in } X_\alpha \ \forall \alpha \in A \right\}$ (ricordiamo che X_α è inteso anche come sottoinsieme dell'unione disgiunta). Il lettore potrà facilmente convincersi che $\mathcal{T}$ definisce una topologia sull'unione disgiunta $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, detta la topologia unione disgiunta. Lo spazio topologico risultante è detto lo spazio unione disgiunta.

Osservazione 1.4.3. Osserviamo che lo spazio topologico X_α con la sua propria topologia risulta essere un sottospazio dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$. Infatti, se U è un aperto di X_α, allora $U \cap X_\alpha = U$ (aperto in X_α) mentre $U \cap X_\beta = \emptyset$ (aperto in X_β) se $\beta \neq \alpha$: ergo U è un aperto di $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ incluso in X_α, cioè un aperto della topologia indotta su X_α dalla topologia unione disgiunta. Viceversa, se U è un aperto della topologia indotta su X_α dalla topologia unione disgiunta, allora $U = V \cap X_\alpha$ con V aperto di $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$; ma quindi, per definizione di topologia unione disgiunta, U risulterà aperto in X_α con la sua topologia iniziale.
In particolare, dal discorso precedente si evince il seguente fatto: la topologia unione disgiunta è per definizione una topologia su $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ coerente con la famiglia di sottospazi $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Questo ci permette di dimostrare immediatamente il seguente importante teorema.

Teorema 1.4.4. ***(La Proprietà Universale della Topologia Unione Disgiunta)*** *Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia indicizzata di spazi topologici non vuoti e sia Y un qualunque spazio topologico. Allora un'applicazione $f : \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \to Y$ è continua se e solo se la sua restrizione ad ogni X_α è una funzione continua $\forall \alpha \in A$.*

Dimostrazione. Segue osservando, come detto in precedenza, che la topologia unione disgiunta è coerente con la famiglia di sottospazi $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e applicando così la Proposizione 1.2.4. $\square$

Proposizione 1.4.5. *Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia indicizzata di spazi topologici non vuoti. Allora valgono le seguenti:*
(i) $C \subseteq \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ è chiuso nell'unione disgiunta se e solo se $C \cap X_\alpha$ è chiuso in X_α $\forall\alpha \in A$;
(ii) $\forall\alpha \in A$ l'immersione canonica $i_\alpha : X_\alpha \to \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ è un'applicazione aperta e chiusa. In particolare, è un embedding topologico;
(iii) Se $\forall\alpha \in A$ X_α è di Hausdorff, allora lo è pure $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$;
(iv) Se $\forall\alpha \in A$ X_α è secondo numerabile e l'insieme degli indici A è al più numerabile, allora lo è pure $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Dimostrazione. (i) "$\Rightarrow$" Sia C un chiuso dell'unione disgiunta. Allora $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus C$ è aperto, ossia $\left(\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus C\right) \cap X_\beta$ è aperto in X_β $\forall\beta \in A$. Ma $\left(\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus C\right) \cap X_\beta = X_\beta \setminus (C \cap X_\beta)$; essendo quest'ultimo aperto in X_β $\forall\beta \in A$, segue che $C \cap X_\beta$ è chiuso in X_β $\forall\beta \in A$.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che $C \cap X_\alpha$ sia chiuso in X_α $\forall\alpha \in A$. Allora $\forall\beta \in A$ $X_\beta \setminus C \cap X_\beta = \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus C\right) \cap X_\beta$ è aperto in X_β, ossia per definizione $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus C$ è aperto in $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \Rightarrow C$ chiuso in $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$.
(ii) Sia $\alpha \in A$ e sia U un aperto di X_α. Allora $i_\alpha(U) = U$ e quindi $i_\alpha(U) \cap X_\alpha = U$, $i_\alpha(U) \cap X_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$; perciò $i_\alpha(U)$ è aperto in $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ e i_α è un'applicazione aperta. Allo stesso identico modo, sfruttando il punto (i), si perviene al fatto che i_α è pure chiusa. Essa è iniettiva per definizione e inoltre continua (risulta sostanzialmente un'inclusione), quindi essendo continua, iniettiva e aperta (oppure chiusa, il che è lo stesso) risulta un embedding topologico.
(iii) Siano $(x,\alpha) \neq (y,\beta)$ due punti distinti di $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$. Allora si possono presentare due eventualità: $\alpha = \beta$ oppure $\alpha \neq \beta$. Supponiamo che $\alpha = \beta$. Allora, se $(x,\alpha) \neq (y,\beta)$, deve risultare necessariamente $x \neq y$. Ma $X_\alpha = X_\beta$ è di Hausdorff, così esistono due intorni U e V di x e y rispettivamente in X_α tali che $U \cap V = \emptyset$. Poiché dal punto (ii) l'immersione canonica i_α è aperta, U e V sono pure due intorni di (x,α) e (y,α) rispettivamente in $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ tali

che $U \cap V = \emptyset$. Se invece $\alpha \neq \beta$, è immediato che X_α e X_β stessi sono due intorni disgiunti di (x, α) e (y, β) rispettivamente in $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Pertanto $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ è di Hausdorff.
(iv) Sia $\mathcal{B}_\alpha$ una base al più numerabile di X_α $\forall \alpha \in A$. Definiamo la famiglia di sottoinsiemi di $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ data da $\mathcal{B} := \{B_\alpha : B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Allora $\mathcal{B}$ è al più numerabile in quanto $\mathcal{B}_\alpha$ è al più numerabile $\forall \alpha \in A$ e l'insieme degli indici A è al più numerabile. Inoltre, per il punto (ii), $\mathcal{B}$ è costituita da aperti dell'unione disgiunta (l'immersione canonica è un'applicazione aperta). Ci resta da dimostrare che $\mathcal{B}$ è effettivamente una base per $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Sia U un aperto di $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, ossia $U \cap X_\alpha$ è aperto in X_α $\forall \alpha \in A$. Sia $(x, \alpha) \in U$, ossia $(x, \alpha) \in U \cap X_\alpha$; sicché $U \cap X_\alpha$ è un aperto di X_α e $\mathcal{B}_\alpha$ è una base per X_α, esisterà $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ tale che $(x, \alpha) \in B_\alpha \subseteq U \cap X_\alpha \subseteq U$. Ergo $\mathcal{B}$ è una base per $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. □

1.5 Brevi richiami sulla topologia quoziente

La presente sezione è dedicata ad un breve richiamo sulla topologia quoziente accompagnato dalla dimostrazione di alcuni risultati utili. Ricordiamo che dato X uno spazio topologico, Y un insieme e $q : X \to Y$ una funzione suriettiva, è possibile definire una topologia su Y dichiarando la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di Y: $V \subseteq Y$ è un elemento di $\mathcal{T}$ se e solo se $q^{-1}(V)$ è aperto in X. Tale topologia su Y è detta la topologia quoziente relativa a q; con tale topologia, lo spazio topologico Y è detto uno spazio quoziente di X. Se X e Y sono due spazi topologici, un'applicazione suriettiva $q : X \to Y$ è detta un'identificazione se la topologia su Y coincide con la topologia quoziente relativa a q. Sono dati come prerequisiti i criteri per stabilire quando un'applicazione fra due spazi topologici è un'identificazione. Si osservi che, in ogni caso, dalla definizione di topologia quoziente segue immediatamente che ogni identificazione è una funzione continua.
Rimembrate velocemente la definizione di topologia quoziente e di identificazione, dimostriamo dei "nuovi" fatti.

Lemma 1.5.1. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora:*
(i) se $\mathcal{B}_i$ è una base di U_i (con la topologia indotta) $\forall i \in I$, $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ è una base di X;
(ii) se $\mathcal{U}$ è al più numerabile e U_i è secondo numerabile $\forall i \in I$, allora X è secondo numerabile.

Dimostrazione. (i) In primo luogo, poiché U_i è un aperto di X $\forall i \in I$, gli elementi di $\mathcal{B}_i$ sono aperti di un aperto di X e quindi aperti di X loro stessi: perciò $\mathcal{B}$ è una famiglia di aperti di X. Sia ora U un aperto di X e sia $x \in U$. Sicché $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X, si avrà $x \in U_i$ per qualche $i \in I$, e perciò $x \in U \cap U_i$. Ma essendo U un aperto di X, $U \cap U_i$ è un aperto di U_i con $x \in U \cap U_i$; così per definizione di base, in quanto $\mathcal{B}_i$ è una base di U_i, esiste $B_i \in \mathcal{B}_i$ tale che $x \in B_i \subseteq U \cap U_i \subseteq U \Rightarrow x \in B_i \subseteq U$. In particolare, poiché $B_i \in \mathcal{B}_i$, $B_i \in \mathcal{B}$ e quindi la tesi segue per la definizione equivalente di base.
(ii) Segue immediatamente dalla (i) scegliendo (in virtù dell'ipotesi) una base al più numerabile di U_i $\forall i \in I$. □

Proposizione 1.5.2. *Sia X uno spazio topologico secondo numerabile e sia Y uno spazio quoziente di X, con $q : X \to Y$ relativa identificazione. Se Y è localmente euclideo, allora esso è secondo numerabile. In particolare, se Y è localmente euclideo e di Hausdorff, allora è una varietà topologica.*

Dimostrazione. Poiché Y è localmente euclideo, è possibile determinare un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ costituito da palle coordinate. Allora, ovviamente, la famiglia $\{q^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ è un ricoprimento aperto di X; ma X è secondo numerabile, quindi dalla Proposizione 1.3.4 è possibile estrarre da $\{q^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ un sottoricoprimento al più numerabile. Sia quindi $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ una sottofamiglia al più numerabile tale che $\{q^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}'\}$ è ancora un ricoprimento di X. Allora $\mathcal{U}'$ è un ricoprimento aperto di Y costituito da palle coordinate e al più numerabile. Infatti, dato $y \in Y$, per suriettività di q esiste $x \in X$ con $q(x) = y$; ma $\{q^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}'\}$ è un ricoprimento di X, quindi esiste $U \in \mathcal{U}'$ tale che $x \in q^{-1}(U)$ e conseguentemente $y = q(x) \in U$. Sicché una palla coordinata è omeomorfa ad una palla aperta di $\mathbb{R}^n$, essa è secondo numerabile; perciò abbiamo un ricoprimento aperto di Y al più numerabile costituito da sottospazi N_2. Dal punto (ii) del Lemma 1.5.1 segue che Y è secondo numerabile. □

Proposizione 1.5.3. ***(Identificazioni e Unione Disgiunta)***
(i) Sia $\{q_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia indicizzata di identificazioni. Allora l'applicazione $q : \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha \to \coprod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ la cui restrizione a X_α coincide con q_α $\forall \alpha \in A$ è un'identificazione.
(ii) Sia X uno spazio topologico e supponiamo che $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sia una famiglia di sottospazi di X tali che la topologia di X sia coerente con $\mathcal{B}$. Allora l'applicazione $q : \coprod_{\alpha \in A} B_\alpha \to X$ la cui restrizione ad ogni B_α coincide con l'inclusione $i_\alpha : B_\alpha \hookrightarrow X$ è un'identificazione.

Dimostrazione. (i) In primo luogo, l'applicazione q è suriettiva per costruzione, essendo q_α suriettiva $\forall \alpha \in A$. In secondo luogo, q è continua per la proprietà universale dell'unione disgiunta, in quanto la restrizione di q ad ogni X_α coincide con q_α e quest'ultima è continua essendo un'identificazione. Per concludere, ci resta quindi da provare che $V \subseteq \bigsqcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ è aperto se e solo se lo è $q^{-1}(V)$ in $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Essendo q continua, se V è aperto in $\bigsqcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ allora $q^{-1}(V)$ è aperto in $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Viceversa, supponiamo che $q^{-1}(V)$ sia aperto in $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, ossia che $q^{-1}(V) \cap X_\alpha$ sia aperto in X_α $\forall \alpha \in A$. Ma $\forall \alpha \in A$ $q^{-1}(V) \cap X_\alpha = q^{-1}(V) \cap q_\alpha^{-1}(Y_\alpha) = q_\alpha^{-1}(V \cap Y_\alpha)$, quindi $q_\alpha^{-1}(V \cap Y_\alpha)$ è aperto in X_α $\forall \alpha \in A$. Poiché $\forall \alpha \in A$ q_α è un'identificazione, segue che $V \cap Y_\alpha$ è un aperto di Y_α $\forall \alpha \in A$: quindi V è aperto nell'unione disgiunta $\bigsqcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$.
(ii) Notiamo che q è suriettiva per costruzione poiché X è ricoperto da $\mathcal{B}$, ossia $X = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Inoltre, sicché q ristretta ad ogni B_α coincide con l'inclusione $i_\alpha : B_\alpha \hookrightarrow X$ (la quale è continua), dalla proprietà universale dell'unione disgiunta segue che $q : \bigsqcup_{\alpha \in A} B_\alpha \to X$ è continua. Sia ora V un aperto di $\bigsqcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Per definizione, $V \cap B_\alpha$ è aperto in B_α $\forall \alpha \in A$ e $q(V) \cap B_\alpha = V \cap B_\alpha$ è quindi aperto in B_α $\forall \alpha \in A$; ma la topologia di X è coerente con $\mathcal{B}$ per ipotesi, così $q(V)$ è un aperto di X e q risulta pure aperta. Quindi q è continua, suriettiva e aperta; pertanto, è un'identificazione. □

Rivediamo, senza dimostrazione, la proprietà universale della topologia quoziente e l'unicità degli spazi quoziente. Il lettore interessato le potrà trovare entrambe in [1].

Teorema 1.5.4. ***(La Proprietà Universale della Topologia Quoziente)*** *Siano X e Y due spazi topologici e supponiamo che $q : X \to Y$ sia un'identificazione. Detto Z un qualunque altro spazio topologico, un'applicazione $f : Y \to Z$ è continua se e solo se lo è $f \circ q : X \to Z$.*

Teorema 1.5.5. ***(Teorema di Unicità del Quoziente)*** *Siano X, Y_1 e Y_2 tre spazi topologici e supponiamo che $q_1 : X \to Y_1$ e $q_2 : X \to Y_2$ siano due identificazioni che passano l'una al quoziente rispetto all'altra (ossia, $\forall x, y \in X$ $q_1(x) = q_1(y)$ se e solo se $q_2(x) = q_2(y)$). Allora esiste un unico omeomorfismo $\varphi : Y_1 \to Y_2$ tale che $\varphi \circ q_1 = q_2$.*

1.6 Lo Spazio Aggiunzione

La teoria sugli spazi quoziente ci fornisce un modo rigoroso per costruire spazi topologici "incollando" due spazi fra di loro.

Definizione 1.6.1. *Siano X e Y due spazi topologici, $A \subseteq Y$ un sottospazio chiuso di Y e $f : A \to X$ un'applicazione continua. Consideriamo sull'unione disgiunta $X \sqcup Y$ la relazione di equivalenza generata dalla relazione $a \sim f(a)$ $\forall a \in A$. Denotato il relativo quoziente con $X \sqcup Y/ \sim$, muniamolo della topologia quoziente relativa alla proiezione canonica sul quoziente $\pi : X \sqcup Y \to X \sqcup Y/ \sim$. Questo nuovo spazio topologico si indica con $X \cup_f Y$ ed è detto lo spazio aggiunzione ottenuto attaccando Y a X lungo f. L'applicazione f è detta anche la mappa di incollamento.*

Osservazione 1.6.2. Notiamo che la relazione di equivalenza generata da $a \sim f(a)$ $\forall a \in A$ identifica ogni punto $x \in X$ con i punti (se esistono) della sua controimmagine $f^{-1}(\{x\}) \subseteq A$.
Non è inoltre ben chiaro dalla definizione il motivo per cui A debba essere chiuso in Y. Effettivamente, anche se non avremo modo di vederlo esplicitamente, questa richiesta tecnica si rivela utile (anzi, pressoché fondamentale) nella dimostrazione delle proprietà degli spazi aggiunzione.

La costruzione dello spazio aggiunzione è un potente strumento che permette di "generare" delle varietà topologiche senza bordo a partire da varietà con bordo. In questo modo è possibile studiare le proprietà di una varietà con bordo passando per un'opportuna varietà senza bordo.
Supponiamo che X e Y siano due n-varietà con bordo non vuoto ∂X e ∂Y. Assumiamo anche che i due bordi siano omeomorfi, e sia $h : \partial Y \to \partial X$ un omeomorfismo. Ricordando che dal Corollario 1.3.24 il bordo ∂Y è un chiuso di Y e vedendo $h : \partial Y \to \partial X \subseteq X$ come un'applicazione continua in X, è lecito definire lo spazio aggiunzione $X \cup_h Y$. Tale spazio si dice ottenuto attaccando le due varietà X e Y lungo i loro bordi.
Sussiste il seguente importante teorema, la cui dimostrazione viene omessa (rimandiamo il lettore interessato a [2]).

Teorema 1.6.3. ***(L'incollamento di due varietà lungo i loro bordi)*** *Siano X e Y due n-varietà con bordo non vuoto e supponiamo che $h : \partial Y \to \partial X \subseteq X$ sia un omeomorfismo. Allora lo spazio aggiunzione $X \cup_h Y$ è una n-varietà topologica (senza bordo). Inoltre, esistono due embedding topologici $f : X \to X \cup_h Y$, $g : Y \to X \cup_h Y$ le cui immagini $f(X)$ e $g(Y)$ sono due chiusi di $X \cup_h Y$ soddisfacenti le due condizioni $f(X) \cup g(Y) = X \cup_h Y$ e $f(X) \cap g(Y) = f(\partial X) = g(\partial Y)$.*

Esempio 1.6.4. Un importante esempio della precedente costruzione è il *double* di una varietà con bordo non vuoto. Sia X una n-varietà con bordo non vuoto, e sia $h : \partial X \to \partial X$ l'applicazione identica. Lo spazio aggiunzione $X \cup_h X$ si denota con $D(X)$ ed è detto il *double* di X. In base al Teorema 1.6.3, X risulta essere omeomorfa ad un chiuso di $D(X)$ e $D(X)$ è unione di due sottospazi chiusi omeomorfi a X con intersezione non vuota.
Intuitivamente, il *double* di X è costruito prendendo due copie di X e incollandole lungo il bordo ∂X.

Corollario 1.6.5. *Ogni varietà con bordo n-dimensionale è omeomorfa ad un chiuso di una n-varietà topologica senza bordo.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata in virtù del Teorema 1.6.3 e dell'esempio precedente. □

Osservazione 1.6.6. Il Corollario 1.6.5 vale anche quando il bordo è vuoto. Nel qual caso non c'è niente da dimostrare perché, per il Corollario 1.3.24, la varietà è già una varietà topologica.

1.7 Connessione e connessione per archi

Tale sezione si occuperà di rinfrescare molto celermente la connessione e la connessione per archi. Dato che la conoscenza di queste due proprietà topologiche dovrebbe essere già assodata, rimandiamo a [1] per tutte le dimostrazioni che non daremo in questa sede.

Definizione 1.7.1. *Sia X uno spazio topologico. Una separazione di X è una coppia di aperti di X $\{U, V\}$ tali che:*
(i) $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$;
(ii) $X = U \cup V$;
(iii) $U \cap V = \emptyset$.

Definizione 1.7.2. *Uno spazio topologico X si dice sconnesso se esso ammette una separazione.*

Definizione 1.7.3. *Uno spazio topologico X si dice connesso se non è sconnesso.*

Osservazione 1.7.4. L'insieme vuoto $\emptyset$ è connesso (infatti, esso non può ammettere una separazione).

Osservazione 1.7.5. Se X è uno spazio topologico e $A \subseteq X$ è un suo sottospazio, ovviamente per noi A sarà connesso qualora A risulti connesso con la topologia indotta da quella di X. Fondamentale è che tale nozione di connessione non dipenda dai sottoinsiemi dello spazio topologico ambiente in cui il sottospazio "vive". Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.7.6. ***(La Proprietà Assoluta dei Connessi)*** *Sia X uno spazio topologico e siano S, T due sottospazi di X tali che $S \subseteq T \subseteq X$. Allora S è sconnesso (quindi connesso) in X se e solo se S è sconnesso (quindi connesso) in T, dove su T consideriamo la topologia indotta da quella di X.*

Esempio 1.7.7. Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Allora $\{x\}$ è connesso. Infatti, la topologia indotta da X su $\{x\}$ coincide con $\{\{x\}, \emptyset\}$ e quindi $\{x\}$ non ammette una separazione.

Esempio 1.7.8. Gli intervalli sono tutti e soli i connessi di $\mathbb{R}$ con almeno due punti. [1]

Ripercorriamo i risultati più importanti sulla connessione.

Proposizione 1.7.9. *Uno spazio topologico X è connesso se e solo se gli unici sottoinsiemi di X che risultano sia aperti che chiusi in X sono $\emptyset$ e X.*

Osservazione 1.7.10. Dalla Proposizione 1.7.9, segue che uno spazio topologico discreto X è connesso se e solo se esso è costituito da un solo punto (infatti, negli spazi topologici discreti tutti i sottoinsiemi sono sia aperti che chiusi).

Teorema 1.7.11. ***(Il Teorema Principale sulla Connessione)*** *Siano X e Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è connesso, allora $f(X)$ è connesso. In particolare, la connessione è una proprietà topologica.*

Proposizione 1.7.12. *(i) Sia X uno spazio topologico e siano U, V due aperti disgiunti di X. Se $A \subseteq X$ è connesso e $A \subseteq U \cup V$, allora $A \subseteq U$ oppure $A \subseteq V$.*
(ii) Sia X uno spazio topologico e sia $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di sottospazi connessi di X tali che $\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha \neq \emptyset$. Allora l'unione $\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ è ancora un sottospazio connesso di X.
(iii) Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un sottospazio connesso di X. Allora la chiusura $\overline{A}$ è ancora un sottospazio connesso di X.

Esempio 1.7.13. Sia X una n-varietà con bordo non vuoto. Se X è connessa, allora il *double* $D(X)$ è connesso. Infatti, $D(X)$ è unione di due sottospazi chiusi omeomorfi a X con intersezione non vuota: pertanto, esso è unione di due connessi con intersezione non vuota.

Definizione 1.7.14. *Sia X uno spazio topologico e siano $x, y \in X$. Un arco in X da x in y è un'applicazione continua $f : [0, 1] \to X$ tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$.*

Definizione 1.7.15. *Uno spazio topologico X si dice connesso per archi se $\forall x, y \in X$ esiste un arco in X da x in y.*

Osservazione 1.7.16. Se X è uno spazio topologico e $A \subseteq X$, anche in tal caso A sarà per noi connesso per archi se esso risulta uno spazio connesso per archi con la topologia indotta da quella di X. Anche tale definizione di connessione per archi è "assoluta", nel senso che non dipende ovviamente dai sottoinsiemi dello spazio topologico ambiente in cui il sottospazio "vive".

Esempio 1.7.17. Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Allora $\{x\}$ è connesso per archi: basta infatti considerare banalmente l'arco costante
$f : [0, 1] \to \{x\}$.

Esempio 1.7.18. I sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$ sono tutti connessi per archi. Basta considerare come arco fra due punti il segmento che li congiunge (esso è contenuto nel convesso per definizione di convesso). [1]

Di seguito i maggiori risultati sulla connessione per archi.

Teorema 1.7.19. ***(Il Teorema Principale sulla Connessione per Archi)*** *Siano X e Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è connesso per archi, allora $f(X)$ è connesso per archi. In particolare, la connessione per archi è una proprietà topologica.*

Proposizione 1.7.20. *Sia X uno spazio topologico e sia $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di sottospazi di X connessi per archi tale che $\bigcap\limits_{\alpha \in A} B_\alpha \neq \emptyset$. Allora l'unione $\bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$ è ancora un sottospazio di X connesso per archi.*

Teorema 1.7.21. *Se uno spazio topologico X è connesso per archi, allora è anche connesso.*

In seguito saranno importanti alcuni risultati sulle componenti connesse e connesse per archi. Per essi può essere utile richiamare anche la dimostrazione.

Definizione 1.7.22. *Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $C \subseteq X$ è detto una componente connessa di X se esso è un connesso non vuoto e massimale (rispetto all'inclusione) di X, ossia se esso è un connesso non vuoto di X che non è propriamente contenuto in ogni altro sottospazio connesso di X (cioè, se C' è un connesso di X con $C \subseteq C'$, allora $C = C'$).*

Proposizione 1.7.23. *Sia X uno spazio topologico. Allora le componenti connesse di X formano una partizione di X.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che l'unione delle componenti connesse di X coincide con X e che esse sono mutualmente disgiunte. Partiamo dalla prova della prima affermazione. Sia $x \in X$; sicuramente esiste almeno un connesso di X contenente x, vale a dire $\{x\}$. È lecito allora considerare l'unione U di tutti i connessi di X che contengono x: in quanto unione di connessi con intersezione non vuota (tutti contengono x) U è un connesso non vuoto di X e che risulta massimale rispetto alla proprietà di contenere x. Ma se C è un connesso di X con $U \subseteq C$, allora $x \in U \subseteq C$ quindi C risulta un connesso di X con $x \in C$; per massimalità di U rispetto alla proprietà di contenere x segue che $U = C$ e quindi U è pure massimale, ossia è una componente connessa di X con $x \in U$. Dall'arbitrarietà di x, le componenti connesse di X ricoprono X. Siano ora U, V due componenti connesse di X con $U \neq V$. Supponiamo per assurdo che $U \cap V \neq \emptyset$. Allora $U \cup V$ è unione di connessi con intersezione non vuota, quindi un connesso; dalla massimalità di U e V, essendo $U \subseteq U \cup V$ e $V \subseteq U \cup V$, si ha $U = U \cup V$ e $V = U \cup V$. Così $U = V$, il che è in contraddizione con il fatto che $U \neq V$. Pertanto $U \cap V = \emptyset$: le componenti connesse di X sono quindi mutualmente disgiunte. □

Proposizione 1.7.24. *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Allora:*
(i) ogni componente connessa di X è un chiuso di X;
(ii) se $A \subseteq X$ è un sottospazio connesso di X non vuoto, esso è contenuto in una e una sola componente connessa di X.

Dimostrazione. (i) Sia $C \subseteq X$ una componente connessa di X. Allora $\overline{C}$ è ancora un connesso di X per la Proposizione 1.7.12; inoltre, $C \subseteq \overline{C}$. Dalla massimalità di C segue che $C = \overline{C}$ e quindi che C è chiuso.
(ii) Se $A \neq \emptyset$, poiché dalla Proposizione 1.7.23 le componenti connesse formano una partizione di X, A possiederà almeno un elemento in comune con una qualche componente connessa C. Allora $A \cup C$ è unione di connessi con intersezione non vuota, ergo un connesso dalla Proposizione 1.7.12; sicché $C \subseteq A \cup C$, per massimalità di C $A \cup C = C$ e quindi $A \subseteq C$. Pertanto A è contenuto in una componente connessa di X; l'unicità di tale componente segue immediatamente dalla Proposizione 1.7.23. □

Allo stesso modo delle componenti connesse, si definiscono le componenti connesse per archi di uno spazio topologico. Le dimostrazioni delle proprietà delle componenti connesse per archi sono analoghe a quelle che abbiamo visto per le componenti connesse.

Definizione 1.7.25. *Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $C \subseteq X$ è detto una componente connessa per archi di X se esso è un connesso per archi non vuoto e massimale di X.*

Proposizione 1.7.26. *Sia X uno spazio topologico. Allora:*
(i) le componenti connesse per archi di X formano una partizione di X;
(ii) se $X \neq \emptyset$ e $A \subseteq X$ è un sottospazio connesso per archi non vuoto di X, esso è contenuto in una e una sola componente connessa per archi di X.

1.8 Compattezza e compattezza locale

Analogamente a quanto detto sulla connessione, è meglio che il lettore possieda già una media conoscenza sulla compattezza. In ogni caso, in questa sezione ridiamo la definizione e alcuni risultati su di essa, e presentiamo la compattezza locale. Laddove le dimostrazioni non siano riportate, rimandiamo il lettore a [1].

Definizione 1.8.1. *Uno spazio topologico X si dice compatto se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X ammette un sottoricoprimento finito $\{U_1, \dots, U_k\}$.*

Osservazione 1.8.2. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Si dice che A è compatto in X (o compatto di X o, più semplicemente, compatto) se esso risulta uno spazio topologico compatto quando viene munito della topologia indotta da quella di X. Tuttavia, può essere utile la seguente definizione equivalente di compattezza di A in X. Un ricoprimento di A in X è una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di X la cui unione contiene A. Un sottoricoprimento di $\mathcal{U}$ è una sottofamiglia la cui unione contiene ancora A. Il ricoprimento $\mathcal{U}$ si dice aperto se è costituito da aperti di X. Dalla definizione di compattezza e di topologia indotta, segue pressoché immediatamente che A è compatto se e solo se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di A in X ammette un sottoricoprimento finito $\{U_1, \dots, U_k\}$.
Il fatto fondamentale è che la nozione di compattezza di un sottospazio in uno spazio topologico ambiente non dipende dal sottoinsieme in cui esso "vive". Sussiste infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.8.3. ***(La Proprietà Assoluta dei Compatti)*** *Sia X uno spazio topologico e siano S, T due sottospazi di X tali che $S \subseteq T \subseteq X$. Allora S è compatto in X se e solo se S è compatto in T (dove su T consideriamo la topologia indotta da X).*

Esempio 1.8.4. L'insieme vuoto $\emptyset$ è ovviamente compatto.

Esempio 1.8.5. Uno spazio topologico finito è sempre compatto. Infatti ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito, essendo la topologia costituita necessariamente da un numero finito di aperti.

Esempio 1.8.6. Si ricordi che per il Teorema di Heine-Borel i sottospazi chiusi e limitati (rispetto alla metrica euclidea) di $\mathbb{R}^n$ sono compatti.

Semplice ma utile risulterà la caratterizzazione dei compatti negli spazi discreti.

Proposizione 1.8.7. *Sia X uno spazio topologico discreto. Allora $A \subseteq X$ è compatto se e solo se è finito.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Supponiamo che A sia compatto. La topologia indotta da X su A coincide con la topologia discreta su A (infatti, la topologia su X è discreta); pertanto $\{\{x\}\}_{x\in A}$ è un ricoprimento aperto di A. Essendo A compatto, si deve poter estrarre da esso un sottoricoprimento finito, il che implica che A stesso è finito.
"$\Leftarrow$" Se A è finito, allora esso è compatto in virtù dei precedenti esempi. $\square$

Proposizione 1.8.8. *Sia X uno spazio topologico. Allora l'unione finita di sottospazi compatti di X è ancora un sottospazio compatto di X.*

Dimostrazione. Siano $A_1 \subseteq X, \dots, A_n \subseteq X$ dei sottospazi compatti di X. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $A_1 \cup \dots \cup A_n$ in X. In particolare, $\forall j = 1, \dots, n$ $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di A_j in X; dalla compattezza di A_j, è possibile estrarre da $\mathcal{U}$ un sottoricoprimento finito per A_j, $\forall j = 1, \dots, n$. Poiché $A_1 \cup \dots \cup A_n$ è un'unione finita, segue che in tale modo abbiamo estratto da $\mathcal{U}$ un sottoricoprimento finito dell'unione, e così $A_1 \cup \dots \cup A_n$ è compatto in X. $\square$

Di seguito riportiamo alcuni risultati notevoli sulla compattezza. Fra questi, ridaremo una dimostrazione solo per il lemma dell'applicazione chiusa.

Teorema 1.8.9. ***(Il Teorema Principale sulla Compattezza)*** *Siano X e Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto, allora $f(X)$ è compatto. In particolare, la compattezza è una proprietà topologica.*

Proposizione 1.8.10. *(i) Un chiuso di uno spazio topologico compatto è ancora compatto.*
(ii) Un compatto in uno spazio di Hausdorff è un chiuso.

Lemma 1.8.11. ***(Il Lemma dell'Applicazione Chiusa)*** *Siano X uno spazio topologico compatto, Y uno spazio di Hausdorff e $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Allora valgono le seguenti affermazioni:*
(i) f è un'applicazione chiusa;
(ii) se f è iniettiva, è un embedding topologico;
(iii) se f è suriettiva, è un'identificazione;
(iv) se f è biunivoca, è un omeomorfismo.

Dimostrazione. La (ii), la (iii) e la (iv) sono immediate una volta dimostrata la (i). Sia perciò $C \subseteq X$ un chiuso di X; sicché X è compatto, pure C è compatto dalla Proposizione 1.8.10 punto (i). Dal Teorema principale sulla compattezza, essendo f continua, $f(C)$ è compatto in Y, il quale è di Hausdorff. Ma un compatto in uno spazio di Hausdorff è chiuso dalla Proposizione 1.8.10 punto (ii), pertanto $f(C)$ è un chiuso e f è chiusa. □

Definizione 1.8.12. *Uno spazio topologico X si dice localmente compatto se $\forall x \in X$ esiste un sottospazio compatto $K \subseteq X$ il quale contiene un intorno di x.*

Esempio 1.8.13. Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è localmente compatto. Infatti, dato $x \in \mathbb{R}^n$, la chiusura di una palla aperta centrata in x è un compatto di $\mathbb{R}^n$ il quale contiene un intorno di x (ossia, la palla aperta stessa). Questo esempio mostra che uno spazio localmente compatto non è detto sia compatto (infatti, $\mathbb{R}^n$ non è compatto). È invece triviale che ogni spazio compatto è anche localmente compatto.

Per completezza, forniamo una caratterizzazione degli spazi localmente compatti di Hausdorff.

Definizione 1.8.14. *Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $A \subseteq X$ si dice precompatto in X se $\overline{A}$ è compatto in X.*

Proposizione 1.8.15. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) X ammette una base di aperti precompatti;
(ii) ogni punto di X ha un intorno precompatto;
(iii) X è localmente compatto.

Dimostrazione. È immediato che a cascata (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Avremo perciò concluso una volta dimostrato che (iii) $\Rightarrow$ (i). Supponiamo quindi che X sia localmente compatto. Notiamo che è sufficiente dimostrare che ogni punto $x \in X$ ammette una base locale di aperti precompatti; infatti, vero questo, la famiglia data dall'unione delle basi locali in ogni punto di X

sarà ovviamente una base di X formata da aperti precompatti di X. Sia $x \in X$; per ipotesi (X è localmente compatto), esistono $K \subseteq X$, $U \subseteq X$ un compatto e un intorno di x rispettivamente tali che $x \in U \subseteq K$. Definiamo $\mathcal{B}_x := \{V \subseteq X : V \textit{ intorno di } x \textit{ e } V \subseteq U\}$. Ovviamente $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ poiché $U \in \mathcal{B}_x$ e inoltre è una base locale in x. In primo luogo, essa è costituita per definizione da aperti di X contenenti x. Sia $V \subseteq X$ un aperto di X con $x \in V$; allora $U \cap V$ è un intorno di x tale che $x \in U \cap V \subseteq U$ e $x \in U \cap V \subseteq V$, vale a dire $U \cap V$ è un elemento di $\mathcal{B}_x$ con $x \in U \cap V \subseteq V$. Quindi, $\mathcal{B}_x$ è effettivamente una base locale. Infine, dimostriamo che gli elementi di $\mathcal{B}_x$ sono precompatti. Sicché $K \subseteq X$ è un compatto in uno spazio di Hausdorff, esso è chiuso dalla Proposizione 1.8.10. Dato $V \in \mathcal{B}_x$, si ha che $V \subseteq U \subseteq K$ e pertanto $\overline{V} \subseteq K$, essendo $\overline{V}$ il più piccolo chiuso di X contenente V e K un chiuso di X. Ma allora $\overline{V}$ è un chiuso di un compatto ($\overline{V}$ è chiuso in X e contenuto in K), ossia esso stesso compatto dalla Proposizione 1.8.10. Segue che V è precompatto. □

Le varietà topologiche sono sempre localmente compatte.

Proposizione 1.8.16. *Sia X una varietà topologica di dimensione n. Allora X è localmente compatta.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ arbitrario, e sia (U, φ) una carta locale di X contenente x, ossia $x \in U$. Dalla Proposizione 1.3.5 punto (ii), senza ledere la generalità possiamo supporre che $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ sia un omeomorfismo fra U e $\mathbb{R}^n$. Consideriamo una palla chiusa di raggio $r > 0$ centrata in $\varphi(x)$ $\overline{B}_r(\varphi(x))$. Ovviamente, $B_r(\varphi(x)) \subseteq \overline{B}_r(\varphi(x))$; quindi, passando alle immagini tramite l'inversa di φ, $x \in \varphi^{-1}(B_r(\varphi(x))) \subseteq \varphi^{-1}(\overline{B}_r(\varphi(x)))$. Poiché l'inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to U$ è pure un omeomorfismo, $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x)))$ è un aperto di U che contiene x, mentre $\varphi^{-1}(\overline{B}_r(\varphi(x)))$ è un compatto di U che contiene $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x)))$ per il Teorema principale sulla compattezza. Ma, essendo U aperto in X, $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x)))$ è un aperto di X che contiene x, ossia un intorno di x; mentre dalla proprietà assoluta dei compatti $\varphi^{-1}(\overline{B}_r(\varphi(x)))$ è un compatto di X che contiene $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x)))$. Dall'arbitrarietà di x, X è localmente compatta. □

Capitolo 2

Complessi di Celle e Complessi CW

Abbiamo in mano ora tutti gli strumenti per poter parlare adeguatamente dei complessi di celle. In questo capitolo ci occuperemo di dare la definizione di complesso di celle e di complesso CW, e di fornire le prime proprietà e i primi utili esempi.

2.1 Celle e Complessi di Celle

Notazione. D'ora in avanti, indicheremo con $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ la palla euclidea aperta unitaria e con $\overline{\mathbb{B}^n} : \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la sua chiusura, ossia la palla euclidea chiusa unitaria.

Definizione 2.1.1. *Una n-cella aperta è uno spazio topologico omeomorfo a $\mathbb{B}^n$.*

Definizione 2.1.2. *Una n-cella chiusa è uno spazio topologico omeomorfo a $\overline{\mathbb{B}^n}$.*

Osservazione 2.1.3. Per definizione, essendo omeomorfa a $\mathbb{B}^n$, ogni n-cella aperta risulta essere una n-varietà topologica. Analogamente, ogni n-cella chiusa, essendo omeomorfa a $\overline{\mathbb{B}^n}$, è una n-varietà con bordo.

Osservazione 2.1.4. Notiamo che quando $n = 0$ non vi è alcuna differenza fra le celle aperte e le celle chiuse: infatti, ogni spazio topologico costituito da un solo punto è sia una 0-cella aperta che una 0-cella chiusa, e viceversa le 0-celle aperte e le 0-celle chiuse sono spazi topologici formati da un solo punto.

Sia D una n-cella chiusa con $n \geq 1$. Sia $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to D$ un omeomorfismo. Dalle definizioni che abbiamo dato nel Capitolo 1 di varietà con bordo, punto interno e punto del bordo, un omeomorfismo fra due varietà con bordo deve portare l'interno nell'interno e il bordo nel bordo; quindi i punti di $\partial\overline{\mathbb{B}^n} = \mathbb{S}^{n-1}$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di ∂D, mentre i punti di $Int\ \overline{\mathbb{B}^n} = \mathbb{B}^n$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $Int\ D$. Ossia, $f(\partial\overline{\mathbb{B}^n}) = f(\mathbb{S}^{n-1}) = \partial D$ e $f(Int\ \overline{\mathbb{B}^n}) = f(\mathbb{B}^n) = Int\ D$. Così, ∂D risulta omeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$ mentre $Int\ D$ è omeomorfo a $\mathbb{B}^n$ (e quindi, $Int\ D$ è una n-cella aperta).

Osservazione 2.1.5. Le n-celle aperte e le n-celle chiuse ereditano in automatico tutte le proprietà topologiche di $\mathbb{B}^n$ e $\overline{\mathbb{B}^n}$ rispettivamente.

Esempio 2.1.6. Gli esempi più banali di n-cella aperta e n-cella chiusa sono costituiti rispettivamente dalle palle aperte e chiuse di $\mathbb{R}^n$: così, sono 1-celle aperte gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$, sono 1-celle chiuse gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, e così via. La seguente proposizione, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione (la si può trovare in [2]), ci fornisce molti esempi di n-celle aperte e chiuse nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 2.1.7. *Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio compatto e convesso di $\mathbb{R}^n$ con interno non vuoto, allora D è una n-cella chiusa e il suo interno è una n-cella aperta.*

Per non allontanarci troppo dal senso comune e dall'intuizione, il nostro augurio è quello di pensare ad un complesso di celle come ad uno spazio ottenuto "incollando" progressivamente celle chiuse di dimensione crescente lungo i loro bordi. Possiamo dare una formalizzazione matematica a questa idea primitiva.
Sia X uno spazio topologico qualunque non vuoto e sia $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia indicizzata di n-celle chiuse per qualche $n \geq 1$ fissato. Supponiamo che $\forall \alpha \in A$ sia data una funzione continua $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha \to X$, e definiamo $\varphi : \bigsqcup_{\alpha \in A} \partial D_\alpha \to X$ la funzione la quale ristretta ad ogni ∂D_α coincide con φ_α.
Osserviamo che:
(i) φ è continua per la proprietà universale dell'unione disgiunta;
(ii) $\bigsqcup_{\alpha \in A} \partial D_\alpha \cap D_\alpha = \partial D_\alpha\ \forall \alpha \in A$, quindi per la Proposizione 1.4.5 punto (i) e per il Corollario 1.3.24 $\bigsqcup_{\alpha \in A} \partial D_\alpha$ è un chiuso dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{\alpha \in A} D_\alpha$.
Possiamo quindi considerare lo spazio aggiunzione $X \cup_\varphi (\bigsqcup_{\alpha \in A} D_\alpha)$; un qualunque spazio omeomorfo a tale spazio aggiunzione è detto ottenuto da X

attaccando n-celle (chiuse) a X.
In effetti, è possibile definire un complesso di celle come uno spazio topologico costruito induttivamente in questo modo. Si parte da uno spazio discreto non vuoto X_0, a cui si attaccano 1-celle per formare un nuovo spazio X_1; a X_1 si attaccano 2-celle per costituire un nuovo spazio X_2, e così via. Tuttavia questa definizione, molto vantaggiosa a livello intuitivo, risulta molto gravosa per costruire una teoria solida ma snella al tempo stesso. Per questo motivo seguiremo una definizione più rigorosa che comunque permette di dimostrare, come vedremo nel Capitolo 4, come i complessi di celle possano essere definiti e descritti equivalentemente come abbiamo fatto di sopra (ossia, attaccando in successione n-celle).

Definizione 2.1.8. *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Una decomposizione in celle di X è una partizione $\mathcal{E}$ di X costituita da sottospazi di X soddisfacenti le seguenti proprietà:*
(i) gli elementi di $\mathcal{E}$ sono celle aperte di varia dimensione;
(ii) $\forall e \in \mathcal{E}$ la cui dimensione n è maggiore o uguale a 1 esiste una funzione continua $\phi : D \to X$, detta una funzione caratteristica per e, da una n-cella chiusa D in X, la quale definisce un omeomorfismo fra Int D e la cella e porta il bordo ∂D nell'unione delle celle di dimensione strettamente minore di n.

Definizione 2.1.9. *Un complesso di celle è una coppia $(X, \mathcal{E})$, dove X è uno spazio topologico di Hausdorff non vuoto e $\mathcal{E}$ è una sua decomposizione in celle.*

Definizione 2.1.10. *Un complesso di celle $(X, \mathcal{E})$ si dice finito se la sua decomposizione in celle $\mathcal{E}$ è costituita da un numero finito di celle. Si dirà invece localmente finito se la famiglia $\mathcal{E}$ delle celle aperte risulta essere localmente finita.*

Quindi, tecnicamente, il termine complesso di celle si riferisce ad uno spazio topologico di Hausdorff non vuoto insieme ad una sua specifica decomposizione in celle (si noti che ciò non comporta una qualche particolare scelta delle funzioni caratteristiche, invece). Quando perciò diremo che "X è un complesso di celle" staremo intendendo uno spazio di Hausdorff non vuoto munito di una particolare decomposizione in celle.

Sia $(X, \mathcal{E})$ un complesso di celle. Le celle aperte di $\mathcal{E}$ sono solitamente chiamate in modo più semplice come le "celle di X".
Tutte le eventuali 0-celle di X sono pure celle chiuse di X e compatte in X (infatti, una 0-cella coincide con un singoletto). Cosa si può dire delle

celle di X di dimensione maggiore o uguale a 1? Sia $e \in \mathcal{E}$ una cella di X di dimensione $n \geq 1$ e sia $\phi : D \to X$ una funzione caratteristica per e. Sicché D è compatto (è omeomorfo a $\overline{\mathbb{B}^n}$) e X è di Hausdorff, dal lemma dell'applicazione chiusa ϕ è pure chiusa. Applicando congiuntamente la (i) e la (ii) della Proposizione 1.1.1, si trova che $\phi(\overline{Int\ D}) = \overline{\phi(Int\ D)}$, e quindi dalla definizione di funzione caratteristica (ϕ è un omeomorfismo fra $Int\ D$ ed e) $\phi(D) = \overline{e}$. Segue che la chiusura $\overline{e}$ è compatta in X ed ergo che la cella e è precompatta in X. Osserviamo però che $\overline{e}$ non risulta essere necessariamente una n-cella chiusa, in quanto non è richiesto che ϕ sia iniettiva sul bordo ∂D. Un altro risultato che abbiamo gratuitamente ottenuto è che l'immagine $\phi(D) = \overline{e}$: ossia, l'immagine di una n-cella chiusa mediante la funzione caratteristica coincide con la chiusura della cella di X in questione. Pertanto, potremo considerare la funzione caratteristica sia come applicazione continua in X che in $\overline{e}$.

Vediamo ora due esempi semplici ma significativi di complessi di celle.

Esempio 2.1.11. Costruiamo per induzione una decomposizione in celle della sfera $\mathbb{S}^n$, in modo da renderla un complesso di celle. Se $n = 0$, allora $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$, quindi $\{\{-1\}, \{1\}\}$ è una decomposizione in celle di $\mathbb{S}^0$ costituita da due 0-celle. Supponiamo che $n > 0$ e che $\mathbb{S}^{n-1}$ ammetta una decomposizione in celle costituita da due celle in ciascuna dimensione $0, \ldots, n-1$. Consideriamo la sfera $\mathbb{S}^n$ e immergiamo $\mathbb{S}^{n-1}$ in $\mathbb{S}^n$ considerandola come il sottospazio di $\mathbb{S}^n$ in cui $x_{n+1} = 0$ (in realtà, questo che stiamo descrivendo è un embedding topologico di $\mathbb{S}^{n-1}$ in $\mathbb{S}^n$ e quindi $\mathbb{S}^{n-1}$ è in realtà omeomorfo al sottospazio di $\mathbb{S}^n$ in cui $x_{n+1} = 0$). Allora i due emisferi aperti

$$e_1 := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} > 0\}$$
$$e_2 := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} < 0\}$$

sono due n-celle aperte (infatti sono entrambi omeomorfi a $\mathbb{B}^n$) disgiunte fra loro e dalle celle di $\mathbb{S}^{n-1}$, in quanto le due applicazioni

$$\phi_1 : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{e_1} \subseteq \mathbb{S}^n \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2})$$
$$\phi_2 : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{e_2} \subseteq \mathbb{S}^n \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, -\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2})$$

sono due funzioni caratteristiche per e_1, e_2 rispettivamente. Pertanto l'unione di queste due nuove n-celle aperte con la vecchia decomposizione in celle di $\mathbb{S}^{n-1}$ ci restituisce una decomposizione in celle di $\mathbb{S}^n$ formata da due celle per ogni dimensione.

Inoltre, la decomposizione appena descritta è finita; quindi, munita di tale decomposizione in celle, la sfera $\mathbb{S}^n$ risulta essere un complesso di celle finito. Possiamo inoltre già osservare come il processo sopra ricorda molto da vicino quello intuitivo descritto mediante l'incollamento progressivo di celle chiuse.

Esempio 2.1.12. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ ammette una decomposizione in celle. Definiamo le 0-celle della decomposizione come gli interi $\mathbb{Z}$ e le 1-celle come gli intervalli $(n, n+1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, mentre come funzione caratteristica per ogni 1-cella $(n, n+1)$ scegliamo l'inclusione $i : [n, n+1] \hookrightarrow \mathbb{R}$. Tale decomposizione è fra l'altro localmente finita, poiché $\forall x \in \mathbb{R}$ possiamo infatti trovare un intorno della forma $(x - r, x + r)$ con $r \in \mathbb{R}^+$ che interseca un numero finito di elementi della decomposizione. Quindi, munito di questa decomposizione in celle, $\mathbb{R}$ è un complesso di celle localmente finito.
Anche stavolta notiamo come si parta da uno spazio discreto non vuoto ($\mathbb{Z}$) per attaccargli delle 1-celle chiuse, ossia gli intervalli $[n, n+1]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Complessi CW

Definizione 2.2.1. *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Una decomposizione in celle $\mathcal{E}$ di X è detta una decomposizione CW di X se essa soddisfa le due seguenti proprietà:*
(C, "closure finiteness") la chiusura di ogni cella è contenuta in un'unione finita di celle;
(W, "weak topology") la topologia di X è coerente con la famiglia di sottospazi chiusi $\{\overline{e} : e \in \mathcal{E}\}$.

Di seguito ecco la definizione del tipo di complessi di celle con cui avremo a che fare.

Definizione 2.2.2. *Un complesso CW è un complesso di celle $(X, \mathcal{E})$ in cui $\mathcal{E}$ è una decomposizione CW di X.*

Individuiamo subito un caso in cui le condizioni (C) e (W) valgono automaticamente.

Proposizione 2.2.3. *Sia $(X, \mathcal{E})$ un complesso di celle. Se X è localmente finito (in particolare, se X è finito), allora è un complesso CW.*

Dimostrazione. Sia e una cella di X e sia $x \in \overline{e}$. Per ipotesi, esiste un intorno U_x di x tale che U_x interseca solamente un numero finito di celle di X, siano esse $e_1, \ldots, e_n$. In particolare, poiché le celle di X partizionano X, $U_x = U_x \cap X = U_x \cap \bigcup_{e \in \mathcal{E}} e =$($U_x$ interseca solamente $e_1, \ldots, e_n$)$(U_x \cap e_1) \cup \cdots \cup (U_x \cap e_n) \subseteq e_1 \cup \cdots \cup e_n$. Ovviamente, la famiglia $\{U_x\}_{x \in \overline{e}}$ è un ricoprimento aperto di $\overline{e}$ in X; poiché $\overline{e}$ è compatto, $\overline{e}$ è ricoperto da un numero finito di tali intorni U_x, i quali sono a loro volta contenuti (per quanto fatto vedere in precedenza) in un'unione finita di celle. Pertanto $\overline{e}$ è ricoperto da un numero

finito di celle di X e vale quindi (C).
Sia ora $C \subseteq X$ tale che $C \cap \overline{e}$ sia chiuso in $\overline{e}$ $\forall e \in \mathcal{E}$. Se proviamo che $C \subseteq X$ è chiuso in X avremo dimostrato che la topologia di X è coerente con la famiglia $\{\overline{e} : e \in \mathcal{E}\}$ e quindi che vale (W). Sia $x \in X \setminus C$. Dal lemma 1.2.7 si scelga un intorno U di x tale che U intersechi solamente un numero finito di chiusure $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_m}$. Poiché $C \cap \overline{e_i}$ è chiuso in $\overline{e_i}$ e quindi in X $\forall i = 1, \dots, m$ ($\overline{e_i}$ è chiuso di X $\forall i = 1, \dots, m$), $(C \cap \overline{e_1}) \cup \dots \cup (C \cap \overline{e_m})$ è ancora un chiuso di X. In particolare, poiché $x \notin C$ e U interseca solamente $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_m}$, $x \in U \setminus C = U \setminus ((C \cap \overline{e_1}) \cup \dots \cup (C \cap \overline{e_m}))$, dove $U \setminus C$ è un aperto di X. Pertanto $x \in U \setminus C \subseteq X \setminus C$, ossia x è interno a $X \setminus C$; dall'arbitrarietà di x segue che $X \setminus C$ è aperto in X e che C è chiuso in X. □

Esempio 2.2.4. La precedente proposizione ci permette di fornire immediatamente due esempi di complessi CW. Infatti la sfera $\mathbb{S}^n$ con la decomposizione in celle presentata nell'Esempio 2.1.11 è un complesso finito, quindi un complesso CW dalla Proposizione 2.2.3. Similmente, $\mathbb{R}$ con la decomposizione descritta nell'Esempio 2.1.12 della sezione anteriore è un complesso localmente finito, pertanto un complesso CW sempre per la Proposizione 2.2.3.

La Proposizione 2.2.3 fornisce una condizione sufficiente affinché un dato complesso di celle risulti un complesso CW. In generale, l'essere CW è una condizione più forte per un complesso, in quanto esistono complessi di celle la cui decomposizione non è CW. Facciamo subito due esempi che gettino luce sulla non banalità delle proprietà di una decomposizione CW. In uno di questi, mancherà la condizione (C), mentre nell'altro la condizione (W).

Esempio 2.2.5. ***(Fallimento della condizione (W))*** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ l'unione dei segmenti di retta chiusi congiungenti l'origine $(0,0)$ e $(1,0)$ e l'origine $(0,0)$ e i punti $(1, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}^+$. Consideriamo X con la topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$ e definiamo una decomposizione in celle di X nel seguente modo: le 0-celle di X sono $(0,0)$, $(1,0)$ e i punti $(1, \frac{1}{n})$ $n \in \mathbb{N}^+$, mentre le 1-celle di X sono i segmenti di retta di cui abbiamo discusso sopra ma privati dei loro punti di estremo. Tale decomposizione in celle di X soddisfa la condizione (C), in quanto la chiusura di una 0-cella è la 0-cella stessa mentre la chiusura di una 1-cella coincide con l'intero segmento chiuso che congiunge l'origine $(0,0)$ con $(1,0)$ oppure $(1, \frac{1}{n})$ $n \in \mathbb{N}^+$, quindi tale chiusura coincide con l'unione di tre celle (due 0-celle date dai punti di estremo e la 1-cella data dal segmento aperto ottenuto privando quello chiuso dei due estremi). Tuttavia, la decomposizione di X non soddisfa (W). Si consideri $A := \left\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}^+\right\}$. Poiché l'equazione parametrica del segmento chiuso che unisce $(0,0)$ a $(1, \frac{1}{n})$ $n \in \mathbb{N}^+$ è data da $(t, \frac{t}{n})$ $t \in [0,1]$, ponendo

$t = \frac{1}{n}$ si trova il punto $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ e così $A \subseteq X$. Inoltre, poiché A interseca tutti i segmenti chiusi di X in al più un punto (per quanto fatto vedere sopra), l'intersezione di A con le chiusure delle celle di X è sempre costituita da al più un punto ed è perciò un chiuso della chiusura. Nonostante questo, A non è un chiuso di X. Infatti, poiché $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = (0,0)$, l'origine $(0,0)$ è un punto di $\overline{A}$ in X (chiusura di A in X) essendo X primo numerabile (è secondo numerabile in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^2$); ma $(0,0) \notin A$ e così $A \neq \overline{A}$, ossia A non può essere un chiuso di X. Segue che la condizione (W) fallisce per X.

Esempio 2.2.6. ***(Fallimento della condizione (C))*** Definiamo la seguente decomposizione in celle di $\overline{\mathbb{B}^2}$ (con la topologia indotta da quella euclidea): le 0-celle sono l'infinità numerabile di punti dati da

$$\left\{\left(cos(\tfrac{2\pi}{n}), sin(\tfrac{2\pi}{n})\right) : n \in \mathbb{N}^+\right\},$$

mentre le 1-celle sono gli archi aperti che separano questi punti e l'unica 2-cella consiste nell'interno del disco $\overline{\mathbb{B}^2}$, ossia con $\mathbb{B}^2$. Notiamo che la chiusura della 2-cella $\mathbb{B}^2$ nel disco chiuso $\overline{\mathbb{B}^2}$ è $\overline{\mathbb{B}^2}$ stesso (infatti, la chiusura in $\overline{\mathbb{B}^2}$ risulterebbe un chiuso di $\mathbb{R}^2$ incluso in $\overline{\mathbb{B}^2}$ poiché $\overline{\mathbb{B}^2}$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$, quindi le chiusure in $\overline{\mathbb{B}^2}$ e in $\mathbb{R}^2$ devono coincidere); quindi, un sottoinsieme $C \subseteq \overline{\mathbb{B}^2}$ tale che la sua intersezione con la chiusura di ogni cella è un chiuso della chiusura della cella risulta automaticamente chiuso pure in $\overline{\mathbb{B}^2}$, poiché in particolare $C = C \cap \overline{\mathbb{B}^2}$ è chiuso in $\overline{\mathbb{B}^2}$. Pertanto, tale decomposizione soddisfa (W). Tuttavia, essa non soddisfa la condizione (C). Infatti, la chiusura $\overline{\mathbb{B}^2}$ della cella $\mathbb{B}^2$ non può essere contenuta in un'unione finita di celle, altrimenti l'insieme $\left\{\left(cos(\frac{2\pi}{n}), sin(\frac{2\pi}{n})\right) : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ dovrebbe essere finito.

Fatte tali osservazioni fondamentali sulla definizione di complesso CW, procediamo con la teoria.

Definizione 2.2.7. *Sia X un complesso CW. Se esiste un naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che tutte le celle di X hanno dimensione al più n, X è detto finito-dimensionale; altrimenti, X si dirà infinito-dimensionale. Se X è finito-dimensionale, è detto la dimensione di X il più grande naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che X contenga almeno una n-cella aperta.*

Osservazione 2.2.8. Osserviamo che se X è un complesso CW finito- dimensionale, allora la sua dimensione è ben definita per il Teorema di invarianza della dimensione per le varietà topologiche (Teorema 1.3.12). Infatti una cella aperta è sempre una varietà topologica.

Osservazione 2.2.9. Se X è un complesso CW finito, allora è anche finito-dimensionale (infatti, la sua decomposizione è costituita da un numero finito di celle aperte).

Esempio 2.2.10. La sfera $\mathbb{S}^n$, con la decomposizione in celle dell'Esempio 2.1.11, è un complesso CW n-dimensionale.

Esempio 2.2.11. $\mathbb{R}$, con la decomposizione in celle dell'Esempio 2.1.12, è un complesso CW 1-dimensionale.

Esempio 2.2.12. Un complesso CW 0-dimensionale X è uno spazio discreto. In primo luogo, notiamo che le celle di X sono esattamente i singoletti costituiti dai punti di X (infatti, una 0-cella è uno spazio formato da un solo punto). In secondo luogo, sia $x \in X$ e sia e una cella di X, che per quanto detto prima sarà della forma $e = \{y\}$ per qualche $y \in X$; allora, poiché X è di Hausdorff e quindi $\{y\}$ è chiuso, $\{x\} \cap \overline{e} = \{x\} \cap \{y\}$ sarà $\{y\}$ oppure $\emptyset$ a seconda che $x = y$ oppure $x \neq y$ rispettivamente. In ogni caso, $\{x\} \cap \overline{e}$ risulta aperto in $\overline{e} = \{y\}$ e quindi, dalla condizione (W), segue che $\{x\}$ è un aperto di X: pertanto la topologia su X è la topologia discreta.

Esempio 2.2.13. Un complesso CW di dimensione minore o uguale a 1 è detto un grafo. Ogni 0-cella del complesso è chiamata vertice, mentre ogni 1-cella del complesso è chiamata lato. I grafi trovano oggi molteplici applicazioni nella matematica pura e nella matematica applicata.

In generale, le celle aperte di un complesso non è detto siano aperti del complesso stesso. Ecco un caso in cui questo fatto invece si verifica.

Proposizione 2.2.14. *Sia X un complesso CW finito-dimensionale di dimensione n. Allora ogni n-cella di X è un aperto di X.*

Dimostrazione. Se $n = 0$, allora X è uno spazio discreto e quindi ovviamente ogni 0-cella (un singoletto) è un aperto di X. Supponiamo quindi che $n \geq 1$. Sia e_0 una n-cella di X. Dimostriamo che e_0 è un aperto di X usando la condizione (W). Sia $e \neq e_0$ una 0-cella di X (un singoletto); allora, poiché X è di Hausdorff (i singoletti sono chiusi) e le celle partizionano X, $e_0 \cap \overline{e} =$
$= e_0 \cap e = \emptyset$, il quale è aperto in $\overline{e}$. Consideriamo ora $e \neq e_0$ una cella di X distinta da e_0 e di dimensione maggiore o uguale a 1. Poiché $e_0 \cap e = \emptyset$ (le celle partizionano X), allora $e_0 \cap \overline{e}$ dev'essere interamente contenuto in $\overline{e} \setminus e$. Sia $\phi : D \to X$ una funzione caratteristica per e; allora $\overline{e} \setminus e =$ (definizione funzione caratteristica) $= \phi(D) \setminus \phi(Int\ D) \subseteq$ (proprietà delle funzioni) $\phi(D \setminus Int\ D) =$ (Teorema di invarianza del bordo) $= \phi(\partial D) \Rightarrow \overline{e} \setminus e \subseteq \phi(\partial D)$, con $\phi(\partial D)$ incluso nell'unione di tutte le celle di X di dimensione strettamente minore

di quella di e per definizione di funzione caratteristica. In particolare, per definizione di dimensione, tali celle hanno dimensione strettamente minore di n. Poiché e_0 ha dimensione n e $e_0 \cap \overline{e} \subseteq \overline{e} \setminus e$, con $\overline{e} \setminus e$ incluso in un'unione di celle di X di dimensione strettamente minore di n, dal fatto che le celle partizionano X segue che necessariamente $e_0 \cap \overline{e} = \emptyset$ (altrimenti, e_0 interseca una cella di dimensione strettamente minore, il che è un assurdo), il quale è aperto in $\overline{e}$. Per concludere, prendiamo ora $\phi : D \to X$ una funzione caratteristica per e_0. Abbiamo visto come $\phi(D) = \overline{e_0}$; consideriamo perciò l'applicazione indotta $\phi : D \to \overline{e_0} \subseteq X$. Poiché D è compatto (è una n-cella chiusa), $\overline{e_0}$ è di Hausdorff (sottospazio di uno spazio di Hausdorff) e ϕ è continua, dal lemma dell'applicazione chiusa ϕ è anche chiusa. Perciò $\phi : D \to \phi(D) = \overline{e_0}$ è continua, suriettiva e chiusa, cioè è un'identificazione. Per definizione di funzione caratteristica (essa è un omeomorfismo fra $Int\ D$ ed e_0) $\phi^{-1}(e_0) = Int\ D$, il quale è aperto in D per la Proposizione 1.3.22; pertanto e_0 è aperto in $\overline{e_0}$ per definizione di topologia quoziente.
In sostanza, abbiamo dimostrato che per qualunque cella e di X $e_0 \cap \overline{e}$ è aperto in $\overline{e}$, e quindi dalla (W) la tesi segue. □

Definizione 2.2.15. *Sia X un complesso di celle. Un sottocomplesso di X è un sottospazio $Y \subseteq X$ con $Y \neq \emptyset$ tale che:*
(i) Y è unione di celle di X;
(ii) se Y contiene una cella di X, allora contiene anche la sua chiusura.

Proposizione 2.2.16. *Sia X un complesso di celle e sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia non vuota di sottocomplessi di X. Allora l'unione $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è ancora un sottocomplesso di X.*

Dimostrazione. Ovviamente, l'unione $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è non vuota. Essendo Y_i unione di celle di X $\forall i \in I$, anche $\bigcup_{i \in I} Y_i$ sarà unione di celle di X. Sia $e \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$ una cella contenuta nell'unione; poiché le celle sono mutualmente disgiunte, deve esistere $j \in I$ tale che $e \subseteq Y_j$; ma Y_j è un sottocomplesso, quindi $\overline{e} \subseteq Y_j \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i \Rightarrow \overline{e} \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$. Pertanto $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è un sottocomplesso di X. □

I sottocomplessi di un complesso CW preservano la struttura di complesso CW.

Teorema 2.2.17. *Sia X un complesso CW e sia $Y \subseteq X$ un sottocomplesso di X. Allora valgono le seguenti affermazioni:*
(i) con la topologia indotta da quella di X e con la decomposizione in celle ereditata da X, Y è un complesso CW;
(ii) Y è un chiuso di X.

Dimostrazione. (i) In primo luogo, poiché la proprietà di Hausdorff passa ai sottospazi e X è di Hausdorff, Y è uno spazio topologico di Hausdorff non vuoto. Inoltre, Y è unione disgiunta di celle aperte di varia dimensione e per ogni cella $e \subseteq Y$ di dimensione maggiore o uguale a 1 possiamo prendere come funzione caratteristica per e l'applicazione indotta della funzione caratteristica per e in X: ossia $\phi : D \to \overline{e} \subseteq Y \subseteq X$ (è possibile farlo perché Y è un sottocomplesso, perciò se $e \subseteq Y$ allora $\overline{e} \subseteq Y$). Quindi Y è un complesso di celle con la topologia indotta da X e con la decomposizione in celle che esso eredita da X. Dimostriamo che la decomposizione di Y è CW e avremo dimostrato che Y è un complesso CW. Partiamo dal provare (C). Sia $e \subseteq Y$ una cella di Y; poiché e è pure una cella di X e X è CW, dalla condizione (C) applicata a X $\overline{e}$ è contenuta in un'unione finita di celle di X, siano esse $e_1, \dots, e_n$. Tuttavia, poiché Y è un sottocomplesso, si ha pure $\overline{e} \subseteq Y$; dal fatto che le celle sono mutualmente disgiunte segue che le celle $e_1, \dots, e_n$ sono celle di Y, ossia $e_1 \subseteq Y, \dots, e_n \subseteq Y$. Quindi Y soddisfa la condizione (C). Verifichiamo la (W). Sia $C \subseteq Y$ tale che $C \cap \overline{e}$ sia chiuso in $\overline{e}$ per ogni cella $e \subseteq Y$. Consideriamo ora e una cella di X non contenuta in Y (altrimenti, $Y = X$ e quindi non ci sarebbe niente da dimostrare). Dalla condizione (C) per X, $\overline{e} \setminus e$ è incluso nell'unione finita di celle di X; alcune di esse, chiamiamole $e_1, \dots, e_k$, potrebbero essere celle di Y. Quindi, poiché Y è un sottocomplesso, $\overline{e_1} \subseteq Y, \dots, \overline{e_k} \subseteq Y$ e conseguentemente $\overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_k} \subseteq Y$. Allora $C \cap \overline{e} = (C \subseteq Y)\ C \cap (\overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_k}) \cap \overline{e} = ((C \cap \overline{e_1}) \cup \dots \cup (C \cap \overline{e_k})) \cap \overline{e}$ $\Rightarrow C \cap \overline{e} = ((C \cap \overline{e_1}) \cup \dots \cup (C \cap \overline{e_k})) \cap \overline{e}$, dove $C \cap \overline{e_1}, \dots, C \cap \overline{e_k}$ sono chiusi in $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_k}$ rispettivamente ergo chiusi in X (infatti, $e_1 \subseteq Y, \dots, e_k \subseteq Y$ ed $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_k}$ sono chiusi in X): poiché unione finita di chiusi di X è un chiuso di X, abbiamo che $C \cap \overline{e}$ è un chiuso di $\overline{e}$. Quindi: se $e \subseteq Y$ $C \cap \overline{e}$ è chiuso in $\overline{e}$, mentre se e è una cella di X non contenuta in Y il ragionamento precedente dimostra che $C \cap \overline{e}$ è chiuso in $\overline{e}$. Pertanto per ogni cella di X e $C \cap \overline{e}$ è chiuso in $\overline{e}$; dalla condizione (W) applicata a X, $C \subseteq Y$ è un chiuso di X contenuto in Y, quindi un chiuso di Y. Per arbitrarietà di C pure Y soddisfa (W) e quindi è un complesso CW.
(ii) Si applica, senza ledere la generalità, il discorso immediatamente precedente illustrato nel punto (i) a $C = Y$. □

Osservazione 2.2.18. Il teorema precedente ci autorizza a parlare di sottocomplessi finito/infinito-dimensionali e di eventuale dimensione del sottocomplesso: basterà infatti considerarlo come complesso CW con la sua propria struttura. Un discorso analogo vale per la finitezza e la locale finitezza di un sottocomplesso.

Definizione 2.2.19. *Sia X un complesso di celle. È detto l'n-scheletro di X il sottospazio $X_n \subseteq X$ dato dall'unione di tutte le celle di dimensione minore o uguale a n.*

Osservazione 2.2.20. Sia X un complesso di celle. In primo luogo, notiamo che $X_n \subseteq X_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre, sia e una n-cella aperta di X con $n \geq 1$ e sia $\phi : D \to X$ una funzione caratteristica per e. Dalla definizione di funzione caratteristica si evince che $\overline{e} \setminus e =$ (ϕ porta D in $\overline{e}$ e $Int\ D$ in e) $= \phi(D) \setminus \phi(Int\ D) \subseteq \phi(D \setminus Int\ D) = \phi(\partial D) \subseteq X_{n-1}$ (infatti, $\phi(\partial D)$ è contenuto nell'unione delle celle di X di dimensione strettamente minore di n) $\Rightarrow \overline{e} \setminus e \subseteq X_{n-1}$. Quindi $\overline{e} \setminus e$ è completamente contenuto all'interno dell'$(n-1)$-scheletro di X. In particolare, poiché $e \neq \overline{e}$ (infatti, $\overline{e}$ è compatto mentre e non lo è quando $n \geq 1$), X_{n-1} è sempre non vuoto.

Esempio 2.2.21. Consideriamo la sfera $\mathbb{S}^n$ con la decomposizione in celle dell'Esempio 2.1.11. Si vede facilmente che $\forall k = 0, \dots, n$ il k-scheletro di $\mathbb{S}^n$ è $\mathbb{S}^k$.

Esempio 2.2.22. Prendiamo $\mathbb{R}$ con la decomposizione in celle dell'Esempio 2.1.12. Allora lo 0-scheletro di $\mathbb{R}$ è dato dai numeri interi $\mathbb{Z}$ mentre l'1-scheletro coincide con tutto $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.2.23. *Sia X un complesso di celle. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ l'n-scheletro X_n è un sottocomplesso di dimensione al più n. In particolare, se X è CW, pure l'n-scheletro X_n è un complesso CW.*

Dimostrazione. Una volta provato che X_n è un sottocomplesso, va da sé che esso risulta finito-dimensionale con dimensione al più n. Prima di tutto, per definizione X_n è unione di celle aperte di X. Se $n = 0$, ovviamente lo 0-scheletro è unione di singoletti quindi se $e \subseteq X_0$ allora pure $\overline{e} = e \subseteq X_0$ (infatti, X è di Hausdorff quindi i singoletti sono chiusi). Supponiamo pertanto che $n \geq 1$ e che esista almeno una cella di dimensione maggiore o uguale a 1. Sia $e \subseteq X_n$ una cella dell'n-scheletro. Se la cella è 0-dimensionale, come prima $\overline{e} \subseteq X_n$. Supponiamo quindi che la dimensione di e sia maggiore o uguale a 1; sia $\phi : D \to X$ una funzione caratteristica per e. Dall'osservazione che segue la Definizione 2.2.19 si ha che $\overline{e} = e \cup \overline{e} \setminus e \subseteq e \cup X_{n-1} \subseteq X_n \Rightarrow \overline{e} \subseteq X_n$. Pertanto, X_n è un sottocomplesso di X. L'ultima parte dell'enunciato segue dal Teorema 2.2.17. □

In generale, non è inusuale che le celle di un complesso CW presentino notevoli proprietà di regolarità. Nei successivi capitoli non useremo la seguente definizione, ma vista l'importanza che essa riveste nella teoria dei complessi e nello studio della varietà vale la pena comunque di darla.

Definizione 2.2.24. *Sia X un complesso di celle. Una cella e di X si dice una cella regolare se è di dimensione 0 oppure, nel caso in cui la sua dimensione sia maggiore o uguale a 1, se esiste una funzione caratteristica per e $\phi : D \to \overline{e} \subseteq X$ che definisca un omeomorfismo fra D e $\overline{e}$.*

Esempio 2.2.25. Prendiamo $\mathbb{R}$ con la decomposizione standard in celle dell'Esempio 2.1.12. Allora tutte le celle di $\mathbb{R}$ sono regolari. Infatti le 0-celle intere $\mathbb{Z}$ sono regolari per definizione, mentre per le 1-celle $(n, n+1)$ $n \in \mathbb{Z}$ abbiamo scelto come funzione caratteristica l'inclusione $i : [n, n+1] \hookrightarrow \mathbb{R}$, che è ovviamente un omeomorfismo fra $[n, n+1]$ e $[n, n+1]$.

Esempio 2.2.26. Consideriamo il disco chiuso $\overline{\mathbb{B}^2}$ con la decomposizione in celle che fallisce la condizione (C), presentata poco prima nell'Esempio 2.2.6. Allora la 2-cella data dall'interno del disco $\mathbb{B}^2$ è una cella regolare, perché come funzione caratteristica possiamo scegliere l'identità $id : \overline{\mathbb{B}^2} \to \overline{\mathbb{B}^2}$.

Definizione 2.2.27. *Sia X un complesso di celle. La decomposizione di X si dice regolare se valgono le due seguenti proprietà:*
(i) ogni cella di X è una cella regolare;
(ii) la chiusura di ogni cella è un sottocomplesso finito.

Osservazione 2.2.28. Entrambe le condizioni (i) e (ii) della definizione precedente non sono superflue. Ad esempio, esistono celle che soddisfano (i) ma non (ii). È un caso che si verifica nel disco $\overline{\mathbb{B}^2}$ con la decomposizione in celle richiamata nell'esempio precedente: la 2-cella $\mathbb{B}^2$ è una cella regolare, eppure la sua chiusura, la quale coincide con l'intero disco $\overline{\mathbb{B}^2}$, non è certamente un sottocomplesso finito, essendo la decomposizione di $\overline{\mathbb{B}^2}$ costituita da un'infinità numerabile di celle.

Definizione 2.2.29. *Un complesso CW X si dice un complesso CW regolare se la sua decomposizione CW è anche una decomposizione regolare.*

Esempio 2.2.30. $\mathbb{R}$, con la solita decomposizione in celle, è un complesso CW regolare. Infatti la sua decomposizione è una decomposizione CW regolare. Abbiamo già visto come sia una decomposizione CW (la decomposizione è localmente finita, quindi la tesi segue dalla Proposizione 2.2.3) e come tutte le sue celle siano regolari. Inoltre, la chiusura di ogni cella è un sottocomplesso finito. L'asserto è banale se la cella è 0-dimensionale (nel qual caso la cella coincide con la sua chiusura, quindi è un sottocomplesso finito); invece la chiusura della cella $(n, n+1)$ $n \in \mathbb{Z}$ è esattamente $[n, n+1]$, il quale è un sottocomplesso finito (è unione delle celle $\{n\}$, $\{n+1\}$, $(n, n+1)$ e contiene banalmente la chiusura di ogni sua cella).

Capitolo 3

Proprietà topologiche di un Complesso CW

In questo capitolo vedremo come le proprietà topologiche di un complesso CW siano interamente determinate dalla decomposizione CW. Partiamo dalla connessione per poi passare alla compattezza e alla compattezza locale.

3.1 Connessione e connessione per archi

Il seguente teorema dimostra che l'informazione sulla connessione di un complesso CW è completamente data dall'1-scheletro del complesso.

Teorema 3.1.1. *Sia X un complesso CW. Allora le seguenti sono equivalenti:*
(i) X è connesso per archi;
(ii) X è connesso;
(iii) L'1-scheletro di X è connesso;
(iv) L'n-scheletro di X è connesso per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Poiché (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) $\Rightarrow$ (iv), il teorema risulterà dimostrato se (ii) $\Rightarrow$ (iii) e (iv) $\Rightarrow$ (i).
"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Proviamo la contronominale; ossia, supponiamo che l'1-scheletro di X sia sconnesso e dimostriamo che X è sconnesso. Sia $\{X_1', X_1''\}$ una separazione dell'1-scheletro X_1, ossia $X_1' \neq \emptyset$, $X_2'' \neq \emptyset$ sono due aperti disgiunti non vuoti di X_1 tali che $X_1 = X_1' \cup X_1''$. Ragioniamo a questo punto per induzione su $n \in \mathbb{N}^+$ e supponiamo che, dato $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > 1$, l'$(n-1)$-scheletro X_{n-1} ammetta una separazione $\left\{X_{n-1}', X_{n-1}''\right\}$, ossia una coppia di aperti non vuoti di X_{n-1} che partiziona X_{n-1}. Costruiamo una separazione dell'n-scheletro X_n $\{X_n', X_n''\}$ in modo tale che risulti $X_{n-1}' \subseteq X_n'$ e

$X''_{n-1} \subseteq X''_n$. Sia e una n-cella di X e sia $\phi : D \to \overline{e} \subseteq X_n$ una funzione caratteristica per e. Per definizione di funzione caratteristica $\phi_{|\partial D} : \partial D \to X_{n-1}$ (il bordo viene mandato nell'unione delle celle di dimensione strettamente minore di n, quindi nell'$(n-1)$-scheletro) è una funzione continua dal bordo ∂D all'$(n-1)$-scheletro X_{n-1}. Per quanto abbiamo visto all'inizio del Capitolo 2, essendo $n > 1$, ∂D è omeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$; in particolare, ∂D è connesso. Quindi $\phi(\partial D) \subseteq X_{n-1}$ è connesso perché ϕ è continua. Dalla Proposizione 1.7.12 punto (i), essendo $\left\{X'_{n-1}, X''_{n-1}\right\}$ una separazione di X_{n-1}, si deve verificare che $\phi(\partial D) \subseteq X'_{n-1}$ oppure $\phi(\partial D) \subseteq X''_{n-1}$. Così, $\overline{e} = \phi(D)$ risulta avere intersezione non banale con uno fra X'_{n-1} e X''_{n-1}, ma non con entrambi (questi ultimi sono infatti disgiunti). Ora, poiché la n-cella e scelta sopra è arbitraria, possiamo dividere le n-celle di X in due famiglie disgiunte

$$\mathcal{E}' := \left\{e \subseteq X : e\ n-cella\ con\ \overline{e} \cap X'_{n-1} \neq \emptyset\right\}$$
$$\mathcal{E}'' := \left\{e \subseteq X : e\ n-cella\ con\ \overline{e} \cap X''_{n-1} \neq \emptyset\right\}$$

Definiamo $X'_n := X'_{n-1} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e\right)$, $X''_n := X''_{n-1} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}''} e\right)$. Ovviamente, X'_n e X''_n sono non vuoti poiché per ipotesi induttiva non lo sono X'_{n-1}, X''_{n-1}. Inoltre, per costruzione e per ipotesi induttiva, $X'_n \cap X''_n = \emptyset$ e $X'_n \cup X''_n = X_n$. Poiché inoltre per definizione $X'_{n-1} \subseteq X'_n$ e $X''_{n-1} \subseteq X''_n$, $\{X'_n, X''_n\}$ sarà la separazione di X_n cercata una volta dimostrato che X'_n e X''_n sono aperti di X_n. Poiché l'n-scheletro X_n è un sottocomplesso di X, dalla Proposizione 2.2.23 X_n è un complesso CW con la topologia indotta e la decomposizione in celle che esso eredita da X. Quindi, possiamo verificare che X'_n e X''_n sono aperti di X_n usando la condizione (W). Sia e una qualunque cella di X_n di dimensione minore o uguale a $n-1$, ossia $e \subseteq X_{n-1}$. Poiché $\overline{e}$ è sempre connesso (infatti o è un singoletto oppure l'immagine di una cella chiusa, connessa, mediante una funzione continua, ossia la funzione caratteristica) e $\left\{X'_{n-1}, X''_{n-1}\right\}$ è una separazione di X_{n-1}, dalla Proposizione 1.7.12 punto (i) $\overline{e} \subseteq X'_{n-1}$ oppure $\overline{e} \subseteq X''_{n-1}$. Così $X'_n \cap \overline{e} \in \{\emptyset, \overline{e}\}$, $X''_n \cap \overline{e} \in \{\emptyset, \overline{e}\}$ e quindi $X'_n \cap \overline{e}$, $X''_n \cap \overline{e}$ sono entrambi aperti in $\overline{e}$. Sia ora e una n-cella di X; allora dai discorsi precedenti $e \in \mathcal{E}'$ oppure $e \in \mathcal{E}''$, quindi $\overline{e} \subseteq X'_n$ oppure $\overline{e} \subseteq X''_n$ e così $X'_n \cap \overline{e} \in \{\emptyset, \overline{e}\}$, $X''_n \cap \overline{e} \in \{\emptyset, \overline{e}\}$, ossia $X'_n \cap \overline{e}$, $X''_n \cap \overline{e}$ sono entrambi aperti in $\overline{e}$. Dalla condizione (W), X'_n e X''_n sono entrambi aperti in X_n e questo completa l'induzione.

Una volta costruita tale successione di separazioni per gli n-scheletri, poniamo $X' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} X'_n$ e $X'' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} X''_n$. Ovviamente $X' \neq \emptyset$, $X'' \neq \emptyset$ e per come abbiamo costruito le cose $X' \cap X'' = \emptyset$, $X' \cup X'' = X$. Se dimostriamo che X' e X'' sono aperti di X, $\{X', X''\}$ sarà una separazione di X e quindi X risulterà sconnesso. Sia e una n-cella di X; ovviamente vale che $e \subseteq X_{n+1}$.

Poiché $\overline{e}$ è connesso e $\left\{X'_{n+1}, X''_{n+1}\right\}$ è una separazione di X_{n+1}, si dovrà avere $\overline{e} \subseteq X'_{n+1} \subseteq X'$ oppure $\overline{e} \subseteq X''_{n+1} \subseteq X''$. In questo modo $X' \cap \overline{e} \in \{\emptyset, \overline{e}\}$, $X'' \cap \overline{e} \in \{\emptyset, \overline{e}\}$, cioè $X' \cap \overline{e}$ è aperto in $\overline{e}$ e $X'' \cap \overline{e}$ è aperto in $\overline{e}$. Dalla condizione (W), X' e X'' sono due aperti di X.
"(iv) $\Rightarrow$ (i)" Supponiamo che l'n-scheletro di X sia connesso per qualche $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo per induzione su $k \in \mathbb{N}$ che $\forall k \geq n$ X_k è connesso per archi. In questo modo $X = \bigcup\limits_{k \geq n} X_k$ risulta essere unione di connessi per archi con intersezione non vuota ($\bigcap\limits_{k \geq n} X_k = X_n \neq \emptyset$), e quindi dalla Proposizione 1.7.20 X sarà connesso per archi.
Il passo base dell'induzione è $k = n$, ossia dobbiamo provare che X_n stesso è connesso per archi. Se fosse $n = 0$, essendo X_0 uno spazio discreto (è un complesso CW 0-dimensionale) e connesso, l'unica possibilità è che X_0 sia un singoletto: quindi in tal caso è banalmente connesso per archi. Supponiamo perciò che $n \geq 1$ e si scelga $x_0 \in X_n$ arbitrario. Sia S_n la componente connessa per archi di X_n contenente x_0. Per ogni cella $e \subseteq X_n$ la chiusura $\overline{e}$ è connessa per archi, in quanto singoletto (nel caso di una 0-cella) oppure immagine di un connesso per archi (una cella chiusa di dimensione maggiore o uguale a 1) mediante una funzione continua (una funzione caratteristica); così, se per una cella $e \subseteq X_n$ si ha $S_n \cap \overline{e} \neq \emptyset$, $\overline{e} \subseteq S_n$ in virtù del punto (ii) della Proposizione 1.7.26. Quindi per ogni cella $e \subseteq X_n$ o si verifica $S_n \cap \overline{e} = \emptyset$ oppure $S_n \cap \overline{e} = \overline{e}$, ossia $S_n \cap \overline{e}$ è sia aperto che chiuso in $\overline{e}$. Poiché X_n è un complesso CW con la sua decomposizione in celle e la topologia indotta, dalla condizione (W) applicata ad esso S_n è sia aperto che chiuso in X_n; ma $S_n \neq \emptyset$ (contiene infatti x_0) e X_n è connesso per ipotesi, così $S_n = X_n$ e X_n è connesso per archi. Supponiamo adesso che per $k > n$ X_{k-1} sia connesso per archi, e dimostriamo che X_k è connesso per archi. Chiamiamo con S_k la componente connessa per archi di X_k con $X_{k-1} \subseteq S_k$, la quale esiste unica per il punto (ii) della Proposizione 1.7.26. Sia e una k-cella di X_k; allora $\overline{e}$ è un connesso per archi di X_k (immagine di una k-cella chiusa mediante una funzione caratteristica, continua) con intersezione non banale con X_{k-1}, in quanto $\overline{e} \setminus e \subseteq X_{k-1}$. Ma se $\overline{e}$ ha intersezione non banale con X_{k-1} allora ha intersezione non banale con S_k e per il punto (ii) della Proposizione 1.7.26 dev'essere $\overline{e} \subseteq S_k$. Ma se $X_{k-1} \subseteq S_k$ e se S_k contiene tutte le k-celle di X_k, segue che $X_k = S_k$ e che quindi X_k è connesso per archi. $\square$

Osservazione 3.1.2. Il teorema non vale per complessi di celle generici, ossia è fondamentale che la decomposizione sia CW. Consideriamo a tal proposito il seguente esempio. Il classico modello di spazio connesso ma non connesso per archi è dato da "la pulce e il pettine" (si rimanda a [1] per maggiori dettagli), ossia il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ $X = P_0 \cup B \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} D_n \right)$, dove

$$P_0 = \{(0,1)\} \text{ (la pulce)}$$
$$B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\} \text{ (base del pettine)}$$
$$D_n = \left\{ (\tfrac{1}{n}, y) : y \in [0,1], n \in \mathbb{N}^+ \right\} \text{ (denti del pettine)}$$

Consideriamo la seguente decomposizione in celle de "la pulce e il pettine". Definiamo le 0-celle di X come i punti $\left\{(\frac{1}{n},1)\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$, $\left\{(\frac{1}{n},0)\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ e $P_0 = \{(0,1)\}$; le 1-celle di X sono invece definite dai segmenti aperti $\left\{(\frac{1}{n},y) : y \in (0,1)\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ e $\left\{(x,0) : x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$. È immediato verificare che questa è effettivamente una decomposizione in celle di X (infatti, è una partizione di X formata da celle aperte, e per ogni 1-cella si può scegliere l'identità come funzione caratteristica). Una tale decomposizione non può essere CW: infatti, se per assurdo lo fosse, allora X sarebbe un complesso CW e dal teorema precedente X dovrebbe essere connesso per archi (è infatti connesso), in contraddizione con il fatto che non lo è. Quindi X è un complesso di celle che non è CW che sia connesso ma non connesso per archi: questo dimostra che in generale il teorema precedente risulta falso.

3.2 Compattezza

Determinare la compattezza o meno di un complesso CW è molto semplice. Essa è infatti fortemente legata alla cardinalità della decomposizione in celle.

Lemma 3.2.1. *Sia X un complesso CW. Allora la chiusura di ogni cella di X è contenuta in un sottocomplesso finito.*

Dimostrazione. Sia $e \subseteq X$ una n-cella di X. Dimostriamo il lemma per induzione forte sulla dimensione n della cella. Se $n = 0$, allora e è un singoletto; di conseguenza $\overline{e} = e$ è essa stessa un sottocomplesso finito per definizione. Supponiamo quindi che il lemma sia vero per ogni cella di dimensione strettamente minore di n, con $n > 0$. Unendo il fatto che $\overline{e} \setminus e \subseteq X_{n-1}$ all'utilizzo della condizione (C) sulla cella e, si deduce che $\overline{e} \setminus e$ dev'essere incluso in un'unione finita di celle di X_{n-1}, siano esse $e_1, \dots, e_k$: $\overline{e} \setminus e \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_k$. Per ipotesi induttiva, $\overline{e_1} \subseteq Y_1, \dots, \overline{e_k} \subseteq Y_k$ dove $Y_1, \dots, Y_k$ sono sottocomplessi finiti di X; quindi $\overline{e} \setminus e \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_k \subseteq \overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_k} \subseteq Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ $\Rightarrow \overline{e} \setminus e \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Y_i$. Allora $\overline{e} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Y_i \cup e$, da cui segue (utilizzando pure la Proposizione 2.2.16) che $Y := \bigcup_{i=1}^{k} Y_i \cup e$ è un sottocomplesso finito di X tale che $\overline{e} \subseteq Y$. □

Lemma 3.2.2. *Sia X un complesso CW. Allora un sottospazio $C \subseteq X$ è chiuso e discreto se e solo se $C \cap e$ è finita per ogni cella $e \subseteq X$.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Supponiamo che $C \subseteq X$ sia chiuso e discreto, ossia che C sia chiuso in X e che la topologia indotta da X su C coincida con la topologia discreta su C. Sia e una cella di X. Per ipotesi $C \cap \overline{e} \subseteq C$ è anche lui un sottospazio discreto (la topologia indotta da C coincide con quella indotta da X, ma la topologia su C è discreta) e $C \cap \overline{e} \subseteq \overline{e}$ è un chiuso di $\overline{e}$ (C è chiuso in X); quindi, essendo la topologia indotta indipendente dal sottoinsieme in cui $C \cap \overline{e}$ "vive", $C \cap \overline{e}$ è un sottospazio chiuso e discreto del compatto $\overline{e}$. Poiché chiuso di un compatto è esso stesso compatto, $C \cap \overline{e}$ risulta così uno spazio topologico discreto e compatto. Dalla Proposizione 1.8.7 si ha pertanto che $C \cap \overline{e}$ è finito, da cui segue che lo è pure $C \cap e$.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che $C \cap e$ sia finito per ogni cella $e \subseteq X$. Sia e una cella di X; dal Lemma 3.2.1, $\overline{e}$ è contenuta in un sottocomplesso finito di X $Y = \bigcup_{i=1}^{k} e_i$. Quindi $C \cap \overline{e} \subseteq C \cap Y = C \cap \bigcup_{i=1}^{k} e_i = (C \cap e_1) \cup \cdots \cup (C \cap e_k) \Rightarrow C \cap \overline{e} \subseteq (C \cap e_1) \cup \cdots \cup (C \cap e_k)$. Poiché le ultime k intersezioni sono finite per ipotesi, $C \cap \overline{e}$ è finito. Ma $\overline{e}$ è di Hausdorff, pertanto $C \cap \overline{e}$ è chiuso in $\overline{e}$: dall'arbitrarietà di e e dalla (W) segue così che C è chiuso in X. Inoltre, senza alcuna perdita di generalità, riapplicando il ragionamento precedente ad un qualunque sottoinsieme $A \subseteq C$, l'ipotesi e il Lemma 3.2.1 garantiscono che A è chiuso in X e quindi pure in C. Ma se ogni sottoinsieme $A \subseteq C$ è chiuso in C, questo implica che la topologia indotta da X su C è la topologia discreta: pertanto C è un sottospazio chiuso e discreto di X. $\square$

Teorema 3.2.3. *Sia X un complesso CW. Allora $K \subseteq X$ è compatto se e solo se K è chiuso in X e contenuto in un sottocomplesso finito.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Assumiamo che $K \subseteq X$ sia compatto. Supponiamo per assurdo che esista una famiglia infinita di celle $\{e_i\}_{i \in I}$ tale che K intersechi ogni elemento della famiglia: $K \cap e_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$. Usando l'assioma della scelta, possiamo costruire l'insieme infinito $C := \{x_i : x_i \in K \cap e_i \ \forall i \in I\} \subseteq K \subseteq X$, ottenuto scegliendo un punto arbitrario da $K \cap e_i \ \forall i \in I$. Per ogni cella $e \subseteq X$, $C \cap e$ è quindi data, essendo le celle disgiunte, o da un solo elemento oppure da $\emptyset$, quindi è sempre finita. Dal Lemma 3.2.2, C è un sottospazio chiuso e discreto di X e quindi (la topologia indotta è indipendente dal sottoinsieme ambiente) di K, il quale è compatto; in quanto chiuso di un compatto, C risulta essere uno spazio topologico discreto e compatto. Ma allora dalla Proposizione 1.8.7 C dovrebbe essere finito, il che è in contraddizione con il fatto che è infinito per costruzione. Questo ragionamento ci porta a concludere che quindi K può intersecare solamente un numero

finito di celle $e_1, \dots, e_n$: pertanto $K = K \cap X =$ (le celle partizionano X) $= (K \cap e_1) \cup \cdots \cup (K \cap e_n) \subseteq e_1 \cup \cdots \cup e_n \subseteq \overline{e_1} \cup \cdots \cup \overline{e_n} \Rightarrow K \subseteq \overline{e_1} \cup \cdots \cup \overline{e_n}$. Dal Lemma 3.2.1, $\overline{e_1} \subseteq Y_1, \dots, \overline{e_n} \subseteq Y_n$ dove $Y_1 \subseteq X, \dots, Y_n \subseteq X$ sono sottocomplessi finiti di X; dalla Proposizione 2.2.16 $Y := \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ è un sottocomplesso finito di X con $K \subseteq Y$. Quindi K è contenuto in un sottocomplesso finito di X. Inoltre, K è chiuso in quanto compatto nello spazio di Hausdorff X.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che $K \subseteq X$ sia chiuso in X e contenuto in un sottocomplesso finito Y. Se e è una cella di Y, per definizione di sottocomplesso $\overline{e} \subseteq Y$ e quindi $Y = \bigcup_{e \subseteq Y} \overline{e}$, ossia Y è unione finita di compatti di X. Dalla Proposizione 1.8.8, Y è compatto; ma se K è chiuso in X e contenuto in Y allora K è un chiuso del compatto Y e quindi esso stesso compatto, da cui segue la tesi. □

Corollario 3.2.4. *Un complesso CW è compatto se e solo se è un complesso finito.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema precedente. □

Osservazione 3.2.5. Anche questo teorema sulla compattezza, analogamente a quello sulla connessione, potrebbe risultare falso senza l'ipotesi di decomposizione CW. Si consideri il disco chiuso $\overline{\mathbb{B}^2}$ con la decomposizione in celle dell'Esempio 2.2.6 vista nel capitolo 2 e che fallisce la condizione (C). Tale decomposizione non è affatto finita (è numerabile), eppure $\overline{\mathbb{B}^2}$ è ovviamente compatto!
Possiamo quindi affermare definitivamente che il Teorema 3.1.1 e il Teorema 3.2.3 sono due risultati peculiari dei complessi CW. Grazie ad essi si può meglio comprendere la facilità e la comodità di lavorare con un complesso CW, nonostante le due aggiunte tecniche relative alla condizione (C) e alla condizione (W).

3.3 Compattezza locale

Teorema 3.3.1. *Sia X un complesso CW. Allora X è localmente compatto se e solo se è un complesso localmente finito.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Sia X localmente compatto. Sia $x \in X$; per ipotesi esistono $U \subseteq X$ un intorno di x e $K \subseteq X$ un compatto di X tali che $x \in U \subseteq K$. Per il Teorema 3.2.3, K è contenuto in un sottocomplesso finito $Y = \bigcup_{i=1}^{n} e_i$, ossia $x \in U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} e_i$. Poiché le celle partizionano X, segue che U è un intorno di x che interseca solamente un numero finito di celle di X.

Perciò la decomposizione di X è localmente finita e X è localmente finito.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che X sia localmente finito. Sia $x \in X$; per ipotesi esiste un intorno U di x tale che U interseca solamente un numero finito di celle, siano esse $e_1, \dots, e_n$. Poiché le celle partizionano X, $U = U \cap X = (U \cap e_1) \cup \dots \cup (U \cap e_n) \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_n \subseteq \overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_n} \Rightarrow x \in U \subseteq \overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_n}$. Poiché $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}$ sono compatti, dalla Proposizione 1.8.8 l'unione $\overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_n}$ è ancora compatta e quindi X è localmente compatto. $\square$

Capitolo 4

La Costruzione Induttiva. Complessi come Varietà.

In questo capitolo accenneremo brevemente, come promesso nel Capitolo 2, alla possibilità di vedere i complessi di celle, e in particolar modo i complessi CW, come spazi topologici costruiti attaccando celle di dimensione crescente. Dapprima dimostreremo come dalla definizione rigorosa di complesso CW si possa arrivare alla nozione intuitiva di spazio generato dall'incollamento di celle; poi, viceversa, enunceremo (senza dimostrazione) il teorema garante del fatto che incollando celle in un certo modo viene determinato automaticamente un complesso CW.
Dopo tutto questo, ritaglieremo un piccolo spazio alla visione dei complessi CW come varietà topologiche.

4.1 Complessi CW come quozienti

Proposizione 4.1.1. *Sia X un complesso CW. Allora la topologia di X è coerente con la famiglia di sottospazi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Dimostrazione. Sia $U \subseteq X$ tale che $U \cap X_n$ sia aperto in X_n $\forall n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che U è aperto in X; per farlo, sfruttiamo la (W). Sia e una n-cella qualunque di X. Poiché $e \subseteq X_n$ e l'n-scheletro X_n è un sottocomplesso, pure $\overline{e} \subseteq X_n$; quindi $U \cap \overline{e} = U \cap (\overline{e} \cap X_n) = (U \cap X_n) \cap \overline{e} \Rightarrow U \cap \overline{e} = (U \cap X_n) \cap \overline{e}$. Ma $U \cap X_n$ è aperto in X_n per ipotesi, pertanto $U \cap \overline{e} = (U \cap X_n) \cap \overline{e}$ risulta essere un aperto di $\overline{e}$ rispetto alla topologia indotta da quella di X_n, che coincide con quella indotta da X su $\overline{e}$: pertanto $U \cap \overline{e}$ è aperto in $\overline{e}$ qualunque sia la cella e di X. Segue che U è aperto in X. □

Lemma 4.1.2. *Sia X un complesso CW e sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ la famiglia delle celle di X. Per ogni cella e_α, $\alpha \in A$, si consideri la seguente applicazione ϕ_α:*
(i) se e_α è 0-dimensionale, posto $D_\alpha = \overline{e_\alpha} = e_\alpha$, $\phi_\alpha : D_\alpha \to X$ è l'inclusione;
(ii) se e_α è di dimensione maggiore o uguale a 1, $\phi_\alpha : D_\alpha \to X$ è una funzione caratteristica per e_α.
Allora l'applicazione $\phi : \bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha \to X$ la cui restrizione ad ogni D_α coincide con ϕ_α è un'identificazione.

Dimostrazione. Definiamo le due seguenti applicazioni:
$\phi_1 : \bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha \to \bigsqcup_{\alpha\in A} \overline{e_\alpha}$, la cui restrizione ad ogni D_α è l'applicazione indotta $\phi_\alpha : D_\alpha \to \overline{e_\alpha}$,
$\phi_2 : \bigsqcup_{\alpha\in A} \overline{e_\alpha} \to X$, la cui restrizione ad ogni $\overline{e_\alpha}$ coincide con la funzione inclusione $\overline{e_\alpha} \hookrightarrow X$.
Osserviamo ora che:

1. $\phi_\alpha : D_\alpha \to \overline{e_\alpha} = \phi_\alpha(D_\alpha)$ è continua e suriettiva, e in più è chiusa in virtù del lemma dell'applicazione chiusa: perciò è un'identificazione $\forall \alpha \in A$;

2. per la Proposizione 1.5.3 punto (i), ϕ_1 è un'identificazione;

3. poiché dalla (W) la topologia di X è coerente con la famiglia di sottospazi $\{\overline{e_\alpha}\}_{\alpha\in A}$, dalla Proposizione 1.5.3 punto (ii) ϕ_2 è un'identificazione;

4. $\phi = \phi_2 \circ \phi_1 : \bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha \to X$ per definizione di ϕ_1 e ϕ_2.

Segue che ϕ è composizione di due identificazioni quindi essa stessa un'identificazione. $\square$

Ecco il teorema chiave della sezione.

Teorema 4.1.3. *Sia X un complesso CW. Sia $n \in \mathbb{N}^+$ e supponiamo che esista almeno una n-cella di X; allora l'n-scheletro X_n è ottenuto dall' $(n-1)$-scheletro X_{n-1} attaccando n-celle a quest'ultimo.*

Dimostrazione. Sia $\{e^n_\alpha\}_{\alpha\in A}$ la famiglia (non vuota per ipotesi) delle n-celle di X. Poiché $n \geq 1$, si consideri $\phi^n_\alpha : D^n_\alpha \to X$ una funzione caratteristica per ogni n-cella e^n_α. Per definizione di funzione caratteristica

$\phi^n_{\alpha|\partial D^n_\alpha} : \partial D^n_\alpha \to X_{n-1}$ è un'applicazione continua dal bordo ∂D^n_α all' $(n-1)$-scheletro X_{n-1}. Definiamo $\varphi : \bigsqcup_{\alpha\in A} \partial D^n_\alpha \to X_{n-1}$ come l'applicazione che ristretta ad ogni ∂D^n_α coincide con $\phi^n_{\alpha|\partial D^n_\alpha}$. Allora possiamo ben considerare, come abbiamo visto nella Sezione 2.1, lo spazio aggiunzione $X_{n-1} \cup_\varphi \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right)$. La tesi sarà dimostrata se proviamo che X_n è omeomorfo ad un tale spazio aggiunzione. A tal proposito, definiamo $\phi : X_{n-1} \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right) \to X_n$ come l'applicazione che coincide con l'inclusione su X_{n-1} e con ϕ^n_α quando ristretta ad ogni D^n_α. Dimostriamo che ϕ è un'identificazione e che la proiezione canonica sul quoziente $\pi : X_{n-1} \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right) \to X_{n-1} \cup_\varphi \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right)$ e $\phi : X_{n-1} \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right) \to X_n$ sono due identificazioni che passano l'una al quoziente rispetto all'altra: in questo modo la tesi seguirà dal Teorema di unicità del quoziente.

Partiamo dal provare che ϕ è un'identificazione. La suriettività di ϕ è ovvia dalla sua costruzione come applicazione (ogni punto dell'n-scheletro vive nella chiusura di una cella di dimensione minore o uguale a n, quindi proverrà o da sé stesso tramite un'inclusione oppure da un punto di D^n_α mediante la funzione caratteristica), mentre la continuità di ϕ segue dalla proprietà universale dell'unione disgiunta e dalla continuità di $X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ e di $\phi^n_\alpha : D^n_\alpha \to X_n$. Proviamo che la topologia su X_n è la topologia quoziente relativa a ϕ, il che equivale a dimostrare che $C \subseteq X_n$ è chiuso in X_n se e solo se $\phi^{-1}(C)$ è chiuso in $X_{n-1} \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right)$. Un'implicazione segue dalla continuità di ϕ. Supponiamo perciò che $\phi^{-1}(C)$ sia chiuso in $X_{n-1} \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right)$. Dalla Proposizione 1.4.5 punto (i) si ha che $\phi^{-1}(C)$ è chiuso in $X_{n-1} \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} D^n_\alpha \right)$ se e solo se $\phi^{-1}(C) \cap X_{n-1}$ è chiuso in X_{n-1} e $\phi^{-1}(C) \cap D^n_\alpha$ è chiuso in D^n_α $\forall \alpha \in A$. Osserviamo che:

1. $\phi(\phi^{-1}(C) \cap X_{n-1}) = C \cap \phi(X_{n-1}) =$ (ϕ è l'inclusione su X_{n-1}) $C \cap X_{n-1}$, e d'altra parte, essendo $\phi^{-1}(C) \cap X_{n-1} \subseteq X_{n-1}$ e ϕ coincidente con l'inclusione su X_{n-1}, $\phi(\phi^{-1}(C) \cap X_{n-1}) = i(\phi^{-1}(C) \cap X_{n-1}) = \phi^{-1}(C) \cap X_{n-1} \Rightarrow \phi^{-1}(C) \cap X_{n-1} = C \cap X_{n-1}$, ergo $C \cap X_{n-1}$ è chiuso in X_{n-1}. Poiché X_{n-1} è un sottocomplesso e quindi un complesso CW con la topologia indotta e la sua decomposizione, dalla condizione (W) applicata ad esso troviamo che $C \cap X_{n-1} \cap \overline{e}$ è chiuso in $\overline{e}$ per ogni cella

$e \subsetneq X_{n-1}$. Ma $C \cap X_{n-1} \cap \overline{e} = C \cap \overline{e}$ in quanto $\overline{e} \subseteq X_{n-1} \Rightarrow C \cap \overline{e}$ è chiuso in $\overline{e}$ per ogni cella e dell'$(n-1)$-scheletro X_{n-1}.

2. $\phi(\phi^{-1}(C) \cap D^n_\alpha) = C \cap \phi(D^n_\alpha) =$ (definizione di ϕ su D^n_α) $C \cap \phi^n_\alpha(D^n_\alpha) =$ (definizione di funzione caratteristica) $= C \cap \overline{e^n_\alpha}$, e d'altra parte, essendo $\phi^{-1}(C) \cap D^n_\alpha \subseteq D^n_\alpha$ e ϕ coincidente con ϕ^n_α su D^n_α, $\phi(\phi^{-1}(C) \cap D^n_\alpha) = \phi^n_\alpha(\phi^{-1}(C) \cap D^n_\alpha)$. Segue che $C \cap \overline{e^n_\alpha} = \phi^n_\alpha(\phi^{-1}(C) \cap D^n_\alpha)$. Poiché $\phi^n_\alpha : D^n_\alpha \to \overline{e^n_\alpha}$ è chiusa per il lemma dell'applicazione chiusa e $\phi^{-1}(C) \cap D^n_\alpha$ è chiuso in D^n_α, $C \cap \overline{e^n_\alpha}$ è un chiuso di $\overline{e^n_\alpha}$. Questo vale per ogni n-cella e^n_α.

In sostanza, abbiamo dimostrato che per ogni cella $e \subseteq X_n$ si ha che $C \cap \overline{e}$ è chiuso in $\overline{e}$. Ma X_n è un complesso CW con la topologia indotta e la sua decomposizione, e quindi applicando la (W) ad X_n segue che C è chiuso in X_n. Quindi ϕ è un'identificazione.
Concludiamo provando che ϕ e π passano l'una al quoziente rispetto all'altra. Due elementi $x, y \in X_{n-1} \sqcup \left(\bigsqcup_{\alpha \in A} D^n_\alpha \right)$ sono tali che $\pi(x) = \pi(y)$ se e solo se $x \sim y$; ma per definizione della relazione di equivalenza $\sim$ che definisce lo spazio aggiunzione, $x \sim y$ se e solo se si presenta una delle seguenti eventualità:

1. se $x \in X_{n-1}$ e $y \in \bigsqcup_{\alpha \in A} D^n_\alpha$, quando $x = \varphi(y)$;

2. se $x, y \in X_{n-1}$, quando $x = y$;

3. se $x, y \in \bigsqcup_{\alpha \in A} D^n_\alpha$, quando $x = y$ oppure $\varphi(x) = \varphi(y)$,

e quindi in sostanza, per definizione di φ e di ϕ, se e solo se $\phi(x) = \phi(y)$. Quindi $\pi(x) = \pi(y)$ se e solo se $\phi(x) = \phi(y)$ e pertanto ϕ, π passano l'una al quoziente rispetto all'altra. $\square$

4.2 Il Teorema di Costruzione CW

Il prossimo teorema, di cui omettiamo la dimostrazione per brevità (rimandiamo a [2] il lettore interessato, la prova non risulta difficile ma alquanto tecnica), mostra la costruzione induttiva esplicita di un complesso CW per attaccamento di n-celle. Esso rappresenta in una certa misura un viceversa della Proposizione 4.1.1 e del Teorema 4.1.3.

Teorema 4.2.1. ***(Il Teorema di Costruzione CW)*** *Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di spazi topologici soddisfacenti le seguenti condizioni:*

(i) X_0 *è uno spazio discreto non vuoto;*
(ii) se $n \geq 1$, X_n *è ottenuto da* X_{n-1} *attaccando una collezione di* n*-celle (eventualmente vuota).*
Allora l'unione $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *possiede un'unica topologia coerente con la famiglia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ed un'unica decomposizione in celle che la rende un complesso CW, il cui* n*-scheletro è dato da* X_n $\forall n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 4.2.2. A questo punto, visti i Teoremi 4.1.3 e 4.2.1, risulta più chiara la scelta della definizione di complesso di celle adottata nel Capitolo 2: essa contiene al suo interno (potremmo dire intrinsecamente) l'idea intuitiva di complesso e rappresenta un utile strumento per lo sviluppo di una teoria rigorosa ma tutto sommato "semplice". Gli esempi (presenti sempre nel Capitolo 2) riguardanti la sfera $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{R}$ sono molto di "frontiera" fra il rigore e l'intuizione, in quanto seppur presentati con il formalismo della definizione raccolgono in sé stessi (anche in maniera abbastanza esplicita) l'idea dell'attaccamento delle celle e della costruzione induttiva sia del complesso che del suo scheletro.

4.3 Complessi CW come varietà

In questa ultima sezione vedremo una condizione sufficiente affinché un complesso CW sia una varietà topologica e un teorema che illustra, qualora una varietà ammetta una decomposizione CW, un utile legame fra la dimensione dello spazio come varietà e come complesso CW.

Proposizione 4.3.1. *Sia* X *un complesso CW la cui decomposizione CW è costituita da una quantità al più numerabile di celle. Se* X *è localmente euclideo, allora è una varietà topologica.*

Dimostrazione. Il Lemma 4.1.2 ci dice che X è lo spazio quoziente di un'unione disgiunta $\bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha$ di n-celle chiuse di varie dimensioni. Inoltre, poiché la decomposizione è costituita da una quantità al più numerabile di celle, A è al più numerabile. Ma D_α è secondo numerabile $\forall \alpha \in A$ (è una n-cella chiusa) e l'insieme degli indici A è al più numerabile, pertanto dalla Proposizione 1.4.5 punto (iv) $\bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha$ è secondo numerabile. Poiché X è uno spazio quoziente di $\bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha$ ed è localmente euclideo, in virtù del fatto che $\bigsqcup_{\alpha\in A} D_\alpha$ è secondo numerabile, dalla Proposizione 1.5.2 pure X è secondo numerabile. Quindi X è di Hausdorff, secondo numerabile e localmente euclideo, ossia una varietà topologica. $\square$

Teorema 4.3.2. *Sia X una varietà topologica di dimensione n non vuota la quale ammette una struttura di complesso CW. Allora come complesso CW X è finito-dimensionale e la sua dimensione coincide con n.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.8.16, essendo X una varietà topologica, essa è localmente compatta. Allora dal Teorema 3.3.1 la decomposizione CW di X dev'essere localmente finita. Pertanto, dato $x \in X$ arbitrario, esiste un intorno di x $U \subseteq X$ che interseca solamente un numero finito di chiusure delle celle di X; l'esistenza di un tale intorno è garantita dal Lemma 1.2.7. Dato che U interseca solamente un numero finito di chiusure delle celle di X, possiamo considerare $k \in \mathbb{N}$ la massima dimensione delle celle di X la cui chiusura interseca U. Sia e_0 una k-cella aperta della massima dimensione k tale che si abbia $U \cap \overline{e_0} \neq \emptyset$. Sia $p \in U \cap \overline{e_0}$, ossia $p \in U$ e $p \in \overline{e_0}$. Poiché $p \in \overline{e_0}$ e d'altra parte U è un intorno di p, dalla caratterizzazione della chiusura U deve contenere anche punti di e_0, ossia $V := U \cap e_0 \neq \emptyset$. Poiché U è un aperto di X, $V = U \cap e_0$ è un aperto di e_0; ma e_0 è una k-varietà topologica (è una k-cella!) e quindi, per la Proposizione 1.3.10, $V = U \cap e_0$ è una k-varietà topologica. Se ora riuscissimo a dimostrare che V è aperto anche in X, sempre dalla Proposizione 1.3.10 si avrebbe che V è pure una n-varietà topologica (infatti, X lo è per ipotesi). Poiché $V \neq \emptyset$, invocando il Teorema di invarianza topologica della dimensione si avrebbe $k = n$. Prima di dimostrare che effettivamente V è un aperto di X, osserviamo che tutto ciò concluderebbe la dimostrazione del teorema. Infatti si sarebbe dimostrato che, per arbitrarietà di $x \in X$, ogni punto di X ammette un intorno che non può intersecare celle di dimensione maggiore di n; se adesso per assurdo esistesse nella decomposizione una cella e di dimensione maggiore di n, $\forall x \in e$ e per ogni intorno U di x, U interseca una cella di dimensione strettamente maggiore di n, in contraddizione con quanto avremmo provato poco prima.
Dimostriamo perciò per concludere che il famigerato $V = U \cap e_0$ è un aperto di X. Per farlo, usiamo la condizione (W). Ci basterà di fatto considerare solamente le celle di X le cui chiusure hanno intersezione non vuota con U, in quanto $V \subseteq U$ (per le altre celle, infatti, l'intersezione di V con la chiusura sarà automaticamente vuota, essendo $V \subseteq U$: quindi tale intersezione sarà senz'altro aperta nella chiusura). In primo luogo, notiamo che $V \cap \overline{e_0} = U \cap e_0 \cap \overline{e_0} = (e_0 \subseteq \overline{e_0})\ U \cap e_0 \Rightarrow V \cap \overline{e_0} = U \cap e_0$. Ma $U \cap e_0$ è aperto in e_0 e di conseguenza in $\overline{e_0}$, essendo e_0 aperto in $\overline{e_0}$ (questo fatto è banale se e_0 è 0-dimensionale; altrimenti, si consideri una funzione caratteristica e si ragioni come nella Proposizione 2.2.14, dove abbiamo dimostrato che ogni cella di dimensione maggiore o uguale a 1 è aperta nella sua chiusura). Quindi $V \cap \overline{e_0}$ è aperto in $\overline{e_0}$. Sia ora e un'altra cella di X la cui chiusura $\overline{e}$ è tale che $U \cap \overline{e} \neq \emptyset$. Poiché $V = U \cap e_0 \subseteq e_0$ ed $e_0 \neq e$, essendo le celle aperte disgiunte

si trova che $V \cap e = \emptyset$. Invece, $\overline{e} \setminus e$ o è vuoto (se e è 0-dimensionale) oppure è sempre contenuto nell'unione delle celle di dimensione strettamente minore di quella di e e quindi di k, essendo k la massima dimensione delle celle la cui chiusura ha intersezione non banale con U (quest'ultima affermazione, vera quando la dimensione di e è nonnulla, segue dall'Osservazione 2.2.20). Quindi pure in tal caso, essendo $V \subseteq e_0$, e_0 di dimensione k e le celle disgiunte, $V \cap (\overline{e} \setminus e) = \emptyset$. Segue che $V \cap \overline{e} = (V \cap e) \cup (V \cap (\overline{e} \setminus e)) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \Rightarrow V \cap \overline{e} = \emptyset$, il quale è aperto in $\overline{e}$. Pertanto $V \cap \overline{e}$ è aperto in $\overline{e}$ qualunque sia la cella $e \subseteq X$: dalla (W) V è aperto in X. $\square$

Conclusioni

Si può affermare abbastanza tranquillamente che, con tutta la breve teoria qui sviluppata sui complessi di celle, è possibile dimostrare alcune cose di rilievo sulle 1-varietà topologiche. Anzi, di fatto si possono completamente classificare le 1-varietà usando solamente gli strumenti della trattazione.
Il primo passo consiste nel provare che ogni 1-varietà topologica non vuota ammette una decomposizione CW regolare. Dal Teorema 4.3.2, questo vuol dire che ogni 1-varietà possiede una struttura di complesso CW regolare 1-dimensionale. In secondo luogo, si dimostra che in una 1-varietà non vuota munita di una decomposizione CW regolare, la frontiera di ogni 1-cella è costituita esattamente da due 0-celle e che ogni 0-cella è punto di frontiera per esattamente due 1-celle. Una volta metabolizzati i due risultati precedenti, si può enunciare il Teorema di classificazione delle 1-varietà topologiche: se X è una 1-varietà topologica non vuota e connessa, allora X è omeomorfa alla circonferenza $\mathbb{S}^1$ se è compatta, mentre a $\mathbb{R}$ se non è compatta. Da questo teorema, usando il *double* di una varietà con bordo (Esempio 1.6.4), si ottiene come corollario la classificazione delle 1-varietà con bordo: se X è una 1-varietà con bordo non vuoto connessa, allora X è omeomorfa a $[0, 1]$ se è compatta, mentre è omeomorfa a $[0, 1)$ se non è compatta. Si rimanda a [2] il lettore interessato alla dimostrazione di tutti questi risultati.
Tutto questo porta a pensare che, di fatto, i complessi di celle giochino un ruolo importante nella teoria delle varietà, come abbiamo accennato nell'introduzione. I due teoremi precedentemente enunciati lo dimostrano. Effettivamente, i complessi entrano in azione anche per questioni riguardanti le varietà di dimensione superiore a 1. Tuttavia, questa è un'altra storia ...

Bibliografia

[1] Loi, Andrea, *Introduzione alla topologia generale (2013)*, Aracne

[2] Lee, John M., *Introduction to topological manifolds (2011)*, Second Edition, Springer