# Il Teorema di Bonnet

Candidato:
**Simone Carta**

Relatore:
**Prof. Andrea Loi**

Università degli Studi di Cagliari

25 Luglio 2017

# Il Teorema di Bonnet

## Il Teorema

Sia $M$ una superficie connessa, geodeticamente completa e con curvatura di Gauss $K \geq k > 0$ per una certa costante $k$, allora $M$ è compatta, inoltre il suo diametro è $\leq \pi/\sqrt{k}$ e la sua area $\leq 4\pi/k$.

# Applicazione esponenziale

## Definizione

Dato $\mathbf{p} \in M$, denotiamo con $\gamma_v$ la geodetica di $M$ uscente da $\mathbf{p}$ con velocità iniziale $\mathbf{v}$. Definiamo l'applicazione esponenziale

$$exp_p : T_pM \longrightarrow M, \quad v \longmapsto \gamma_v(1)$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_pM$ tale che $\gamma_v$ sia definita sull'intervallo $[0, 1]$.

# Applicazione esponenziale

## Definizione

Dato $\mathbf{p} \in M$, denotiamo con $\gamma_v$ la geodetica di $M$ uscente da $\mathbf{p}$ con velocità iniziale $\mathbf{v}$. Definiamo l'applicazione esponenziale

$$exp_p : T_pM \longrightarrow M, \quad v \longmapsto \gamma_v(1)$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_pM$ tale che $\gamma_v$ sia definita sull'intervallo $[0, 1]$.

## Proprietà

$exp_p$ gode delle seguenti proprietà:

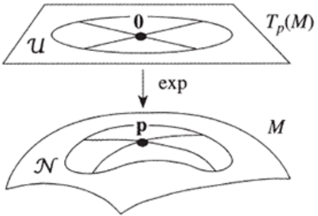
- È un diffeomorfismo locale;
- $exp_p(t\mathbf{v}) = \gamma_v(t)$.

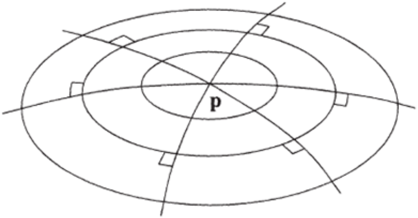
# Coordinate polari generalizzate

Scelto un riferimento $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ in $TpM$, definiamo

$$\mathbf{x}(u, v) = exp_p(u \cos v\, \mathbf{e}_1 + u \sin v\, \mathbf{e}_2) \quad 0 \leq u \leq b,\ 0 \leq v < 2\pi$$

Queste si dicono **coordinate polari generalizzate** su $M$. Sono definite in un intorno del punto $\mathbf{p}$, detto polo.
Per $\mathbf{x}(u, v)$ si dimostra che $E = 1,\ F = 0, G(u, v) > 0$ se $u > 0$.



# Superfici complete

## Definizione

Una superficie $M$ si dice **geodeticamente completa**, o semplicemente **completa**, se ogni sua geodetica può essere parametrizzata su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

# Superfici complete

**Definizione**

Una superficie $M$ si dice **geodeticamente completa**, o semplicemente **completa**, se ogni sua geodetica può essere parametrizzata su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

**Teorema (di Hopf-Rinow)**

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ di una superficie $M$ completa e connessa esiste un segmento di geodetica $\sigma$ che li congiunge avente lunghezza minima, cioè $L(\sigma) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, dove $\boldsymbol{\rho}$ è la distanza sulla superficie.

# Superfici complete

### Definizione

Una superficie $M$ si dice **geodeticamente completa**, o semplicemente **completa**, se ogni sua geodetica può essere parametrizzata su tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

### Teorema (di Hopf-Rinow)

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ di una superficie $M$ completa e connessa esiste un segmento di geodetica $\sigma$ che li congiunge avente lunghezza minima, cioè $L(\sigma) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, dove $\boldsymbol{\rho}$ è la distanza sulla superficie.

### Corollario

Per ogni punto $\mathbf{p}$ di una superficie $M$ completa e connessa $exp_p$ è definita su tutto $T_pM$ ed è suriettiva.

# Geodetiche di lunghezza minima e punti coniugati

**Definizione**

Un segmento di geodetica $\gamma$ da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ in $M$ **minimizza localmente** la lunghezza d'arco se $L(\gamma) \leq L(\alpha)$ per ogni segmento di curva $\alpha$ che congiunge $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, sufficientemente vicina a $\gamma$.
Diciamo che $\gamma$ è unica se vale il minore stretto, eccetto quando $\alpha$ è una riparametrizzazione di $\gamma$.

# Geodetiche di lunghezza minima e punti coniugati

**Definizione**

Un segmento di geodetica $\gamma$ da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ in $M$ **minimizza localmente** la lunghezza d'arco se $L(\gamma) \leq L(\alpha)$ per ogni segmento di curva $\alpha$ che congiunge $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, sufficientemente vicina a $\gamma$.
Diciamo che $\gamma$ è unica se vale il minore stretto, eccetto quando $\alpha$ è una riparametrizzazione di $\gamma$.

**Definizione**

Un punto $\mathbf{q} = \gamma(s) = \mathbf{x}(s, v_0), s > 0$ è detto **punto coniugato** di $\mathbf{p} = \gamma(0)$ lungo $\gamma$ se $G(s, v_0) = 0$.

**Teorema (di Jacobi)**

Un segmento di geodetica $\gamma$ da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ rende minima (strettamente) la lunghezza d'arco se e solo se non vi sono punti coniugati di $\mathbf{p} = \gamma(0)$ lungo $\gamma$.

## Teorema (di Jacobi)

Un segmento di geodetica $\gamma$ da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ rende minima (strettamente) la lunghezza d'arco se e solo se non vi sono punti coniugati di $\mathbf{p} = \gamma(0)$ lungo $\gamma$.

## Criterio

Data su $M$ una geodetica unitaria $\gamma$ con $\gamma(0) = \mathbf{p}$, sia $g(s)$ l'unica soluzione dell'equazione di Jacobi

$$g'' + K(\gamma)g = 0, \quad g(0) = 0,\ g'(0) = 1$$

I punti coniugati di $\mathbf{p}$ lungo $\gamma$ sono i punti $\gamma(s), s > 0$ per cui $g(s) = 0$.

# Esempio

Sia $\Sigma$ la sfera di raggio $r > 0$, la sua curvatura è $K = 1/r^2$. Se $\gamma(s)$ è una geodetica su $\Sigma$, con $\gamma(0) = \mathbf{p}$, l'equazione di Jacobi per $\gamma$ è $g'' + g/r^2 = 0$. La sua soluzione generale è

$$g(s) = A\, sin\left(\frac{s}{r}\right) + B\, cos\left(\frac{s}{r}\right)$$

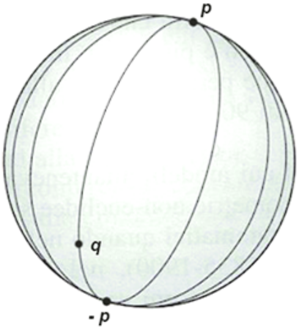
Le condizioni iniziali $g(0) = 0, g'(0) = 1$ danno

$$g(s) = r\, sin\left(\frac{s}{r}\right)$$

Il primo zero $s_1 > 0$ si ha per $s_1 = \pi r$, cioè in corrispondenza del punto antipodale $-\mathbf{p}$.

# Esempio

Per $-\mathbf{p}$ infatti la geodetica che minimizza la lunghezza d'arco non è unica.




Per ogni altro $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}, -\mathbf{p}$ invece, si ha l'unicità.

# Il Teorema di Bonnet

Sia $M$ una superficie connessa, geodeticamente completa e con curvatura di Gauss $K \geq k > 0$ per una certa costante $k$, allora $M$ è compatta, inoltre il suo diametro è $\leq \pi/\sqrt{k}$ e la sua area $\leq 4\pi/k$.

# Dimostrazione del Teorema

La dimostrazione si compone di tre parti:

- $diam(M) \leq \pi/\sqrt{k}$;
- $M$ è compatta;
- $area(M) \leq 4\pi/k$.

# Alcuni Lemmi

## Lemma 1

Siano $M$ una superficie con curvatura $K \geq k > 0$ per una certa costante $k$, $\gamma(s) = \mathbf{x}(s, v_0)$ una geodetica uscente da $\mathbf{p} = \gamma(0)$ e $s_1(v_0)$ il primo punto coniugato di $\mathbf{p}$ lungo $\gamma$, allora

$$\sqrt{G}(s, v_0) \leq \frac{sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}} \quad \text{in } (0, s_1(v_0)).$$

## Lemma 2

Siano $M$ una superficie con curvatura $K \geq k > 0$ e $\sigma$ un segmento di geodetica avente origine in $\mathbf{p} \in M$. Se $L(\sigma) \geq \pi/\sqrt{k}$, allora $\mathbf{p}$ ha un punto coniugato lungo $\sigma$.

# Dimostrazione (prima parte)

$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \pi/\sqrt{k} \quad \forall\, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in M.$

Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$, per il Teorema di Hopf-Rinow esiste un segmento di geodetica $\sigma$ avente lunghezza minima che li congiunge, ossia

$$L(\sigma) = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

## Dimostrazione (prima parte)

$\rho(\mathbf{p},\mathbf{q}) \leq \pi/\sqrt{k} \quad \forall\, \mathbf{p},\mathbf{q} \in M.$

Siano $\mathbf{p},\mathbf{q} \in M$, per il Teorema di Hopf-Rinow esiste un segmento di geodetica $\sigma$ avente lunghezza minima che li congiunge, ossia

$$L(\sigma) = \rho(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

Dal Teorema di Jacobi e dal Lemma 2 segue che

$$\rho(\mathbf{p},\mathbf{q}) = L(\sigma) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

# Dimostrazione (seconda parte)

$M$ è compatta.

Sia $\mathbf{p} \in M$; l'applicazione $exp_p$ è definita su tutto $T_pM$.
Il disco chiuso $D = \{\mathbf{v} \in T_pM \mid \|\mathbf{v}\| \leq \pi/\sqrt{k}\}$ è tale che:

$$exp_p(D) = M$$

# Dimostrazione (terza parte)

$area(M) \leq 4\pi/k.$

Supposta $M$ parametrizzata in coordinate polari $\mathbf{x}(s, v)$, la sua area è data da

$$\iint_M \sqrt{EG - F^2}\, ds\, dv = \iint_M \sqrt{G}\, ds\, dv$$

## Dimostrazione (terza parte)

$$area(M) \leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{s_1(v)} \sqrt{G}\, ds$$

# Dimostrazione (terza parte)

$$area(M) \leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{s_1(v)} \sqrt{G}\, ds \leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{s_1(v)} \frac{sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}\, ds$$

## Dimostrazione (terza parte)

$$area(M) \leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{s_1(v)} \sqrt{G}\, ds \leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{s_1(v)} \frac{sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}\, ds$$

$$\leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/\sqrt{k}} \frac{sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}\, ds$$

# Dimostrazione (terza parte)

$$area(M) \leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{s_1(v)} \sqrt{G}\, ds \leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{s_1(v)} \frac{sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}\, ds$$

$$\leq \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/\sqrt{k}} \frac{sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}}\, ds = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \int_0^{\pi/\sqrt{k}} sin(\sqrt{k}s)\, ds$$

$$= \frac{2\pi}{k} \left[-cos(\sqrt{k}s)\right]_0^{\pi/\sqrt{k}}$$

$$= \frac{4\pi}{k}$$