UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Facoltà di Scienze

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Informatica

L'APPLICAZIONE ESPONENZIALE PER I GRUPPI DI LIE $SO(n)$ *E* $SE(n)$

Relatore:

Prof. Loi Andrea

Tesi di Laurea Magistrale di:

Cannata Roberto

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

L'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie è uno strumento fondamentale per passare da un problema geometrico-topologico del gruppo di Lie ad un problema lineare dell'algebra di Lie associata al gruppo. L'obiettivo della tesi è dimostrare in quali casi tale applicazione è suriettiva, in particolare verranno studiati i casi per i gruppi di matrici $SO(n)$ e $SE(n)$, rispettivamente il *Gruppo Ortogonale Speciale* e il *Gruppo Euclideo Speciale*. Sapere che per tali gruppi l'applicazione esponenziale è suriettiva è un risultato importante sia dal punto di vista puramente matematico, in quanto ad esempio ci permettere di dare una caratterizzazione del gruppo $SO(n)$ e quindi di tutte le rotazioni di $\mathbb{R}^n$, ma si è rivelato essere utile anche nello studio del *Motion Interpolation* come mostrato in [10].
E' risaputo che l'applicazione esponenziale è suriettiva nel caso in cui il gruppo di Lie sia connesso e compatto, tuttavia proponiamo una maniera alternativa per dimostrare la suriettività per i gruppi sopracitati, utilizzando la *Formula di Rodrigues*, che permette di trasformare la somma infinita che definisce l'applicazione esponenziale in una somma finita. Questo strumento sarà fondamentale sopratutto per il gruppo $SE(n)$, giacché risulta non essere compatto.
La tesi è organizzata in 4 Capitoli, ognuno dei quali pensato per fornire gli strumenti per capire i successivi: nel primo verranno affrontati i concetti base della geometria differenziale, facendo riferimento ai tesi [2] e [3]; il secondo e il terzo capitolo sono dedicati rispettivamente i Gruppi di Lie e le Algebre di Lie, seguendo l'approccio usato principalmente nei testi [4], [5] e [6] per arrivare alla definizione di applicazione esponenziale, di cui verrà trattata la suriettività nel Capitolo 4, oggetto dell'articolo [1] e di [7].
Nello specifico:

- nel Capitolo 1 si parlerà di Varietà Differenziabili, Applicazioni C^∞ tra queste, Spazi Tangenti, Sottovarietà e come costruirle partendo da applicazioni C^∞.

Si vedranno inoltre numerosi esempi, e una particolare attenzione sarà data allo studio delle sottovarietà di $GL_n(\mathbb{R})$, come $O(n)$;

- il Capitolo 2 tratterà dei Gruppi di Lie e dei Sottogruppi di Lie, ponendo l'attenzione ai Gruppi Di Matrici, per poi definire l'applicazione *esponenziale di matrici*;

- nel Capitolo 3 verranno definite le Algebre di Lie e le Sottoalgebre di Lie, con esempi del caso, per poi arrivare a definire l'algebra di Lie di un gruppo di Lie e l'*applicazione esponenziale* tra un Algebra di Lie e il suo Gruppo di Lie associato, e verrà mostrato come, nel caso dei Gruppi di Matrici, tale applicazione coincida con l'esponenziale di matrici definita nel Capitolo 3;

- nel Capito 4 si tratterà la suriettività dell'applicazione esponenziale per i gruppo $SO(n)$ e $SE(n)$ grazie alla formula di Rodrigues. Verranno inoltre fornite le dimostrazioni esplicite per i casi $n = 2$ e $n = 3$, e si proverà a generalizzare i risultati al caso $n \geq 4$.

Capitolo 1

Elementi di Geometria Differenziale

Sia M una *varietà topologica* di dimensione n, ovvero uno spazio topologico di Hausdorff, con una base numerabile di sottoinsiemi aperti e con la proprietà di essere *localmente euclideo di dimensione n*, ovvero tale che $\forall p \in M$ esiste un aperto $U \subset M$, $p \in U$, e un omeomorfismo $\varphi\colon U \to \varphi(U)$, dove $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$. La coppia (U, φ) è detta *carta* (o *carta locale* intorno a $p \in M$. Una famiglia di carte $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ si dice *atlante* se $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Definizione 1.0.1. Siano M una varietà topologia, $p \in M$ e (U, φ), (V, ψ) due carte intorno a p. Diremo che le carte (U, φ), (V, ψ) sono C^∞-compatibili (o compatibili) se $U \cap V \neq \emptyset$ e se le applicazioni tra aperti di $\mathbb{R}^n$ che definiscono il *cambiamento di coordinate*, date da:

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$
$$\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

sono applicazioni C^∞ tra aperti di $\mathbb{R}^n$.
Un atlante (detto anche atlante C^∞) è una famiglia di carte locali $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ e le carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) sono compatibili $\forall \alpha, \beta$.
Se una carta locale (V, ψ) è compatibile con tutte le carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ dell'atlante, allora la carta (V, ψ) si dice *compatibile con l'atlante.*

Definizione 1.0.2 (Varietà differenziabile)**.** Una *struttura differenziabile* su una varietà topologica M è un atlante C^∞ $\tilde{M}= \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che sia *massimale*, ovvero che soddisfi la seguente proprietà:

- Se una carta locale (V, ψ) è compatibile con ogni $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \tilde{M}$, allora $(V, \psi) \in \tilde{M}$

Una varietà topologica M munita di una struttura differenziabile è detta **varietà differenziabile**.

Utilizzare la definizione appena data per trovare degli esempi di varietà differenziabili spesso risulta complicato. Per questo motivo di seguito proviamo una proprietà che ci permetterà di trovare una varietà differenziabile "semplicemente" trovando un atlante C^∞. Per fare ciò prima proviamo il seguente

Lemma 1.0.1. *Sia M una varietà topologica, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante C^∞ di M e due carte locali (U, σ),(V, ψ) intorno a $p \in M$, entrambi compatibili con l'atlante. Allora (U, σ) e (V, ψ) sono tra di loro compatibili.*

Dimostrazione. Sia $p \in M$ e siano (U, σ) e (V, ψ) tali che $p \in U \cap V$. Dobbiamo dimostrare che le applicazioni seguenti sono C^∞.

$$\sigma \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap V) \to \sigma(U \cap V),$$
$$\psi \circ \sigma^{-1} \colon \sigma(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

Proviamo che $\sigma \circ \psi^{-1}$ è C^∞. Essendo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante, $\exists \alpha$ tale che $p \in U_\alpha$, e dunque $p \in U_\alpha \cap U \cap V$.
Per ipotesi, le carte (U, σ) e (V, ψ) compatibili con l'atlante, allora le applicazioni seguenti sono tutte C^∞

$$\sigma \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \sigma(U \cap U_\alpha), \quad \varphi_\alpha \circ \sigma^{-1} \colon \sigma(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$
$$\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \to \psi(U_\alpha \cap V), \quad \varphi_\alpha \circ \psi^{-1} \colon \psi(U_\alpha \cap V) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$$

Nell'aperto $U_\alpha \cap U \cap V$, possiamo scrivere l'applicazione $\sigma \circ \psi^{-1}$ come:

$$\sigma \circ \psi^{-1} = (\sigma \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}).$$

Avendo scritto in questo modo $\sigma \circ \psi^{-1}$ come composizione di applicazioni C^∞, si ha che quest'ultima è C^∞, che è quello che si voleva dimostrare. Analogamente si prova che $\psi \circ \sigma^{-1}$ è C^∞. □

Grazie a questo lemma possiamo dimostrare la proprietà seguente che, come anticipato, ci permette di stabilire se una varietà topologica è differenziabile senza trovarne la struttura differenziabile, ovvero senza trovare un atlante massimale richiesto nella Definizione 1.0.2.

Proposizione 1.0.1. *Sia M una varietà topologica e $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante C^∞. Allora $\exists!$ struttura differenziabile $\tilde{M}$ su M tale che $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \subset \tilde{M}$.*

Dimostrazione. Siano $\{(U_i, \varphi_i)\}$ la famiglia composta delle carte locali di M compatibili con l'atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Definiamo

$$\tilde{\mathrm{M}} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \cup \{(U_i, \varphi_i)\}.$$

$\tilde{\mathrm{M}}$ è un atlante in quanto, per il lemma precedente, tutte le carte sono compatibili tra di loro e inoltre formano un ricoprimento per M, in quanto già gli aperti U_α sono tali che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. $\tilde{\mathrm{M}}$ è anche massimale per costruzione. Se inoltre M' fosse un atlante massimale tale che $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \subset M'$, per definizione la famiglia $\{(U_i, \varphi_i)\} \subset M'$, e quindi $M' = \tilde{\mathrm{M}}$, da cui l'unicità. $\square$

Esempio 1.0.1. M=$\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$. Sappiamo essere una varietà topologica di dimensione n. Consideriamo l'atlante topologico formato dall'unica carta $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$. L'applicazione identità è C^∞, quindi di fatto $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ è un atlante C^∞. Per la proposizione (1.0.1) $\exists!$ struttura differenziabile su $\mathbb{R}^n$ che contiene la carta $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$, e quindi $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile di dimensione n.

Esempio 1.0.2. M=$M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 0$. Poiché $M_n(\mathbb{R}) = R^{n^2}$, per l'esempio precedente si ha che $M_n(\mathbb{R})$ è una varietà differenziabile di dimensione n^2.

Esempio 1.0.3. Sia M una varietà differenziabile. Un sottoinsieme $U \subset M$ aperto di M è anch'esso una varietà differenziabile, infatti ha una struttura differenziabile composta dalla famiglia di carte locali $(V'_\alpha, \psi'_\alpha)$ con ψ'_α ottenute tramite la restrizione di φ_α di quelle carte locali $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ di M che intersecano U, all'aperto $V'_\alpha = U \cap U_\alpha$, ovvero:

$$\psi'_\alpha = \varphi_{\alpha|V_\alpha}.$$

Esempio 1.0.4. Consideriamo la varietà differenziabile $M_n(\mathbb{R})$ e sia $U = GL_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici non singolari, ovvero

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}.$$

Possiamo dunque scrivere $GL_n(\mathbb{R})$ come la controimmagine dell'aperto di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ di $\mathbb{R}$ tramite l'applicazione continua $det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
Quindi $GL_n(\mathbb{R})$ è un aperto di $M_n(\mathbb{R})$ ergo, per l'esempio precedente, è una varietà differenziabile.

Esempio 1.0.5. Siano N, M due varietà differenziabili, con $dimN = n$, $dimM = m$. Allora $N \times M$ è una varietà differenziabile, con $dim(N \times M) = dimN + dimM$. Infatti, prese le strutture differenziali $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ rispettivamente di N e M, la famiglia di carte $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ è un altante C^∞ su $N \times M$, dove:

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta \colon U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^{n+m}, \quad \varphi_\alpha \times \psi_\beta(p,q) = (\varphi_\alpha(p), \phi_\alpha(q)).$$

1.1 Applicazioni C^∞ tra varietà differenziabili

Sia M una varietà differenziabile, $p \in M$ e sia $f\colon M \to R$ una funzione. Diremo che f è una *funzione* C^∞ in p se $\exists$ una carta locale (U, φ) tale che $p \in U$ e l'applicazione

$$f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

è una funzione C^∞ (tra $\varphi(U)$ aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$) nel punto $\varphi(p)$. Diremo che f è C^∞ in M se è C^∞ $\forall p \in M$, e indicheremo con $C^\infty(M)$ l'insieme delle funzioni C^∞ in M.
Notiamo che la definizione data non dipende dalla scelta della carta (U, φ), infatti se (V, ψ) fosse un altra carta tale che $p \in V$, allora $p \in U \cap V$, e si ha:

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}).$$

Essendo f una funzione C^∞, si ha che $f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ è C^∞ per definizione, mentre $\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$ è C^∞ essendo l'applicazione del cambio di coordinate. Poiché composizione di applicazioni C^∞, anche $f \circ \psi^{-1}$ lo è nel punto $\psi(p)$, il che prova che la definizione non dipende dalla carta scelta.
Da notare inoltre che una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ $\quad C^\infty$ è continua.

Definizione 1.1.1. Siano N, M varietà differenziabili, con $dim(N) = n$ e $dim(M) = m$, $F\colon N \to M$ un'applicazione e $p \in N$. Diremo che F è C^∞ in p se F è continua e se esistono una carta locale di (U, φ) di N, con $p \in U$, e una carta locale (V, ψ), con

$F(p) \in V$ tali che l'applicazione

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

è C^∞ in $\varphi(p)$ come applicazione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Diremo che F è C^∞ in N se è C^∞ $\forall p \in N$.

Facciamo le seguenti osservazioni:

1. Sia N varietà differenziabile e $F \colon N \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione continua. Allora F è C^∞ in $p \in M$ se esiste una carta locale di N (U, φ) tale che $p \in U$ e l'applicazione

   $$F \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$$

   è C^∞ nel punto $\varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Questo perché nella definizione (1.1.1), per $\mathbb{R}^m$ si può considerare l'unica carta locale $(R^m, id_{\mathbb{R}^m})$. Nel caso $m = 1$, la definizione (1.1.1) coincide con quella di funzione C^∞;

2. Similmente a quanto fatto per le funzioni C^∞, si dimostra che la definizione (1.1.1) non dipende dalle carte (U, φ) di N e (V, ψ) di M scelte;

3. La restrizione di un'applicazione C^∞ ad un sottoinsieme aperto è anch'essa C^∞;

4. La composizione di applicazioni C^∞ è C^∞.

Un applicazione $F \colon N \to M$, con N, M varietà differenziabili, è un *diffeomorfismo* se F è C^∞, invertibile e la sua inversa F^{-1} è anch'essa C^∞. Diremo che N, M sono *diffeomorfe* se esiste $F \colon N \to M$ diffeomorfismo.
Un'applicazione $F \colon N \to M$ C^∞ si dice *diffeomorfismo locale* in $p \in N$ se $\exists$ una carta intorno a p (U, φ) tale che $F(U)$ è un aperto di M e la restrizione

$$F|_U \colon U \to F(U)$$

è un diffeomorfismo.

Esempio 1.1.1. Sia M una varietà differenziabile, $p \in M$, e sia (U, φ) una carta locale tale che $p \in U$. Allora $\varphi \colon U \to \varphi(U)$ è un'applicazione C^∞, in particolare è un diffeomorfismo. Infatti per definizione di carta locale, $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e quindi a sua volta una varietà differenziabile. Inoltre (U, φ) è una carta per la varietà differenziabile $U \subset M$. Ergo $\forall q \in U$, consideriamo (U, φ) come carta intorno a q e la carta $(\varphi(U), id_{\varphi(U)})$ di $\varphi(U)$ intorno a $\varphi(q)$. L'applicazione

$$id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \varphi(U)$$

non è altro che $d_{\varphi(U)}$ e quindi è C^∞. Analogamente si dimostra che φ^{-1} (che ovviamente esiste poiché φ è un omeomorfismo) è C^∞ e quindi φ è un diffeomorfismo tra le varietà U e $\varphi(U)$.

1.2 Spazio Tangente ad una Varietà

Sia M una varietà differenziabile, $p \in M$ e sia U un intorno di p. Nella sezione precedente abbiamo definito le funzioni C^∞ nel punto p, in particolare quindi possiamo considerare l'insieme di tutte le funzioni f che definite su un aperto U e sono C^∞ su U, indicato con $C^\infty(U)$. Siano f e g due funzioni C^∞ in p, definite rispettivamente negli intorni di p U e V, diremo che f e g sono in relazione di equivalenza se e solo se $\exists$ un aperto W che contiene p in cui $f = g \quad \forall q \in W$, e indicheremo $[f, U]$ la classe di equivalenza di f, che viene chiamata anche "germe" di funzioni C^∞. Definiamo quindi l'insieme

$$C_p^\infty(M) = \{\, [f, U] \mid f \in C^\infty(U) \,\}\,.$$

D'ora in poi indicheremo la classe $[f, U]$ semplicemente con f.

Definizione 1.2.1. Si definisce **spazio tangente alla varietà M in p** l'insieme $T_p(M)$ formato dalle applicazioni

$$X_p \colon C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

che soddisfano le leggi seguenti:

1. $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$ (**linearità**);
2. $X_p(f \cdot g) = X_p(f)g + f X_p(g)$ (**regola di Leibniz**).

Un elemento $X_p \in T_p(M)$ è detto **vettore tangente a M in p**. $T_p(M)$ con le operazioni seguenti è uno spazio vettoriale:

- $(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f), \quad \forall f \in C_p^\infty(M)$;

- $(\lambda X_p)(f) = \lambda(X_p(f)), \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall f \in C_p^\infty(M)$.

Vediamo un esempio abbastanza significativo di elementi che appartengono a $T_p(M)$.

Esempio 1.2.1 (Derivate parziali su Varietà differenziabili)**.** Sia $f\colon M \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ e $p \in M$. Data (U, φ) una carta locale di M, $p \in U$, allora $\forall q \in U$, φ può essere scritta in componenti:

$$\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q)), \quad x^i = r^i \circ \varphi \ \ \forall i = 1, \dots, n$$

dove $r^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la proiezione canonica di $\mathbb{R}^n$ sull'i-esima componente. Definiamo allora la *derivata parziale di f in p rispetto alla carta* (U, φ) come

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f) = \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

dove $\frac{\partial}{\partial r^i}$ sono le derivate parziali usuali in $\mathbb{R}^n$. Definiamo quindi $\forall i = 1, \dots, n$ le applicazioni

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \ : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f).$$

Si dimostra immediatamente, usando le proprietà delle derivate parziali usuali su $\mathbb{R}^n$, che $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \ \in T_p(M)$, $\forall \ i = 1, \dots, n$. Osserviamo che $\frac{\partial x^j}{\partial x^i}|_p = \delta_{ij}$.

Definizione 1.2.2. Sia $F\colon N \to M$ un'applicazione C^∞. Dato $p \in N$, consideriamo le carte (U, φ) di N, con $p \in U$, $\ \varphi = (x^1, \dots, x^n)$ e (V, ψ) di M, con $F(p) \in V$, definiamo lo **Jacobiano di F in p** come lo Jacobiano dell'applicazione $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ tra un aperto di $\mathbb{R}^n$ e uno di $\mathbb{R}^n$, calcolato nel punto $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$, cioè

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]_p = J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$$

con $F^i = x^i \circ F$, $\ i = 1, \dots, n$.

Differenziale di un'applicazione C^∞

Sia $F\colon N \to M$ un'applicazione C^∞ e sia $p \in N$. Il **differenziale di F** in p è l'applicazione lineare

$$F_{*p}\colon T_pN \to T_{F(p)}M$$

definita da $F_{*p}(X_p)(f) = X_p(f \circ F)$, $\ \ \forall X_p \in T_pN$ e $\ \forall f \in C_p^\infty(M)$.

Osservazione 1.2.1. La definizione è ben posta, infatti dapprima notiamo che se $f \in C_p^\infty(M)$, allora $f \circ F \colon N \to \mathbb{R}$, e dato che è composizione di applicazioni C^∞, si ha in particolare che $(f \circ F) \in C_p^\infty(N)$. Dobbiamo dimostrare ora che $F_{*p}(X_p)(f) \in T_{F(p)}M$, cioè che è lineare e soddisfa la regola di Leibniz. Proviamo quest'ultima proprietà, ovvero deve valere la seguente uguaglianza tra applicazioni

$$F_{*p}(X_p)(fg) = F_{*p}(X_p)g + fF_{*p}(X_p)(g). \tag{1.1}$$

Sia quindi $p \in N$, allora

$$\begin{aligned} F_{*p}(X_p)(fg)(p) &= X_p((gf) \circ F)(p) = X_p((f \circ F)(g \circ F))(p) \\ &= X_p(f \circ F)(p)(g \circ F)(p) + (f \circ F)(p)X_p(g \circ F)(p) \\ &= F_{*p}(X_p)(f)(p)g(F(p)) + f(F(p))F_{*p}(X_p)(g)(p). \end{aligned}$$

Confrontando il primo e l'ultimo termine delle precedenti uguaglianze, per la generalità di p è provata la (1.1).

Proposizione 1.2.1. *Valgono le seguenti proprietà.*

1. *Siano $F \colon N \to M$ e $G \colon M \to P$ due applicazioni C^∞. Vale la regola della catena*

$$(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p}. \tag{1.2}$$

2. *Sia $id_M \colon M \to M$, allora $id_{M*p} = id_{T_p(M)}$.*

3. *Se $F \colon N \to M$ è un diffeomorfismo, allora F_{*p} è un isomorfismo.*

Dimostrazione. 1. Per definizione dati $X_p \in T_pN$ e $f \in C_p^\infty(P)$, il differenziale di $G \circ F$ è:

$$(G \circ F)_{*p}(X_p)(f) = X_p(f \circ G \circ F). \tag{1.3}$$

D'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned} G_{*F(p)} \circ F_{*p}(X_p)(f) &= G_{*F(p)}(F_{*p}(X_p)(f)) \\ &= F_{*p}(X_p)(f \circ G) \\ &= X_p(f \circ G \circ F). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Confrontando la (1.3) e la (1.4) si ottiene la (1.2).

2. $\forall X_p \in T_pM$ e $\forall f \in C_p^\infty(M)$, abbiamo

$$id_{M*p}(X_p)(f) = X_p(f \circ id_M) = X_p(f) = id_{T_pM}(X_p(f)).$$

3. Sia $F\colon N \to M$ diffeomorfismo, allora $\exists\ F^{-1}\colon N \to M$ che è C^∞ e tale che $F^{-1} \circ F = id_M$ e $F \circ F^{-1} = id_N$. Utilizzando la parte 1 e 2 sopra dimostrati otteniamo

$$id_{T_pM} = (F^{-1} \circ F)_{*p} = F^{-1}_{*F(p)} \circ F_{*p},$$
$$id_{T_qM} = (F \circ F^{-1})_{*q} = F_{*F^{-1}(q)} \circ F^{-1}_{*q}.$$

Ponendo $q = F(p)$ si ottiene che $(F_{*p})^{-1} = F^{-1}_{F(p)}$, ovvero F_{*p} è isomorfismo. □

Corollario 1.2.1. *Data M varietà differenziabile, $p \in M$ e (U, φ) carta locale intorno a p, con $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, allora l'insieme $\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \mid_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \}$ è una base di T_pM. In particolare $dimT_pM = dimM$.*

Un altro modo per definire lo spazio tangente in un punto ad una varietà differenziabile è utilizzare le *curve*. Una curva è un'applicazione C^∞

$$c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M, \quad t \mapsto c(t).$$

Dato $p \in M$, definiamo il **vettore tangente alla curva in** $p = c(t_0)$ come

$$c'(t_0) = c_{*t_0}(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \tag{1.5}$$

dove $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ è l'elemento della base di $T_{t_0}\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Dalla definizione, $c'(t_0) \in T_pM$, quindi per il corollario (1.2.1), data (U, φ) carta locale intorno a p, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, si ha

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Svolgendo alcuni calcoli e usando il fatto che $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_{ij}$, si trova la forma dei coefficienti a^i:

$$a^i = \dot{c}^i(t_o) \quad \text{con} \quad c^i = x^i \circ c \ \ \forall i = 1, \ldots, n$$

$\dot{c}^i(t_o)$ indica la derivata usuale in $\mathbb{R}$ della funzione c^i rispetto al parametro della curva t, calcolata in t_0.

Possiamo quindi definire T_pM come lo spazio vettoriale costituito da tutti i vettori tangenti in p alle curve c, ovvero

$$T_pM = \{\, X_p \mid X_p = c'(0),\ \text{con } c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ t.c } c(0) = p \,\}\,.$$

Grazie a questa definizione è possibile esprimere il differenziale di un'applicazione $F\colon N \to M$ C^∞ tra le varietà differenziabili N, M in termini di curve su varietà: dato $p \in N$ e $X_p \in T_pN$, allora $\exists$ una curva $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to N$ tale che $C(0) = p$ e $X_p = c'(0)$, si ha la seguente espressione per F_{*p}

$$F_{*p}(X_p) = (F \circ c)'(0) \tag{1.6}$$

dove $(F \circ c)'$ è il vettore tangente alla curva $(F \circ c)\colon (-\epsilon,\ \epsilon) \to M$ tale che $(F \circ c)(0) = F(p)$, nel punto $F(p)$.

Campi di Vettori

Sia M una varietà differenziabile. Si definisce **fibrato tangente** come l'insieme

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

dove l'unione si intente disgiunta[1]. Si può dimostrare (vedere [3, p. 129-133]) che TM è una varietà differenziabile, con $dimTM = 2dimM$. Un **campo di vettori** è un'applicazione

$$X\colon M \to TM, \quad p \mapsto X(p) = X_p \in T_pM.$$

Data una carta (U, φ), $p \in U$ e $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, si ha

$$X(p) = X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

[1] Ovvero $TM = \cup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$

Facendo variare il punto $p \in U$, otteniamo un espressione locale del campo di vettori, definito nell'aperto U della carta

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_U, \text{ con } a^i \colon U \to \mathbb{R}.$$

Diremo che il campo di vettori X è C^∞ $\forall p \in M$ e $\forall (U, \varphi)$ se le funzioni a^i sono C^∞ sull'aperto U. Indicheremo con $\mathbb{X}(M)$ l'insieme dei campi di vettori C^∞ su M. Si può dimostrare che un campo di vettori è C^∞ se e solo se $X \colon M \to TM$ è un'applicazione C^∞ tra le varietà differenziabili M e TM.
Dato un campo di vettori X (generico, non necessariamente C^∞ per ora) e $f \colon M \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞, definiamo la seguente funzione

$$Xf \colon M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto Xf(p) = X_p f. \tag{1.7}$$

Questa funzione ha un profondo legame con i campi di vettori C^∞, infatti vale la seguente

Proposizione 1.2.2. *Sia X un campo di vettori. $X \in \mathbb{X}(M)$ se e solo se la funzione Xf è C^∞ $\forall\ f \colon M \to \mathbb{R}$ C^∞.*

Dimostrazione. Supponiamo che $X \in \mathbb{X}(M)$. Sia $p \in M$ e (U, φ) una carta locale, $p \in U$ e $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, allora

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_U \tag{1.8}$$

con $a^i \colon U \to \mathbb{R}$ funzioni C^∞ per ipotesi. Allora dalla formula precedente e dalla definizione di Xf si ottiene

$$\begin{aligned} Xf(p) = X_p f =& (\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i})(f)(p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \end{aligned}$$

da ciò si evince che Xf dipende in modo C^∞ dal punto p, e quindi Xf è una funzione C^∞.
Viceversa supponiamo che Xf sia C^∞ $\forall f \colon M \to \mathbb{R}$ C^∞.

Sia $p \in M$ e (U,φ) una carta locale, $p \in U$ e $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Si può dimostrare (vedere [2, p.144]) che è possibile estendere le funzioni C^∞ $x^i \colon U \to \mathbb{R}$ a delle funzioni $\tilde{\mathrm{x}}^i \colon M \to \mathbb{R}$, a loro volta C^∞, tali che $\tilde{\mathrm{x}}^i|_V = x^i$ dove $V \subset U$ aperto tale che $p \ \in U$. Essendo funzioni definite su tutta M, per ipotesi $X\tilde{\mathrm{x}}^i$ è C^∞, si ha, utilizzando la (1.8):

$$\begin{aligned} X\tilde{\mathrm{x}}^i(p) &= (\sum_{j=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i})\tilde{\mathrm{x}}^i(p) = \sum_{j=1}^n a^i(p) \frac{\partial \tilde{\mathrm{x}}^i}{\partial x^j}|_p \\ &= \sum_{j=1}^n a^i(p) \frac{\partial x^i}{\partial x^j}|_p = a^i(p). \end{aligned}$$

Da cui si trova che a^i sono funzioni C^∞ $\forall i = 1, \dots, n$. □

Definizione 1.2.3. Siano N,M varietà differenziabili, $F \colon N \to M$ un diffeomorfismo e $X \in \mathbb{X}(N)$. Definiamo il **pushforward** di X tramite F il campo di vettori F_*X definito da

$$F_*X(q) = F_{*F^{-1}(q)} X_{F^{-1}(q)}.$$

F_*X è un campo di vettori su M, in particolare $F_*X \in \mathbb{X}(M)$, infatti presa $g \in C^\infty(M)$ abbiamo che

$$F_*X(q)(g) = F_{*F^{-1}(q)} X_{F^{-1}(q)}(g) = X_{F^{-1}(q)}(g \circ F) = (X \circ g \circ F)(F^{-1}(q)).$$

Essendo $(X \circ g \circ F)$ C^∞ in quanto composizione di applicazioni C^∞, concludiamo che $F_*X \in \mathbb{X}(M)$. Data $F \colon N \to M$ un applicazione C^∞. Due campi di vettori $X \in \mathbb{X}(N)$, $X' \in \mathbb{X}(M)$, si dicono **F-related** se:

$$F_{*p} X_p = X'_{F(p)}, \quad \forall p \in N. \tag{1.9}$$

In particolare quindi, se F è un diffeomorfismo e $X \in \mathbb{X}(N)$, allora F_*X e X sono $F-$related.

Proposizione 1.2.3. *Data $F \colon N \to M$ un applicazione C^∞. Due campi di vettori $X \in \mathbb{X}(N)$, $Y \in \mathbb{X}(M)$, sono $F-$related se e solo se*

$$X(g \circ F) = (Yg) \circ F, \quad \forall g \in C^\infty(M).$$

Dimostrazione. Per definizione, X è $F-$related a Y se e solo se

$$F_{*p}X_p = Y_{F(p)}, \quad \forall p \in N. \tag{1.10}$$

Tale relazione è vera se vale $\forall g \in C^{\infty}(M)$, questo per la Proposizione 1.2.2. Si ottiene quindi, utilizzando la definizione di differenziale

$$F_{*p}X_p(g) = X_p(g \circ F) = X(g \circ F)(p), \tag{1.11}$$

$$Y_{F(p)}(g) = (Yg)(F(p)) = (Yg \circ F)(p). \tag{1.12}$$

Dalla (1.10) e dalla generalità di $p \in N$ e $g \in C^{\infty}(M)$, si ottiene la relazione desiderata.

□

1.3 Sottovarietà

Sia M una varietà differenziabile di $dimM = m$ e sia $S \subset M$, munito della topologia indotta da M. Diremo che S è una **sottovarietà**(regolare) di M di $dimS = k \leq m$ se $\forall p \in S$, $\exists$ una carta di M (U, φ), con $p \in U$ e $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ tale che

$$U \cap S = \{ \, q \in U \mid x^{k+1}(q) = x^{k+2}(q) = \cdots = x^m(q) = 0 \, \} \, . \tag{1.13}$$

La carta (U, φ) è detta *carta adattata* di M rispetto a S.

Proposizione 1.3.1. *Siano M una varietà differenziabile e $S \subset M$ una sottovarietà di M, $dimS = k$. Allora S è una varietà differenziabile.*

Dimostrazione. S è una varietà topologica giacché eredita da M il fatto di essere uno spazio di Hausdorff e di avere base numerabile di sottoinsiemi aperti, e inoltre, essendo una sottovarietà, $\forall p \in S$ ammette una carta adattata U_S della forma (1.13) e l'applicazione $\varphi_S = \varphi|_{U_S}$ è un omeomorfismo poiché restrizione di φ, quindi la famiglia di carte $\{(U_S, \varphi_S)\}$ è un altante topologico per S.Proviamo che $\{(U_S, \varphi_S)\}$ è un'atlante C^{∞}. Prese due carte (U_S, φ_S) e (V_S, ψ_S) tali che $U_S \cap V_S \neq \emptyset$ e consideriamo il cambiamento di coordinate

$$\psi_S \circ \varphi_S^{-1} \colon \varphi_S(U_S \cap V_S) \to \psi_S(U_S \cap V_S).$$

Dato che M è una varietà differenziabile, l'applicazione

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

è C^∞. In componenti, l'applicazione precedente si scrive:

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^m(x^1, \ldots, x^n))$$

ed essendo C^∞, le funzioni $y^j(x^1, \ldots, x^n)$,$\forall j = 1, \ldots, m$ dipendono in modo C^∞ da $(x^1, \ldots, x^n)$, da cui segue necessariamente che l'applicazione

$$\psi_S \circ \varphi_S^{-1} = (y^1(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0), \ldots, y^k(x^1, \ldots, 0, \ldots, 0), 0, \ldots 0)$$

è anch'essa C^∞. Analogamente si prova che $\varphi_S \circ \psi_S^{-1}$ è C^∞. □

Osservazione 1.3.1. Un sottoinsieme $S \subset M$ aperto è una sottovarietà di M di $dim(S) = dim(M)$. Conseguentemente quindi, $GL_n(\mathbb{R})$ è una sottovarietà di $M_n(\mathbb{R})$ di dimensione n^2.

Costruzione di sottovarietà tramite applicazioni C^∞

Sia $F : N \to M$ un'applicazione C^∞. F è una **immersione** (**summersione**) in $p \in N$ se il differenziale $F_{*p} \colon T_pN \to T_{F(p)}M$ è **iniettivo** (**suriettivo**). Diremo che F è una immersione (summersione) se lo è $\forall p \in N$. Un punto $p \in N$ si dice:

- *regolare* per F se F_{*p} **è suriettivo**;
- *critico* per F se F_{*p} **non è suriettivo**.

Un punto $q \in M$ è un valore:

- **regolare** per F se $\forall p \in F^{-1}(q)$, p è un punto regolare per F. L'insieme dei valori regolari è indicato con VR_F;
- **critico** per F se non è un valore regolare per F, ovvero $\exists\ p \in F^{-1}(q)$ tale che p è un punto critico. L'insieme dei valori critici è indicato con CR_F.

Definiamo inoltre il **rango di F in** p come il rango del suo differenziale nel punto p, cioè

$$rk(F) = rk(F_{*p}).$$

Sia $F\colon N \to M$ un 'immersione iniettiva. Allora diremo che $F(N) \in M$ è una **sottovarietà immersa** di M. Notiamo che in questo caso $F(N)$ è una varietà differenziabile diffeomorfa a N. La struttura differenziabile di $F(N)$ è quindi ereditata da N, con l' atlante definito da $\{(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F)\}$, dove $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è la struttura differenziabile di N.
Diremo che F è un **embedding** se è un immersione iniettiva ed è un embedding topologico.
Il seguente teorema è una generalizzazione del Teorema della funzione Inversa su $\mathbb{R}^n$, esteso alle varietà differenziabili [3, p 68-69]:

Teorema 1.3.1 (Funzione Inversa)**.** *Siano $F\colon N \to M$ un'applicazione C^∞,$p \in N$ e le carte (U, φ) di N, con $p \in U$, $\quad \varphi = (x^1, \dots, x^n)$ e (V, ψ) di M, con $F(p) \in V$, tali che*

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]_p \neq 0$$

Allora F è un diffeomorfismo locale intorno a p.

Teorema 1.3.2 (Controimmagine Valore Regolare)**.** *Sia $F\colon N \to M$, con $dimN = n$, $dimM = m$ tali che $n \geq m$. Sia $c \in VR_F$ e consideriamo $S = F^{-1}(c)$. Allora S è una sottovarietà di N di $dimS = n - m$. Inoltre vale che*

$$T_pS = kerF_{*p} \quad \forall p \in S.$$

Dimostrazione. Sia $p \in F^{-1}(c)$, e siano (V, ψ) una carta di M intorno a c tale che $\psi(c) = 0$, e $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ una carta di N intorno a p, tale che $U \subset F^{-1}(V)$. Per ipotesi $c \in VR_F$, quindi F_{*p}, è suriettivo, ovvero lo Jacobiano

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]_p, \quad F^i = (\psi \circ F)^i$$

ha rango massimo, ovvero m. A meno di scambiare l'ordine delle coordinate, possiamo supporre che il minore

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]_p \neq 0$$

con $i, j = 1, \dots, m$. Consideriamo l'applicazione

$$g\colon U \to \mathbb{R}^n, \quad g(q) = (F^1(q), \dots, F^m(q), x^{m+1}(q), \dots, x^n(q)).$$

g è un diffeomorfismo locale, infatti

$$Jg_p = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)_p & * \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

e $detJg(p) = \left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]_p \neq 0$. Per il Teorema 1.3.1 esiste un intorno U_p di p tale che $g|_{U_p}$ è un diffeomorfismo, e quindi $(U_p, g|_{U_p})$ è una carta di N ed è tale che

$$U_p \cap S = \{\, q \in U_p \mid F^1(q) = \cdots = F^m(q) = 0 \,\}$$

cioè U_p è una carta adattata. Per la generalità di $p \in S$ si conclude che S è una sottovarietà di N, $dimS = n - m$.
Dimostriamo che $T_pS = kerF_{*p}$.
1. Sia $X_p \in T_pS$, e sia γ una curva tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X_p$. Notiamo che $\gamma(t) \in S$, ergo $F(\gamma(t)) = c$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Allora

$$F_{*p}(X_p) = (F \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}|_0(F(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}|_0(c) = 0$$

quindi $X_p \in kerF_{*p}$, cioè $T_pS \subset kerF_{*p}$.
2. Sappiamo che $dimT_pS = dimS = n - m$. Poichè F_{*p} è suriettivo, $dimF_{*p}(T_pS) = dimT_pM0 = m$. Dal teorema della dimensione si ha

$$n = dimT_pN = dimF_{*p}(T_pS) + dimkerF_{*p} = m - dimkerF_{*p}$$

da cui $dimkerF_{*p} = n - m = dimT_pS$, cioè $T_pS = dimkerF_{*p}$. □

Esempio 1.3.1. Dimostriamo che

$$O(n) = \{\, A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^TA = I_n \,\}$$

è una sottovarietà di $GL_n(\mathbb{R})$. Sia $S_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche, e consideriamo l'applicazione

$$F\colon GL_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto F(A) = A^TA.$$

Si dimostra che F è un applicazione C^∞, e inoltre $O(n) = F^{-1}(I)$.

Vogliamo dimostrare che $I \in VR_F$. Consideriamo quindi il differenziale

$$F_{*A} \colon T_A GL_n(\mathbb{R}) \to T_{A^TA} S_n$$

con $A \in O(n)$. Sia c una curva tale che $c(0) = A$ e $c'(0) = X \in T_A GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. L'espressione di F_{*A} è

$$F_{*A}(X) = \frac{d}{dt}|_0 F(c(t)) = \frac{d}{dt}|_0 c(t)^T c(t) = X^T A + A^T X.$$

Sia $B \in S_n$, presa

$$X = \frac{1}{2} AB, \; A \in O(n)$$

dopo alcuni calcoli si ha $F_{*A}(X) = B$, da cui F_{*A} è suriettivo. Per il teorema (1.3.2) $O(n)$ è una sottovarietà di $GL_n(\mathbb{R})$. Si ha inoltre che $dimS_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, e quindi $dimO(n) = n^2 - dimS_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
Sempre per il teorema (1.3.2), possiamo calcolare $T_{I_n}O(n)$, Infatti sia $X \in T_{I_n}O(n)$, allora $X \in KerF{*}I_n$, cioè $KerF_{*I_n}(X) = O_n$. Da cui

$$KerF_{*I_n}(X) = X^T I + IX = O_n \Longrightarrow X = -X^T.$$

Otteniamo quindi l'espressione di $T_{I_n}O(n)$

$$T_{I_n}O(n) = \{ \, X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X = -X^T \, \} . \tag{1.14}$$

Osserviamo che $O(n)$ non è connesso (ha due componenti connesse), ma è compatto, infatti è chiuso poiché controimmagine di un chiuso tramite un'applicazione continua, ed è limitato, infatti data $A \in O(n)$, per definizione $AA^T = I_n$, cioè

$$\sum_{K=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Per $i = j$ la relazione precedente diventa

$$\sum_{K=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Otteniamo quindi che $\forall A \in O(n)$ vale la relazione

$$\sum_{i,K=1}^{n} a_{ik}^2 = n$$

da cui segue che $O(n)$ è limitato dalla palla centrata nell'origine $B_r(0) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ con $r > \sqrt{n}$.

Capitolo 2

Gruppi di Lie

Un ***Gruppo di Lie*** è una varietà differenziabile tale che le operazioni di gruppo

$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i\colon G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sono applicazioni C^∞ (nella struttura differenziale di G e $G \times G$).
Fissato $a \in G$, definiamo la ***traslazione a sinistra***:

$$\begin{aligned} L_a\colon G &\to G \\ g &\mapsto a \cdot g \end{aligned}$$

Analogamente la ***traslazione a destra*** è definita come:

$$\begin{aligned} R_a\colon G &\to G \\ g &\mapsto g \cdot a \end{aligned}$$

La traslazione a sinistra L_a e la traslazione a destra R_a sono C^∞ $\forall\, a \in G$. Infatti $L_a = \mu(a, \cdot)$ ossia L_a è la restrizione di μ alla sottovarietà $\{a\} \times G$. Analogamente $R_a = \mu(\cdot, a)$ è C^∞.
In effetti L_a e R_a sono diffeomorfismi $\forall\, a \in G$, dato che $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ e $(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$.

Dati due gruppi di Lie G e H, un' applicazione $F\colon H \to G$ tra gruppi di Lie è un ***omomorfismo tra gruppi di Lie*** se F è C^∞ ed è un omomorfismo di gruppi.

Quest'ultima condizione può essere espressa come:

$$F \circ L_h = L_{F(h)} \circ F \quad \forall\, h \in H.$$

Un ***isomorfismo di gruppi di Lie*** è un diffeomorfismo tra gruppi di Lie. Notiamo inoltre che se $F\colon H \to G$ è un omomorfismo tra gruppi di Lie, allora:

$$F(e_H) = e_G$$

dove e_H (risp. e_G) rappresenta l'elemento neutro di H (risp. di G) .

Esempio 2.0.1. Sia $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ il gruppo lineare, ossia l'insieme delle matrici $n \times n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) invertibili. Allora $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$, $A \cdot B = AB$ prodotto di matrici è un gruppo di Lie, ovvero la moltiplicazione $\cdot$ e l'inversione sono applicazioni C^∞.
Allo stesso modo si dimostra che $GL_n(\mathbb{C})$ è un gruppo di Lie.

Esempio 2.0.2. Sia $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$, ossia il gruppo lineare speciale, è un gruppo di Lie (con le operazioni di moltiplicazione tra matrici e l'inversione) . Per dimostrare che la moltiplicazione e l'inversione sono applicazioni C^∞, consideriamo l'inclusione $j\colon SL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, che è un embedding.
Siano $\mu\colon GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ e $i\colon GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ rispettivamente la moltiplicazione e l'inversione in $GL_n(\mathbb{R})$, e siano $\bar{\mu}$ e $\bar{i}$ la moltiplicazione e l'inversione in $SL_n(\mathbb{R})$.
Allora $\bar{\mu} = \mu_{|SL_n(\mathbb{R}) \times SL_n(\mathbb{R})}$ e $\bar{i} = i_{|SL_n(\mathbb{R})}$ ed essendo $SL_n(\mathbb{R})$ una sottovarietà di $GL_n(\mathbb{R})$, segue che $\bar{\mu}$ e $\bar{i}$ sono C^∞ (restrizioni di applicazioni C^∞).
Analogamente si dimostra che $SL_n(\mathbb{C})$ è un gruppo di Lie.

Esempio 2.0.3. $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$ è un gruppo di Lie in quanto abbiamo dimostrato che $O(n)$ è una sottovarietà di $GL_n(\mathbb{R})$, e possiamo usare lo stesso ragionamento dell'esempio precedente per dimostrare che le operazioni sono C^∞.

Esempio 2.0.4. Dati $(G, \cdot_G), (H, \cdot_H)$ gruppi di Lie, allora il prodotto $G \times H$ munito delle operazioni

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g \cdot_G g', h \cdot_H h') \;\; \forall g, g' \in G,\; h, h' \in H$$
$$(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1}) \;\; \forall g \in G, h \in H$$

è un gruppo di Lie.

2.1 Sottogruppi di Lie

Sia G un gruppo di Lie. Un sottoinsieme $H \subset G$ è un ***sottogruppo di Lie*** se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. H è un sottogruppo (algebrico) di G;
2. H è una sottovarietà immersa di G (cioè l'inclusione $H \hookrightarrow G$ è un'immersione);
3. le operazioni di gruppo di H sono C^∞.

Osservazione 2.1.1. Le operazioni di gruppo di H (moltiplicazione e inversione) sono chiaramente indotte da G (H è un sottogruppo di G), ma **non è detto** che siano C^∞, in quanto stiamo richiedendo che l'inclusione $i\colon H \hookrightarrow G$ sia un' immersione e non un embedding (la topologia su H non è quella indotta da G).
Se $i\colon H \hookrightarrow G$ fosse un embedding, allora la condizione 3) sarebbe superflua.

Proposizione 2.1.1. *[3, p.168] Sia H un sottogruppo (algebrico) di un gruppo di Lie G. Se H è una sottovarietà di G (equi. $i\colon H \hookrightarrow G$ è un embedding), allora H è un sottogruppo di Lie.*

A volte un sottogruppo come nella proposizione è chiamato ***sottogruppo di Lie embedded***.
Deduciamo quindi:

Corollario 2.1.1. *$SL_n(\mathbb{R})$ e $O(n)$ sono sottogruppi di Lie di $GL_n(\mathbb{R})$.*

Osservazione 2.1.2. In effetti esiste un teorema [2, p. 86] che afferma: un **sottogruppo chiuso** (come sottospazio topologico) di un gruppo di Lie G è un **sottogruppo di Lie embedded**. Il corollario precedente segue immediatamente da questo teorema in quanto $SL_n(\mathbb{R})$ e $O(n)$ sono chiusi in $GL_n(\mathbb{R})$.

Esempio 2.1.1 (Sottogruppo di Lie non embedded)**.** Sia $G = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ il toro con la struttura di gruppo di Lie definita nell'Esempio 2.0.4. Sia $L \subset \mathbb{R}^2$ una retta passante per l'origine e

$$\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2 = G, \quad (t,s) \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$$

Allora $\pi(L)$ è una curva chiusa $\Leftrightarrow$ L è parallela all'asse $y \vee L = \{\,(t,\alpha t) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\,\}$.
Infatti se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow H = \pi(L)$ non è chiusa ma è densa in $G = \mathbb{T}^2$.

Quindi $f = \pi_{|L} \colon L \to \mathbb{T}^2$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, $H = \pi(L) < \mathbb{T}^2$ (sottogruppo algebrico).
Inoltre f è un immersione $\Rightarrow H$ è un sottogruppo di Lie (non embedded) di $\mathbb{T}^2$.

Esponenziale di una matrice

Per calcolare il differenziale di un'applicazione avente dominio $GL_n(\mathbb{R})$, abbiamo bisogno di curve di matrici invertibili. Tramite *l'esponenziale di una matrice* che definiremo a breve, avremo (tra le altre cose) la possibilità di trovare la curva che ci serve. La trattazione sarà fatta su $GL_n(\mathbb{R})$ e i suoi sottogruppi (di Lie), ma quello che faremo si può fare per un gruppo di Lie arbitrario.

Definizione 2.1.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una **norma** su V è un'applicazione

$$\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto ||v|| \quad \forall\, v \in V$$

tale che:

1. $\|v\| \geq 0\ \forall\, v \neq 0$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ($\|\cdot\|$ è **definita positiva**);
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|\ \forall\, v \in V$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ (**omogeneità**);
3. $\|v + w\| \leq \|v\|\, \|w\|\ \forall\, v, w \in V$ (**sub-additività**).

Uno spazio vettoriale V dotato di una norma $\|\cdot\|$ è detto **spazio vettoriale normato** e viene indicato tramite la coppia $(V, \|\cdot\|)$.

Esempio 2.1.2 (Norma di Frobenius)**.** Sia $M_n(\mathbb{R}) = \{\ X = [X_{ij}] \mid X_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq n\ \}$. Data $X \in M_n(\mathbb{R})$, definiamo

$$\|X\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} X_{i,j}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ è il prototipo di spazio normato.

Definizione 2.1.2 (Esponenziale di una matrice)**.** L'**esponenziale di una matrice** $X \in M_n(\mathbb{R})$ è definita come

$$\exp X = e^X := I_n + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!}. \tag{2.1}$$

Useremo indistintamente la notazione $expX$ oppure e^X.

Esempio 2.1.3. Se $X = O_n$ (matrice nulla), allora:

$$e^{O_n} = I_n.$$

Se invece $X = xI_n$, $x \in \mathbb{R}$, allora:

$$e^X = e^x I_n$$

Affinché la definizione (2.1) abbia senso sempre, occorre verificare che $e^X \in M_n(\mathbb{R})$ oppure, equivalentemente, verificare che la serie di matrici

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!}$$

sia convergente nello spazio vettoriale normato $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, cioè:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{X^j}{j!} = A \quad A \in M_n(\mathbb{R})$$

Definizione 2.1.3 (Algebra normata)**.** Un' **algebra normata** $(V, \cdot, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ su $\mathbb{R}$ che sia anche un'algebra $(V, \cdot)$ tale che:

$$\|v \cdot w\| \leq \|v\|\|w\| \quad \forall v, w \in V \text{ (proprietà submoltiplicativa).}$$

Esempio 2.1.4. $(M_n(\mathbb{R}), \cdot, \|\cdot\|)$, dove $\cdot$ è la moltiplicazione usuale tra matrici e $\|\cdot\|$ è la norma di Frobenius (cfr. Esempio 2.1.2), è un algebra normata. Infatti, se X,$Y \in M_n(\mathbb{R})$, $X = [x_{ij}]$, $Y = [y_{ij}]$, allora, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$(XY)_{ij}^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj})^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2)(\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2)$$

che implica:

$$\begin{aligned}\|XY\|^2 = \sum_{i,j}^{n}(XY)_{ij}^2 \leq \sum_{i,j}^{n}(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2)(\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2) = \\ = (\sum_{i,k=1}^{n} x_{ik}^2)(\sum_{k,j=1}^{n} y_{kj}^2) = \|X\|\|Y\|.\end{aligned}$$

Il che dimostra che vale la proprietà submoltiplicativa.

Proposizione 2.1.2 (Alcune proprietà di un algebra normata)**.** *Sia* $(V, \cdot, \|\cdot\|)$ *un'algebra normata. Allora:*

(a) Sia $a \in V$ *e* s_n *una successione in* V*. Se* $s_n \longrightarrow s \in V$ *allora* $as_n \longrightarrow as$*;*

(b) Sia $a \in V$ *e* $\sum_n^\infty s_n$ *una serie convergente. Allora:*

$$a \sum_n^\infty s_n = \sum_n^\infty as_n, \quad \sum_n^\infty (s_n a) = (\sum_n^\infty s_n) a.$$

Dimostrazione. Per dimostrare (a), consideriamo la successione s_n in V. Per ipotesi s_n converge a $s \in V$, ossia

$$\lim_{n \to \infty} \|s_n - s\| = 0.$$

Preso $a \in V$, per l'omogeneità della norma:

$$\|as_n - as\| = |a| \|s_n - s\|$$

da cui

$$\lim_{n \to \infty} \|as_n - as\| = \lim_{n \to \infty} |a| \|s_n - s\| = as.$$

Proviamo ora la (b). Per ipotesi la serie $\sum_{k=0}^n s_n$ è convergente a $s \in V$ cioè

$$\sum_{k=0}^n s_n = s \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \|\sum_{k=0}^n s_n - s\| = 0.$$

Sia $a \in V$, abbiamo

$$a \lim_{n \to \infty} \|\sum_{k=0}^n s_n - s\| \overset{(a)}{=} \lim_{n \to \infty} \|a(\sum_{k=0}^n s_n - s)\| = \lim_{n \to \infty} \|\sum_{k=0}^n as_n - as\| = 0$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^\infty as_n = as = a(\sum_{k=0}^\infty s_n).$$

Analogamente si dimostra l'altra uguaglianza. $\square$

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. La serie $\sum_{n=1}^\infty s_n$ è detta ***assolutamente convergente*** se la serie $\sum_{n=1}^\infty \|s_n\|$ è convergente.

Definizione 2.1.4. Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Una successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in V è detta ***di Cauchy*** se:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c } \forall n, m > N \Longrightarrow \|s_n - s_m\| < \epsilon.$$

Uno spazio vettoriale normato è detto ***completo*** se ogni successione di Cauchy $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$ è convergente ad un punto di V. Uno spazio vettoriale normato completo è chiamato ***spazio di Banach***, mentre un algebra normata completa è detta ***algebra di Banach***.

Proposizione 2.1.3. *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in V. Allora ogni serie assolutamente convergente è convergente, ovvero:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|s_n\| < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty.$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e siano $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$. Sia $\{S_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali, ovvero $S_h = \sum_{n=1}^{h} s_n$. Si ha:

$$\|S_p - S_q\| = \| \sum_{n=q+1}^{p} s_n\| \leq \sum_{n=q+1}^{p} \|s_n\| < \epsilon \quad \forall p, qN_\epsilon.$$

Dove la prima disuguaglianza vale per la subaddittività (essendo in uno spazio normato), mentre l'ultima per ipotesi (serie assolutamente convergente). Segue allora che la successione delle somme parziali $\{S_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, ma essendo V per ipotesi uno spazio di Banach, la successione è convergente, cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ è convergente. □

Corollario 2.1.2. *Ogni serie assolutamente convergente in $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ è convergente.*

Dimostrazione. Segue dalla proposizione precedente, in quanto $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach. □

Possiamo ora verificare che l'esponenziale di matrice definita in (2.1) è ben definita, ossia $e^X \in M_n(\mathbb{R})$ $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$. Infatti:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{X^k}{k!} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X^k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X\|^k = e^{\|X\|}.$$

Dove $e^{\|X\|}$ è l'esponenziale usuale di numeri reali. Ma allora la serie (2.1) è assolutamente convergente e quindi convergente in $M_n(\mathbb{R})$ per la Proposizione 2.1.3.

Proposizione 2.1.4 (Alcune proprietà dell'esponenziale). *Valgono i fatti seguenti:*

1. *Date* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *tali che* $AB = BA \Longrightarrow e^{A+B} = e^A e^B$*;*

2. $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$ $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ *(cioè* e^A *è sempre invertibile);*

3. $\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X, \ \forall X \in M_n(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. 1: Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Poiché per ipotesi $AB = BA$, vale la formula:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} A^j B^{k-j}.$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(k-j)!j!} A^j B^{k-j} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) = \\ &= e^A e^B. \end{aligned}$$

Dove la quarta uguaglianza segue dal **prodotto di Cauchy** [1].
2: Per la 1, si ha $e^{A-A} = e^A e^{-A}$, allora

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^{O_n} = I_n$$

ovvero $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$. Inoltre $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.
3: Essendo $e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tX)^k$ una serie convergente, è derivabile termine a termine, ossia:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tX)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dt}(tX)^k.$$

[1]Prese due serie assolutamente convergenti $\sum_{j=0}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = b$ $\Rightarrow$ la serie prodotto converge assolutamente, cioè $\sum_{k=0}^{\infty} a_j b_{k-j} = ab$

Allora:

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tX)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d}{dt}(tX)^k = \frac{d}{dt}[I_n + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + \dots] =$$
$$= X + tX^2 + \frac{1}{2}t^2X^3 + \dots = X[I_n + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + \dots] = Xe^{tX},$$

dove l'uguaglianza

$$X + tX^2 + \frac{1}{2}t^2X^3 + \dots = X[I_n + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + \dots]$$

vale per la (b) della Proposizione 2.1.2.
Analogamente si dimostra che:

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = e^{tX}X.$$

□

Osservazione 2.1.3. Con ragionamenti analoghi si può definire e^X con $X \in M_n(\mathbb{C})$ e verificare che soddisfa proprietà analoghe a quelle fin ora viste.

Richiami di Algebra Lineare

Prima di vedere alcuni utilizzi dell'esponenziale di una matrice, occorre richiamare alcune nozioni di algebra lineare.

Definizione 2.1.5. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$. A, B si dicono **simili** se $\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che

$$B = S^{-1}AS$$

Diremo che A, B sono **unitariamente simili** se sono simili e se $S \in U(n)$, dove:

$$U(n) = \{\, U \in GL_n(\mathbb{C}) \mid UU^* = U^*U = I_n \,\} \quad \text{(matrici unitarie)}$$

con $U^* = \overline{U}^T$ (coniugata della trasposta).

I seguenti due Lemmi sono provati in [9, p.285]

Lemma 2.1.1. *Data X una matrice antisimmetrica di ordine $n \geq 2$ e dato $\{ i\theta_1, -\theta_1, \ldots, i\theta_p, -i\theta_p \}$ l'insieme di tutti i suoi autovalori, esistono una matrice ortogonale P e una matrice diagonale a blocchi E definita da*

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & \ldots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \ldots & E_m & \\ & & & O_{n-2m} \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_i > 0$$

tali che $X = PEP^T$.

Lemma 2.1.2 (Teorema Forma Canonica Ortogonale)**.** *Data $R \in SO(n)$, esistono una matrice ortogonale P e una matrice diagonale a blocchi D definita da*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \ldots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \ldots & D_m & \\ & & & I_{n-2m} \end{pmatrix} \quad D_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \quad 0 < \theta_i \leq \pi$$

tali che $R = PDP^T$.

Teorema 2.1.1 (Di Shur)**.** *Ogni $A \in M_n(\mathbb{C})$ è unitariamente simile ad una matrice triangolare superiore:*

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dove i $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, sono gli autovalori di A.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists U \in U(n)$ e T matrice triangolare superiore tale che

$$A = UTU^*$$

Dimostriamo l'asserto per induzione su n.

Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo per ipotesi induttiva che l'asserto sia vero $\forall G \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Poichè il polinomio caratteristico relativo ad A è un polinomio in $\mathbb{C}$, per il teorema fondamentale dell'algebra esso ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$, ovvero $\exists \lambda_1 \in \mathbb{C}$ autovalore di A. Sia $x_1 \in \mathbb{C}^n$ l'autovettore associato a λ_1 che, senza perdere di generalità, possiamo supporre unitario (in caso contrario infatti sarà sufficiente normalizzarlo). Consideriamo la base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ contenente x_1:

$$\beta = \{x_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

e l'applicazione lineare $A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $A(z) = Az$.
Consideriamo $C = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^n$ (anch'essa ortonormale), e sia $S \in U(n)$ la matrice di passaggio dalla base β a quella canonica(S è unitaria in quanto entrambe le basi sono ortonormali). Allora rispetto a β, l'operatore A ha la seguente matrice associata:

$$A' = S^{-1}AS = S^*AS = \overline{S}^T AS$$

Essendo x_1 un autovettore per A, si avrà che:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

dove $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. Per ipotesi induttiva B è unitariamente simile ad una matrice triangolare superiore T e quindi $\exists Q \in U(n)$ tale che $Q^*BQ = T$. Definiamo

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $Z \in U(n)$. Ponendo $U = SZ$ si ottiene:

$$\overline{U}^* AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Da cui la tesi. □

Data $A \in M_n(\mathbb{C})$, diremo che A è ***normale*** se $AA^* = A^*A$.

Esempio 2.1.5.

1. Una matrice ***hermitiana***, ovvero tale che $A = A^*$ è normale;
2. una matrice ***anti-hermitiana***, ovvero tale che $A = -A^*$ è normale;
3. le matrici unitarie sono normali;
4. le matrici simmetriche ad entrate reali sono normali.

2.2 Traccia, determinante e esponenziale di una matrice

In questo paragrafo vedremo alcune applicazioni dell'esponenziale di una matrice definita in (2.1).

Proposizione 2.2.1. *Sia $X \in M_n(\mathbb{C})$, allora $tr(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, dove $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, sono gli autovalori di X.*

Dimostrazione. Sia $X = (x_{ij})$. Ricordiamo che $tr(X) = \sum_{i=1}^n x_{ii}$, inoltre $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, $tr(XY) = tr(YX)$, da cui segue anche che matrici simili hanno stessa traccia. Poichè $X \in M_n(\mathbb{C})$, per il teorema (2.1.1) $\exists S \in U(n)$ tale che:

$$S^*XS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, sono gli autovalori di X. Segue dunque:

$$tr(X) = tr(S^* X S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \qquad \square$$

Osservazione 2.2.1. La proposizione precedente rimane vera anche se $X \in M_n(\mathbb{R})$, in particolare $tr(X) \in \mathbb{R}$, anche se gli autovalori λ_i potrebbero appartenere a $\mathbb{C}$, ma in questo caso sono complessi coniugati.

Proposizione 2.2.2. *Sia $X \in M_n(\mathbb{R})$. Allora*

$$det(e^X) = e^{tr(X)}. \tag{2.2}$$

Osservazione 2.2.2. Al primo membro dell'equazione (2.2) abbiamo il determinante di $e^X \in M_n(\mathbb{R})$, mentre al secondo membro abbiamo l'esponenziale usuale di numeri reali, infatti $tr(X) \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $X \in M_n(\mathbb{R})$ sia triangolare superiore, ovvero

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & *' & \dots & *' \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & *' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & *'' & \dots & *'' \\ 0 & \frac{\lambda_2^k}{k!} & \dots & *'' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \dots & * \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

da cui

$$det(e^X) = det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & *''' & \dots & *''' \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & *''' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{trX}$$

dove l'ultima uguaglianza è garantita dalla Proposizione (2.2.1).
Sia ora $X \in M_n(\mathbb{R})$ arbitraria. Per il Teorema (2.1.1) $\exists A \in U(n)$ tale che

$$A^{-1}XA = T$$

dove T è una matrice triangolare superiore con la diagonale principale formata dagli autovalori di X. Si ha

$$e^{A^{-1}XA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{-1}XA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{-1}X^kA), \tag{2.3}$$

per la parte (b) della Proposizione 2.1.2 vale inoltre:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{-1}X^kA) = A^{-1}\big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\big)A = A^{-1}e^XA. \tag{2.4}$$

Unendo la (2.3) e la (2.4) si ottiene:

$$e^{A^{-1}XA} = A^{-1}e^XA. \tag{2.5}$$

Fatte queste considerazioni e avendo dimostrato che la tesi del teorema vale per le matrici triangolari superiori,(ricordiamo che $A^{-1}XA$ è triang. sup.) possiamo infine calcolare $det(e^X)$:

$$det(e^X) = det(A^{-1}e^XA) = det(e^{A^{-1}XA}) = e^{tr(A^{-1}XA)} = e^{tr(X)}$$

che è quello che volevamo dimostrare. $\square$

Corollario 2.2.1. *$e^X \in GL_n(\mathbb{R})$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, si ha:

$$det(e^X) = e^{tr(X)} \neq 0, \qquad \forall X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Essendo il secondo membro l'esponenziale usuale di numeri reali. □

Corollario 2.2.2. *Data $X \in M_n(\mathbb{R})$, allora $c(t) = e^{tX}$ è una curva in $GL_n(\mathbb{R})$ tale che $c(0) = I_n$ e $c'(0) = X$.*
Più' in generale, $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$ e $\forall B \in M_n(\mathbb{R})$, $c(t) = Ae^{tA^{-1}B}$ è una curva in $GL_n(\mathbb{R})$ tale che $c(0) = A$ e $c'(0) = B$.

Dimostrazione. Sia $X \in M_n(\mathbb{R})$. Notiamo subito che, per come è definita la curva e per la (2.1):

$$c(0) = e^{O_n} = I_n.$$

Per definizione di vettore velocità di una curva su una varietà e applicando la (3) della Proposizione 2.1.4 si ottiene:

$$c'(0) = \frac{d}{dt} e^{tX}|_{t=0} = Xe^{tX}|_{t=0} = Xe^{O_n} = XI_n = X.$$

Analogamente si ottiene la seconda parte del teorema. □

Corollario 2.2.3 (Differenziale del determinante)**.** *Sia $f \colon GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = det(A)$. Allora*

$$f_{*_A} \colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f_{*_A}(B) = det(A)tr(A^{-1}B). \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Sia $c(t) = Ae^{A^{-1}Bt}$ una curva tale che $c(0) = A$, $c'(0) = B$. Dalla definizione di differenziale si ha:

$$f_{*_A}(B) = (f \circ c)'(0) = \frac{d}{dt} det(Ae^{A^{-1}Bt})|_{t=0} = det(A)\frac{d}{dt} det(e^{A^{-1}Bt})|_{t=0}.$$

Applicando la (2.2) si ottiene:

$$det(e^{A^{-1}Bt}) = e^{tr(A^{-1}Bt)} = e^{tr(A^{-1}B)t}.$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} f_{*_A}(B) &= det(A)\frac{d}{dt} det(e^{A^{-1}Bt})|_{t=0} = det(A)\frac{d}{dt} e^{tr(A^{-1}B)t}|_{t=0} \\ &= det(A)tr(A^{-1}B)e^{tr(A^{-1}B)t}|_{t=0} = det(A)tr(A^{-1}B). \end{aligned}$$

□

Esempio 2.2.1. Dimostriamo in una maniera alternativa che $SL_n(\mathbb{R})$ è una sottovarietà di $GL_n(\mathbb{R})$. Ricordiamo che

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{\, A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid det(A) = 1 \,\}.$$

Consideriamo l'applicazione C^∞

$$det\colon GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto det(A).$$

Allora $SL_n(\mathbb{R}) = det^{-1}(1)$. Dimostriamo che $1 \in VR_{det}$. Per definizione, 1 è un valore regolare se $\forall A \in det^{-1}(1)$, A è un punto regolare per det, cioè det_{*A} è suriettivo. Abbiamo dimostrato che (cfr. Corollario 2.2.3), $\forall B \in M_n(\mathbb{R}) = T_I GL_n(\mathbb{R})$, l'espressione del differenziale è

$$det_{*A}(B) = det(A)tr(A^{-1}B).$$

Sia quindi $c \in \mathbb{R}$. definisco la matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ come

$$B = \frac{c}{n}A.$$

Allora

$$det_{*A}(B) = det(A)tr(A^{-1}B) = det(A)tr(A^{-1}\frac{c}{n}A) = c.$$

che prova la suriettività. Per il teorema (1.3.2), $SL_n(\mathbb{R})$ è una sottovarietà di $GL_n(\mathbb{R})$, con $dimSL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$. Sempre per il teorema (1.3.2), si ha

$$T_I SL_n(\mathbb{R}) = kerdet_{*I}$$

cioè $X \in T_I SL_n(\mathbb{R})$ è tale che $det_{*I}(X) = 0$, allora

$$0 = det_{*I}(X) = (detI)tr(I^{-1}X) = tr(X)$$

ovvero

$$T_I SL_n(\mathbb{R}) = \{\, X \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(X) = 0 \,\}. \tag{2.7}$$

$SL_n(\mathbb{R})$ è uno spazio connesso, infatti dall'algebra lineare sappiamo che una matrice $X \in SL_n(\mathbb{R})$ si può scrive come

$$X = \prod_{k=1}^{r}(I_n + a_k E_{i_k j_k}) \tag{2.8}$$

dove gli $a_k \in \mathbb{R}$, mentre le matrici E_{ij} sono tali che $E_{ij}X$ è la matrice con entrate nulle tranne nella j-esima riga in cui è presente i-esima riga di X e XE_{ij} è la matrice con entrate nulle tranne nella i-esima colonna in cui è presente j-esima colonna di X. Definendo la curva $c(t)$ come

$$c(t) = \prod_{k=1}^{r}(I_n + a_k t E_{i_k j_k}).$$

Allora $c(0) = I_n$ e $c(1) = A$, il che prova che $SL_n(\mathbb{R})$ è connesso per archi.

Esempio 2.2.2. Consideriamo l'insieme

$$SO(n) = \{\, A \in O(n) \mid det(A) = 1 \,\}$$

il gruppo lineare speciale ortogonale. Dimostriamo che $SO(n)$ è una sottovarietà (quindi un sottogruppo di Lie) di $O(n)$. Per farlo è sufficiente dimostrare che $SO(n)$ è una componente connessa di $O(n)$[1] $\forall n \geq 1$, il che proverebbe che è un aperto di quest'ultimo e quindi una sottovarietà.
Se $n = 1$, $SO(1) = 1$. Supponiamo $n \geq 2$, e sia $A \in SO(n)$.
Per il Teorema della forma canonica ortogonale(cfr. Lemma 2.1.2) esiste $P \in O(n)$ tale che

$$P^T A P = \begin{pmatrix} I_p & * & \dots & * \\ 0 & -I_q & \dots & * \\ \vdots & & P_1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_k \end{pmatrix} = Q$$

con $n = p + q + 2k$ e

$$P_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}.$$

[1]Dalla topologia, sappiamo che una componente connessa C di uno spazio M è sempre chiusa. Tuttavia, se M è una varietà topologica, si ha che C è anche aperta.

Notiamo che $A = PQP^{-1}$. Poiché $det(A)$=1, le matrici del tipo $-I_q$ devono essere di ordine pari, cioè $q = 2l$, allora

$$-I_q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & & \\ 0 & -1 & \dots & & \\ \vdots & & & -1 & 0 \\ & & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & \dots & & \\ \sin\pi & \cos\pi & \dots & & \\ \vdots & & & \cos\pi & -\sin\pi \\ & & \dots & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}.$$

Sia ora $c(t)$ definita $\forall t \in \mathbb{R}$ da

$$c(t) = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \dots & & \\ 0 & -I_q(t) & \dots & & \\ \vdots & & & P_1(t) & 0 \\ & & \dots & 0 & P_k(t) \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{2.9}$$

dove

$$-I_q(t) = \begin{pmatrix} \cos t\pi & -\sin t\pi & \dots & & \\ \sin t\pi & \cos t\pi & \dots & & \\ \vdots & & & \cos t\pi & -\sin t\pi \\ & & \dots & \sin t\pi & \cos t\pi \end{pmatrix}, \quad P_j(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta_j & -\sin t\theta_j \\ \sin t\theta_j & \cos t\theta_j \end{pmatrix}.$$

Ovviamente $c(t) \in SO(n)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Allora $c(0) = I_n$, $c(1) = A$ e quindi $SO(n)$ è connesso per archi.

Supponiamo per assurdo che esista $B \in O(n)$, con $det(B) - 1$, tale che esista una curva $\gamma(t)$ tale che $\gamma(0) = I$ e $\gamma(1) = B$, poiché $\gamma(t)$ è continua, esisterà $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $det(\gamma(t_0)) = 0$, ma questo è assurdo. Quindi $SO(n)$ è una componente connessa di $O(n)$. Per lo stesso motivo si ha che

$$T_{I_n}SO(n) = T_{I_n}O(n) = \{\, X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X = -X^T \,\}.$$

$SO(n)$ è inoltre compatto, infatti è chiuso in $O(n)$ poiché controimmagine di un chiuso tramite un applicazione continua.[2]

[2]Ricordiamo che un chiuso di uno spazio compatto è compatto

Capitolo 3

Algebre di Lie

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e sia

$$[\cdot,\cdot]\colon V \times V \to V$$

un'applicazione, detta **bracket** (o **commutatore**), tale che:

(L1) $[\cdot,\cdot]$ è **bilineare** ;

(L2) $[\cdot,\cdot]$ è **antisimmetrica**, ovvero $[v,w] = -[w,v]$, $\forall v,w \in V$;

(L3) soddisfa l'**identità di Jacobi**, ovvero:

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0 \quad \forall u,v,w \in V.$$

Diremo che $(V,[\cdot,\cdot])$ è un'**algebra di Lie**.
La condizione (L.2), nel caso in cui il campo $\mathbb{K}$ abbia caratteristica diversa da 2, può essere espressa nella seguente maniera equivalente:

(L2)' $[v,v] = 0\ \forall v \in V$.

Infatti se $[\cdot,\cdot]$ soddisfa la (L2), allora in particolare $[v,v] = -[v,v]$, da cui $2[v,v] = 0$ ovvero $[v,v] = 0$.
Viceversa se vale la (L2)', allora, grazie alla bilinearità di $[\cdot,\cdot]$ si ha:

$$0 = [v+w,v+w] = [v,v] + [v,w] + [w,v] + [w,w] = [v,w] + [w,v]$$

ovvero $[v,w] = -[w,v] \quad \forall v,w \in V$.
Data un'algebra di Lie $(V,[\cdot,\cdot])$, è immediato verificare che

$$[v,0] = [0,v] = 0, \quad \forall v \in V.$$

Esempio 3.0.1. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, consideriamo l'applicazione *prodotto vettoriale*:

$$\wedge \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto x \wedge y$$

definita da:

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \tag{3.1}$$

con $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3)$.

$(\mathbb{R}^3, \wedge)$ è un'*algebra di Lie*, infatti è immediato verificare che $\wedge$ soddisfa le proprietà (L1) e (L2). Inoltre vale l'*identità di Jacobi*, infatti: osserviamo prima di tutto che, facendo alcuni calcoli, risulta:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

Dove $\cdot$ indica il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$.
Si ha dunque, utilizzando la (3.2):

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z \tag{3.3}$$
$$y \wedge (z \wedge x) = (y \cdot x)z - (y \cdot z)x \tag{3.4}$$
$$z \wedge (x \wedge y) = (z \cdot y)x - (z \cdot x)y \tag{3.5}$$

Sommando termine a termine le equazioni (3.3), (3.4), (3.5) si ottiene proprio l'identità di Jacobi, ovvero:

$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0.$$

Esempio 3.0.2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $V = M_n(\mathbb{R})$. Date $X,Y \in M_n(\mathbb{R})$, definiamo il commutatore di X,Y come:

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Allora $(M_n(\mathbb{R}),[\cdot,\cdot])$ è un' *algebra di Lie*.

Esempio 3.0.3. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. E' sempre possibile definire il bracket:

$$[x, y] = 0 \quad \forall x, y \in V.$$

E' immediato verificare che il bracket cosi definito soddisfa le leggi (L.1), (L.2), (L.3) e che quindi $(V, [\cdot, \cdot])$ è un algebra di Lie, chiamata anche *struttura abeliana di algebra di Lie su* V. In particolare, un campo $\mathbb{K}$ può essere visto come un'algebra di Lie abeliana.

Esempio 3.0.4. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e sia $End(V)$ o spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V in se stesso. Definiamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] \colon End(V) \times End(V) &\to \ End(V) \\ (f, g) \qquad &\mapsto \ [f, g] = f \circ g - g \circ f. \end{aligned}$$

Tale applicazione soddisfa le proprietà (L1), (L2), (L3), infatti:

- $\forall f, g, h \in End(V)$ e $\forall x \in V$,

  $$\begin{aligned} [f, g + h](x) &= (f \circ (g + h) - (g + h) \circ f)(x) \\ &= (f \circ (g + h)(x) - (g + h) \circ f)(x) \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) - (g \circ f)(x) - (h \circ f)(x) \\ &= [f, g](x) + [f, h](x) \end{aligned}$$

  per l'arbitrarietà di $x \in V$, vale dunque $[f, g + h] = [f, g] + [f, h]$. Analogamente si dimostra che $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$ e che $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $[\lambda f, g] = [f, \lambda g] = \lambda[f, g]$, $\forall f, g \in End(V)$, e dunque vale la (L1);

- Si verifica immediatamente che $\forall f, g \in End(V)$, vale che

  $$[f, g] = -[g, f]$$

  e quindi è soddisfatta la (L2);

- $\forall f, g, h \in End(V)$, si ha:

  $$[f, [g, h]] = f \circ g \circ h - f \circ h \circ g - g \circ h \circ f + h \circ g \circ f \tag{3.6}$$
  $$[g, [h, f]] = g \circ h \circ f - g \circ f \circ h - h \circ f \circ g + f \circ h \circ g \tag{3.7}$$
  $$[h, [f, g]] = h \circ f \circ g - h \circ g \circ f - f \circ g \circ h + g \circ f \circ g \tag{3.8}$$

sommando termine a termine le equazioni (3.6), (3.7) , (3.8) si ottiene l'*identità di Jacobi.*

Ergo $(End(V), [\cdot, \cdot])$ è un algebra di Lie, chiamata *algebra lineare generale*, e viene denotata con **gl(V)**.

Esempio 3.0.5. Sia M una varietà differenziabile e $\mathbb{X}(M)$ lo spazio dei campi di vettori C^∞, che abbiamo definito nel Capitolo 1. Definiamo l'applicazione

$$[\ ,\ ] \colon \mathbb{X}(M) \times \mathbb{X}(M) \to \mathbb{X}(M), \quad [X, Y] = XY - YX \tag{3.9}$$

tale che

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf), \quad \forall f \in C_p^\infty(M) \tag{3.10}$$

con Xf, Yf definiti da (1.7). La definizione (3.10) è ben posta, ovvero $[X, Y]_p \in T_pM$, infatti è lineare e soddisfa la regola di Leibniz. Inoltre, utilizzando la Proposizione (1.2.2), si prova che $[X, Y] \in \mathbb{X}(M)$. Attraverso semplici calcoli si prova che $[\ ,\ ]$ soddisfa le leggi (L1),(L2),(L3) e che quindi $(\mathbb{X}(M), [\ ,\ ])$ è un'algebra di Lie.

Siano **V**$=(V, [\cdot, \cdot])$, **V'**$=$ $(V', [\cdot, \cdot]')$ due algebre di Lie. Un **omomorfismo di algebre di Lie** è un applicazione lineare

$$\Phi \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$$

che conserva il bracket, ovvero tale che:

$$\Phi([v, w]) = [\Phi(v), \Phi(w)]', \quad \forall v, w \in V.$$

Un *isomorfismo di algebre di Lie* è un omomorfismo di algebre di Lie biettivo. Due algebre di Lie V e V' si dicono *isomorfe* se esiste $\Phi \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V'}$ isomorfismo di algebre di Lie.

Esempio 3.0.6. Consideriamo l'applicazione tra l'algebra di Lie **V** e l'algebra lineare generale **gl(V)**

$$ad \colon \mathbf{V} \to \mathbf{gl(V)}, \quad v \mapsto ad(v)(w) = [v, w]\ \forall v, w \in V \tag{3.11}$$

ad è un omomorfismo di algebre di Lie. Infatti è lineare per la bilinearità del commutatore, e inoltre conserva quest'ultimo, cioè vale che

$$ad([u,v]) = [ad(u), ad(v)], \quad \forall u, v \in V.$$

Infatti, considerati $u, v \in V$ e il loro commutatore $[u,v]$, $\forall w \in V$ si ha

$$ad([u,v])(w) = [[u,v],w]$$

dall'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned}[ad(u), ad(v)](w) &= (ad(u) \circ ad(v))(w) - (ad(v) \circ ad(u))(w) \\ &= [u,[v,w]] - [v,[u,w]].\end{aligned}$$

Grazie alla regola di Jacobi applicata ai vettori $u, v, w \in V$ e all'antisimmetria del commutatore, otteniamo l'uguaglianza cercata:

$$[[u,v],w] = [u,[v,w]] - [v,[u,w]].$$

L'applicazione lineare $ad(v) \in \mathbf{gl(V)}$, immagine di $v \in V$ tramite ad, è chiamata *applicazione aggiunta*, e viene indicata con ad_v.

Definizione 3.0.1. Sia $\mathbf{V}$ un'algebra di Lie. Una **sottoalgebra di Lie H** di **V** è un sottospazio vettoriale $H \subset V$ chiuso rispetto al commutatore, ovvero $\forall x, y \in H$, $[x,y] \in H$. In particolare una sottoalgebra di Lie è un algebra di Lie.

3.1 Algebra di Lie di un gruppo di Lie

Quello che ci proponiamo di fare in seguito è costruire un algebra di Lie, che indicheremo con $\mathbf{g}$, a partire da un gruppo di Lie G, in modo tale che $\mathbf{g}$ si "ricordi" del gruppo G.

Definizione 3.1.1. Sia G un gruppo di Lie e $X \in \mathbb{X}(G)$ un campo di vettori. Diremo che X è **invariante a sinistra** se il suo pushforward tramite la traslazione a sinistra coincide con X stesso, ovvero:

$$L_{g*}X = X, \quad \forall g \in G. \tag{3.12}$$

Valgono le seguenti proprietà

Proposizione 3.1.1. *Se X, Y sono campi invarianti a sinistra, allora*

- $X + Y$ *è invariante a sinistra;*
- λX *è invariante a sinistra;*
- $[X, Y]$ *è invariante a sinistra.*

Dimostrazione. Le prime due proprietà derivano dal fatto che il differenziale è un applicazione lineare. La terza si dimostra utilizzando il fatto che L_g è un diffeomorfismo, infatti si può dimostrare (cfr. Proposizione 3.1.2) che se $F\colon N \to M$ è un diffeomorfismo tra varietà differenziabili, allora dati $X, Y \in \mathbb{X}(M)$ e $[X, Y]$ definito nell'Esempio 3.0.5, vale che

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y].$$

In particolare quindi vale per Lg, e quindi dati X, Y campi invariati a sinistra si ha

$$L_{g*}[X, Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X, Y]. \qquad \square$$

Indicheremo con $\mathbb{L}(G)$ lo spazio dei campi di vettori invarianti a sinistra. Grazie alla precedente proposizione, $(\mathbb{L}(G), [\ ,\ ])$ con $[\ ,\ ]$ definito nell'Esempio 3.0.5, è un algebra di Lie, detta **algebra di Lie** del gruppo di Lie G, che indicheremo con $\mathbf{g}$. Il seguente teorema che dimostriamo mostra che $\mathbb{L}(G)$ come spazio vettoriale è isomorfo a T_eG, dove $e \in G$ è l'elemento neutro del gruppo di Lie G, e che quindi è possibile dotare T_eG di una struttura di algebra di Lie, che sarà isomorfa a $\mathbf{g}$. Questo ci permetterà di descrivere in maniera esplicita l'algebra di Lie di un gruppo di Lie.

Teorema 3.1.1. *Dato G un gruppo di Lie. Lo spazio $\mathbb{L}(G)$ è isomorfo (come spazio vettoriale) a T_eG. Di conseguenza, $dim\mathbb{L}(G) = dimG$.*

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione

$$\Phi\colon T_eG \to \mathbb{L}(G), \quad X \mapsto \Phi(X) = X' \tag{3.13}$$

con $X'_g = L_{g*e}X$, $\forall g \in G$. Verifichiamo che

- Φ è ben definita, ovvero X' è un campo di vettori C^∞ invariante a sinistra;
- Φ è lineare e biettiva.

Proviamo che Φ è ben definita. Dapprima dimostriamo che X' è invariante a sinistra, cioè occorre verificare $\forall g, h \in G$, che

$$(L_{g*}X')_h = X'_h.$$

Per fare ciò è sufficiente provare che vale la seguente relazione $\forall g, h \in G$:

$$L_{g*h}X'_h = X'_{gh}. \tag{3.14}$$

Infatti, supponendo vera la relazione precedente, dalla definizione di pushforward e dal fatto che $L_g^{-1}(h) = g^{-1}h$ si ottiene

$$L_{g*}X'(h) = L_{g*g^{-1}h}X'_{g^{-1}h} = X'_{gg^{-1}h} = X'_h.$$

Proviamo quindi la (3.14):

$$\begin{aligned} L_{g*h}X'_h &= L_{g*h}(L_{h*e}X) = (L_{g*h} \circ L_{h*e})(X) \stackrel{*}{=} (L_g \circ L_h)_{*e}(X) \\ &= L_{gh*e}(X) = X'_{gh}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza (*) vale per la regola della catena definita nel Capitolo 1. Dimostriamo ora che $X' \in \mathbb{X}(G)$, che per la Proposizione (1.2.2), equivale a dimostrare che $\forall f \in C^\infty(G)$, $X'f \in C^\infty(G)$. Sia $g \in G$, allora $X'f(g) = X'_g f$. Dato $X_e \in T_eG$, sia c una curva su G tale che $c(o) = e$ e $c'(0) = X_e$, e definiamo la curva $\gamma(t)$ su G nel modo seguente

$$\gamma(t) = gc(t) = L_g(c(t)).$$

Con semplici calcoli si vede che $\gamma(0) = g$ e $\gamma'(0) = X'_g$. Vale inoltre

$$X'_g f = \gamma'(0)f = \gamma_{*0}\Big(\frac{d}{dt}|_0\Big)f = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0).$$

Dove l'ultimo termine indica la derivata usuale in $\mathbb{R}$ della funzione

$$G_g \colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}, \quad G_g(t) = (f \circ \gamma)(t).$$

Quest'ultima è C^∞ poiché composizione di applicazioni C^∞, e quindi anche la sua derivata, ovvero $X'_g f$ lo è $\forall g \in G$, questo prova che Xf è C^∞. In particolare, quindi, $\mathbb{L}(G)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathbb{X}(G)$.

Dimostriamo ora che Φ è isomorfismo. Siano $X, Y \in T_eG$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\forall g \in G$

$$(\lambda X + \mu Y)'_g = L_{g*e}(\lambda X + \mu Y) = \lambda L_{g*e}X' + \mu L_{g*e}Y' = \lambda X'_g + \mu Y'_g$$

il che prova che Φ è lineare. Definendo poi l'applicazione lineare

$$I_e \colon L(G) \to T_eG, \quad I_e(X) = X_e.$$

Si prova con semplici calcoli che I_e è proprio l'inversa di Φ, che quindi è biettiva. $\square$

Possiamo ora introdurre una struttura di algebra di Lie su T_eG, definendo il commutatore tra $X, Y \in T_eG$ nella maniera seguente:

$$[X, Y] = [X', Y']_e. \tag{3.15}$$

Dove $[\ ,\ ]$ al secondo membro è il commutatore definito su $\mathbb{X}(G)$. In questo modo $(T_eG, [\ ,\ ])$ e $\mathbb{X}(G)$ sono isomorfe come algebre di Lie, e vengono entrambe indicate con $\mathbf{g}$.

Esempio 3.1.1. Consideriamo $G = GL_n(\mathbb{R})$, e sia $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ la matrice identità. Essendo G un aperto di $M_n(\mathbb{R})$, si ha che $T_IGL_n(\mathbb{R}) = T_IM_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. Dimostriamo che l'algebra di Lie $\mathbf{g}_I(\mathbb{R}) = (T_IGL_n(\mathbb{R}), [\ ,\ ])$ del gruppo di Lie G altri non è che l'algebra di Lie del gruppo delle matrici $M_n(\mathbb{R})$, ovvero il commutatore definito su $\mathbf{g}$ tramite la (3.15) coincide proprio con il commutatore tra matrici, definito nell'esempio (3.0.2).
Iniziamo con l'osservare che il differenziale di L_g $\forall g \in GL_n(\mathbb{R})$ è dato da

$$\begin{aligned} L_{g*} \colon T_IGL_n(\mathbb{R}) &\to T_gGL_n(\mathbb{R}), \quad \forall A \in T_IGL_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto gA \end{aligned} \tag{3.16}$$

Vogliamo dimostrare quindi che $\forall A, B \in T_IGL_n(\mathbb{R})$

$$[A, B] = [A', B']_I = AB - BA. \tag{3.17}$$

Sia $X \in G$, allora $X = (x_{ij})$, possiamo introdurre un sistema di coordinate globali (G, φ) dove φ in componenti è data da

$$x^{ij}(X) = x_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Di conseguenza un vettore $A \in T_I GL_n(\mathbb{R}) \simeq M_n(\mathbb{R})$ si scrive come

$$A = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_I, \quad A = (a_{ij}). \tag{3.18}$$

Dati quindi $A, B \in T_I GL_n(\mathbb{R})$, abbiamo

$$[A, B] = [A', B']_I = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_I$$

dove $c_{ij} = [A', B']_I(x^{ij})$. Utilizzando la definizione di commutatore tra campi di vettori otteniamo

$$[A', B']_I(x^{ij}) = A'_I(B'x^{ij}) - B'_I(A'x^{ij}) = A(B'x^{ij}) - B(A'x^{ij}). \tag{3.19}$$

Scriviamo espressamente $B'x^{ij}$, che ricordiamo essere una funzione C^∞ da $GL_n(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$. Sia $g \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} B'x^{ij}(g) &= B'_g x^{ij} = (L_{g*I}B)x^{ij} \\ &= (\sum_{h,k=1}^{n} (gB)_{hk} \frac{\partial}{\partial x^{h,k}}|_g)x^{ij} \\ &= (gB)_{ij}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Se quindi $g = (g)_{ij}$ e $B = (b)_{ij}$, la (3.20) diventa

$$B'x^{ij}(g) = (gB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x^{ik}(g) b_{kj}.$$

Da cui ricaviamo, facendo variare $g \in GL_n(\mathbb{R})$

$$B'x^{ij} = \sum_{k=1}^{n} x^{ik} b_{kj}. \tag{3.21}$$

Analogamente si ricava

$$A'x^{ij} = \sum_{k=1}^{n} x^{ik} a_{kj}. \tag{3.22}$$

Sostituendo le espressioni (3.21) e (3.22) nell'equazione (3.19) otteniamo

$$\begin{aligned}[][A', B']_I(x^{ij}) &= A(B'x^{ij}) - B(A'x^{ij}) \\ &= A(\sum_{k=1}^{n} x^{ik} b_{kj}) - B(\sum_{k=1}^{n} x^{ik} a_{kj}).\end{aligned}$$

Sostituiamo A, B con le relative espressioni fornite dalla (3.18), ottenendo

$$\begin{aligned}[][A', B']_I(x^{ij}) &= A(\sum_{k=1}^{n} x^{ik} b_{kj}) - B(\sum_{k=1}^{n} x^{ik} a_{kj}) \\ &= (\sum_{p,q}^{n} a_{pq} \frac{\partial}{\partial x^{pq}}|_I)(\sum_{k=1}^{n} x^{ik} b_{kj}) - (\sum_{r,s}^{n} b_{rs} \frac{\partial}{\partial x^{rs}}|_I)(\sum_{k=1}^{n} x^{ik} a_{kj}) \\ &= \sum_{p,q}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{pq} b_{kj} \frac{\partial x^{ik}}{\partial x^{pq}}|_I) - \sum_{r,s}^{n} \sum_{k=1}^{n} (b_{rs} a_{kj} \frac{\partial x^{ik}}{\partial x^{rs}}|_I) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = (AB - BA)_{ij}.\end{aligned}$$

Che è quello che volevamo dimostrare.
Notiamo inoltre che da $\mathbf{g}_I(\mathbb{R})$ è possibile "ritornare" al gruppo $GL_n(\mathbb{R})$, grazie all'*esponenziale di matrici* vista nel Capitolo 2, infatti abbiamo dimostrato che $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$, $e^X \in GL_n(\mathbb{R})$.

Sia ora $F\colon H \to G$ un omomorfismo di gruppi di Lie, e sia $e_H \in H$ l'elemento neutro di H. Il differenziale F_{*e} è un'applicazione lineare tra $T_{e_H}H$ e $T_{e_G}G$. Definiamo l'applicazione

$$F_*\colon \mathbb{L}(H) \to \mathbb{L}(G), \quad F_*X = (F_{*e}X_e)' \tag{3.23}$$

dove $(F_{*e}X_e)'$ è l'immagine di $(F_{*e}X_e)$ tramite l'isomorfismo definito in (3.13). Chiameremo F_*X il **pushforward di** X tramite l'omomorfismo F. Nel Capitolo 1 abbiamo definito il pushforward di un campo di vettori X tramite un diffeomorfismo tra varietà differenziabili. La relazione tra queste definizioni è espressa dal seguente

Teorema 3.1.2. *Sia $F\colon H \to G$ un isomorfismo di gruppi di Lie, ovvero un omomorfismo di gruppi (algebrici) che è un diffeomorfismo tra le varietà H e G, e sia $X \in \mathbb{L}(H)$. Allora il pushforward di X tramite F coincide con il pushforward di X come campo di vettori tramite il diffeomorfismo F.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{F}_* X$ il pushforward tramite il diffeomorfismo F di $X \in \mathbb{L}(H)$. Presi $g \in G$ e $h = F^{-1}(g)$, per la Definizione 1.2.3 abbiamo

$$\tilde{F}_* X(g) = F_{*h} X_h \overset{*}{=} F_{*h} L_{h*e} X_e = (F \circ L_h)_{*e} X_e \tag{3.24}$$

dove (*) vale poiché X è invariante a sinistra. Non è difficile far vedere che un omomorfismo commuta con la traslazione a sinistra, ovvero vale la relazione

$$F \circ L_h = L_{F(h)} \circ F, \quad \forall h \in H. \tag{3.25}$$

Da questa osservazione, la (3.24) diventa

$$\begin{aligned} \tilde{F}_* X(g) &= (F \circ L_h)_{*e} X_e = \left(L_{F(h)} \circ F\right)_{*e} X_e \\ &= L_{F(h)*e}(F_{*e} X_e) = (F_{*e} X_e)'_{F(h)} = (F_* X)(g) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Poichè la relazione (3.26) vale $\forall g \in G$, abbiamo la tesi. □

Proposizione 3.1.2. *Sia $F\colon H \to G$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Valgono i seguenti fatti:*

1. *$F_* X$ è $F-$related a X, $\forall X \in \mathbb{L}(H)$;*

2. *$F_{*e}\colon T_e H \to T_e G$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Dimostrazione. 1. Sia $h \in H$ e $X \in \mathbb{L}(H)$. Seguendo i ragionamenti fatti nella dimostrazione della proposizione precedente si ha

$$\begin{aligned} F_{*h} X_h = F_{*h}(L_{h*e} X_e) &= (F \circ L_h)_{*e} X_e = \left(L_{F(h)} \circ F\right)_{*e} \\ &= L_{F(h)*e}(F_{*e} X_e) = (F_{*e} X_e)'_{F(h)} = F_* X(h). \end{aligned}$$

2. Osserviamo innanzi tutto che dalla Proposizione 1.2.3 segue facilmente che dati $X, Y \in \mathbb{X}(H)$ due campi $F-$related rispettivamente a $X', Y' \in \mathbb{X}(G)$, allora il commutatore $[X, Y] \in \mathbb{X}(H)$ è $F-$related a $[X', Y'] \in \mathbb{X}(G)$. Infatti data $g \in C^\infty(H)$ si ha

$$\begin{aligned} [X, Y](g \circ F) &= X(Y(g \circ F)) - Y(X(g \circ F)) = X((Y'g) \circ F) - Y((X'g) \circ F) \\ &= (X'Y'g) \circ F - (Y'X'f) \circ F = ([X', Y']g) \circ F. \end{aligned}$$

Da questa relazione segue inoltre che se F fosse un diffeomorfismo, dati $X, Y \in \mathbb{X}(H)$ vale che

$$F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y].$$

In particolare quindi tale proprietà vale anche per i campi invarianti a sinistra. Da questa considerazione e dal punto 1 si ha che dati $X, Y \in \mathbb{L}(H)$, $[X,Y]$ è $F-$related a $[F_*X, F_*Y]$. Questo significa che $\forall h \in H$ vale la relazione

$$F_{*h}[X,Y]_h = [F_*X, F_*Y]_{F(h)}. \tag{3.27}$$

Tale relazione vale per $h = e$. Per il fatto che $\mathbb{L}(H)$ è isomorfo a T_eH, si ha che esistono A, B tali che $X = A'$ e $Y = B'$. Da una parte quindi si ha

$$F_{*e}([X,Y]_e) = F_{*e}([A',B']_e) = F_{*e}([A,B])$$

dall'altra per la (3.27) e per la definizione (3.23) si ha

$$\begin{aligned} F_{*e}([X,Y]_e) &= [F_*X, F_*Y]_e = [F_*A', F_*B']_e = [(F_{*e}A)', (F_{*e}b)']_e \\ &= [F_*A, F_*B]. \end{aligned}$$

Da queste ultime due relazione segue che F_*e è un omomorfismo di algebre di Lie □

Teorema 3.1.3. *Sia H un sottogruppo di Lie di $GL_n(\mathbb{R})$, allora la sua algebra di Lie $\boldsymbol{h}_I(\mathbb{R}) = (T_IH, [\ ,\ ])$ è una sottoalgebra di Lie di $\boldsymbol{g}_I(\mathbb{R})$. In particolare $\forall A, B \in T_IH$, si ha*

$$[A,B] = AB - BA.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla proposizione precedente, osservando che l'inclusione canonica è un omomorfismo iniettivo di gruppi di Lie, di conseguenza i_* è un omomorfismo tra le algebre di Lie associate a H e G, da cui $\forall A, B \in T_eH$

$$i_*[A,B] = [i_*A, i_*B] = [A,B].$$

Quindi **h** algebra di Lie associata a H può essere identificata come una sottoalgebra di **g**, algebra di Lie associata a G. □

3.2 Applicazione Esponenziale

Sia M una varietà differenziabile, $p \in M$ e $X \in \mathbb{X}(M)$. Consideriamo una carta locale (U, φ) intorno a p, e supponiamo che $\varphi(p) = 0$. Presa $f \in C^\infty(M)$, consideriamo il seguente problema di Cauchy con incognita una curva c in M:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = X_{c(t)}(f) \\ c(0) = p \end{cases} \tag{3.28}$$

La soluzione di (3.28) è chiamata *curva integrale di X passante per p.*

Sia ora G un gruppo di Lie e $X \in \mathbf{g}$. Indichiamo con Φ_X la curva integrale tale che $\Phi(0) = e \in G$ e $\Phi'_X(t) = X_{\Phi(t)}$. Come soluzione di (3.28), $\Phi_X(t)$ dovrebbe essere definita solo in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$. Poiché X è invariante a sinistra, è possibile estendere $\Phi_X(t)$ a tutto $\mathbb{R}$. Infatti se $\Phi_X(t)$ è definita per $t \leq |\epsilon|$, possiamo considerare la curva

$$\varphi(t) = \Phi_X(\epsilon)\Phi_X(t - \epsilon), \quad \epsilon \leq t \leq 2\epsilon. \tag{3.29}$$

Notiamo che $\varphi(\epsilon) = \Phi(\epsilon)$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt}|_t = \frac{d}{dt}\Phi_X(\epsilon)\Phi_X(t-\epsilon) &= (L_{\Phi_X(\epsilon)}*)_{\Phi_X(t-\epsilon)}\frac{d}{dt}\Phi_X(t-\epsilon)|_t \\ &= (L_{\Phi_X(\epsilon)}*)_{\Phi_X(t-\epsilon)}X_{\Phi_X(t-\epsilon)} = X_{\Phi_X(\epsilon)\Phi_X(t-\epsilon)} = X_{\varphi(t)}. \end{aligned}$$

Quindi $\varphi(t)$ è una curva integrale di X passante per ϵ. Ma allora la curva

$$\Psi_X(t) = \begin{cases} \Phi_X(t), & t \leq |\epsilon| \\ \varphi(t) & \epsilon \leq t \leq 2\epsilon \end{cases}$$

E' una curva liscia e inoltre per quanto appena visto è una curva integrale di X passante per e, definita nell'intervallo $(-\epsilon, 2\epsilon)$. Per induzione quindi si può ripetere il ragionamento fatto estendendo $Phi_X(t)$ a tutto $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.2.1. $\Phi_X(t)$ *soddisfa le seguenti proprietà*

1. $\Phi_X(t+s) = \Phi_X(t)\Phi_X(s)$, *per ogni* $t, s \in \mathbb{R}$;

2. $\Phi_X(ts) = \Phi_{tX}(s)$, *per ogni* $t, s \in \mathbb{R}$;

3. La curva integrale di X passante per $g \in G$ è

$$\psi(t) = g\Phi_X(t) = L_g(\Phi_X(t)). \tag{3.30}$$

Dimostrazione. 1. Fissiamo $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Definiamo la curva

$$\gamma(s) = \Phi_X(\bar{t} + s).$$

Notiamo che $\gamma(0) = \Phi_X(\bar{t})$ e $\gamma'(0) = \Phi'_X(\bar{t}) = X_{\Phi(\bar{t})}$, quindi γ è una curva integrale di X passante per $\Phi'_X(\bar{t})$. Analogamente si dimostra che anche la curva

$$\psi(s) = \Phi_X(\bar{t})\Phi_X(s)$$

è una curva integrale di X passante per $\Phi'_X(\bar{t})$. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (3.28) si ha $\gamma(s) = \psi(s)$, questo $\forall \bar{t} \in \mathbb{R}$ e quindi la tesi.
2. Si prova in modo analogo al punto 1, ponendo

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \Phi_X(\bar{t}s) \\ \psi(s) &= \Phi_{\bar{t}X}(s) \end{aligned}$$

e provando che sono entrambi curve integrali di $\bar{t}X$ passanti per per $e \in G$, $\forall\ \bar{t} \in \mathbb{R}$.
3. Dapprima notiamo che $\psi(0) = g\Phi_X(0) = g$. Inoltre, presa $f \in C^\infty(G)$, si ha:

$$\begin{aligned} \psi'(t)(f) &= \psi_{*t}(\frac{d}{dt}|_t)(f) = (L_g \circ \Phi_X)_{*t}(\frac{d}{dt}|_t)(f) \\ &= L_{g*\Phi_X(t)}((\Phi_{X*t}(\frac{d}{dt}|_t)(f)) = (L_{g*\Phi_X(t)}(X_{\Phi(t)}(f)) \\ &\overset{*}{=} X_{\Phi(t)}(f) \end{aligned}$$

dove $(*)$ è vera poiché X è invariante a sinistra. Segue quindi la tesi dalla definizione di curva integrale. □

Per quanto appena dimostrato, l'applicazione

$$\Phi_X \colon \mathbb{R} \to G, \quad t \mapsto \Phi_X(t) \tag{3.31}$$

è un omomorfismo di gruppi di Lie. Per ciò, $\Phi_X(\mathbb{R})$ è detto **sottogruppo ad un parametro** di G.

Definizione 3.2.1. L'**applicazione esponenziale** di un gruppo Lie G è l'applicazione definita da

$$exp\colon \mathbf{g} \to G, \quad X \mapsto exp(X) = \Phi_X(1) \tag{3.32}$$

Dove Φ_X è il sottogruppo ad un parametro generato da X.

Teorema 3.2.1. *L'applicazione exp definita in* (3.2.1) *è tale che*

1. *$exp(tX) = \Phi_X(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in \boldsymbol{g}$;*

2. *$exp(t+s)X = exp(tX)exp(sX)$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$, $X \in \boldsymbol{g}$;*

3. *exp è un'applicazione C^∞;*

4. *exp è un diffeomorfismo locale intorno a $0 \in \boldsymbol{g}$.*

Dimostrazione. Le proprietà 1 e 2 discendono dalla Proposizione 3.2.1
3. Definiamo il gruppo di Lie $\overline{G} = G \times T_eG$, con l'operazione definita da

$$(g, Y) \cdot (h, W) = (gh, Y + W), \quad \forall\ g, h \in G,\ Y, W \in T_eG.$$

Sia $X_{(g,Y)} = (Y'_g, 0)$, dove Y'_g è definito tramite l'isomorfismo (3.13). X è un campo di vettori su $\overline{G}$ ed è invariate a sinistra, infatti

$$L_{(g,Y)*}X = (L_{g*}Y'_g, L_{Y*}0) = (Y'_g, 0) = X.$$

Sia $F_X(t)$ la curva integrale di X passante per (g, Y). Ciò vuol dire che

$$F'_X(t) = X_{F_X(t)}, \quad F_X(0) = (g, Y).$$

D'altra parte esiste una curva integrale $\phi_{Y'_g}(t)$ per Y'_g, passante per $g \in G$. Di conseguenza se si definisce la curva in $\overline{G}$

$$c(t) = (\phi_{Y'_g}(t), Y)$$

si trova facilmente che $c(0) = (g, Y)$ e $c'(0) = (Y'_g, 0)$. Ma allora $c(t)$ è una curva integrale per X passante per (g, Y). Per l'unicità della curva integrale si ha

$$F_X(t) = c(t).$$

Dal momento che $F_X(t)$ dipende in modo C^∞ da Y, segue che anche $\phi_{Y'_g}(t)$ dipende in modo C^∞ da Y. Ma allora $exp(Y) = \phi_{Y'_g}(1)$ è C^∞ in Y. Per la generalità di $g \in G$ e $Y \in T_eG$ segue che exp è C^∞.
4. E' sufficiente dimostrare che il differenziale di exp in $0 \in \boldsymbol{g}$ non è singolare. Notiamo prima di tutto che è immediato verificare che $exp(0) = e$. Ricordando che $\boldsymbol{g}$ è uno spazio vettoriale (in quanto isomorfa a T_eG), si ha $\boldsymbol{g} = T_0\boldsymbol{g} = T_0(T_eG) = T_eG$. Il differenziale quindi è

$$exp_{0*} \colon T_eG \to T_eG$$

Usando la proprietà 1, la definizione di exp si ha, dato $Y_e \in T_e$

$$exp_{0*}(Y_e) = \frac{d}{dt} exp(tY)|_0 = Y_{exp(0)} = Y_e = id_{T_eG}$$

il che prova che il differenziale non è singolare. □

Cerchiamo ora di dimostrare che nel caso in cui $G = GL_n(\mathbb{R})$, l'applicazione esponenziale coincide con l'esponenziale di matrici definita nel Capitolo 2.
Consideriamo dapprima un gruppo di Lie G. Grazie al punto 1 del teorema precedente, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall X \in \mathbf{g}$, $exp(tX) = \Phi_X(t)$ è un sottogruppo ad un parametro di G, generato da X. In realtà tutti i sottogruppi ad un parametro di G sono di questa forma, come affermato dalla seguente

Proposizione 3.2.2. *Ogni sottogruppo ad un parametro di un gruppo di Lie G è della forma $exp(tX)$, per un certo $X \in \boldsymbol{g}$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \colon \mathbb{R} \to G$ un sottogruppo ad un parametro di G, e consideriamo il campo di vettori $X = \varphi'(0)$. Quello che vogliamo dimostrare è

$$\varphi(t) = exp(tX).$$

Questo equivale a dimostrare che l'applicazione $g \colon \mathbb{R} \to G$ definita da $g(t) = exp(-tX)\varphi(t)$ è tale che

$$g(t) = exp(-tX)\varphi(t) = e \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poichè $g(0) = e$, l'equazione precedente equivale a dimostrare che g non dipende da dal parametro t, ovvero occorre dimostrare la seguente:

$$\frac{d}{dt} g(t) = 0. \tag{3.33}$$

Osserviamo prima di tutto che $exp(-tX) = \Phi_{-X}(t)$. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g(t) &= \frac{d}{dt}exp(-tX)\varphi(t) = \frac{d}{ds}|_0 exp(-(s+t)X)\varphi(s+t)\\ &= \frac{d}{ds}|_0 exp(-tX)exp(-sX)\varphi(s)\varphi(t)\\ &= exp(-tX)(\frac{d}{ds}|_0 exp(-sX)\varphi(s))\varphi(t).\end{aligned}$$

Da queste uguaglianze quindi deduciamo che dimostrale la (3.33) equivale a dimostrare che

$$\frac{d}{ds}|_0 exp(-sX)\varphi(s) = 0. \tag{3.34}$$

L'equazione precedente non è altro che il differenziale dell'applicazione μ che definisce il gruppo di Lie G, valutato in $(e,e) \in G \times G$, cioè

$$\frac{d}{ds}|_0 exp(-sX)\varphi(s) = \mu_{*(e,e)}(exp(-sX), \varphi(s)). \tag{3.35}$$

Calcoliamo quindi $\mu_{*(e,e)}$. Siano $X_e, Y_e \in T_eG$ e $c(s) = (c_1(s), c_2(s))$ una curva in $G \times G$ tale che $c(0) = (e,e)$, $c'(0) = (c_1'(0), c_2'(0)) = (X_e, Y_e)$, si trova

$$\begin{aligned}\mu_{*(e,e)}(X_e, Y_e) &= \frac{d}{ds}|_0(\mu \circ c)(s) = \frac{d}{ds}|_0(c_1(s)c_2(s))\\ &= c_1'(0)c_2(0) + c_1(0)c_2'(0) = X_e + Y_e.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Applicando quindi la (3.36) a (3.35), otteniamo

$$\frac{d}{ds}|_0 exp(-sX)\varphi(s) = \mu_{*(e,e)}(exp(-sX), \varphi(s)) = -X + X = 0.$$

che è quello che volevamo dimostrare. □

Corollario 3.2.1. *Se $G = GL_n(\mathbb{R})$, allora l'applicazione esponenziale definita in* (3.2.1) *coincide con l'esponenziale di matrici definita in* (2.1), *ovvero* $\forall X \in \boldsymbol{g}_{I_n}(\mathbb{R})$

$$exp(X) = e^X. \tag{3.37}$$

Dimostrazione. Per la Proposizione precedente, sia $exp(tX)$ che e^{tX} sono sottogruppi ad un parametro di G, tali che $exp(0) = I = e^0$, e quindi per l'unicità della curva integrale coincidono. □

Proposizione 3.2.3. *Sia $F\colon H \to G$ un omomorfismo di gruppi di Lie, e siano exp_H e exp_G le rispettive applicazioni esponenziali. Allora*

$$F \circ exp_H(X) = exp_H(F_{*e}X). \tag{3.38}$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{h} \arrow[r, "F_* e"] \arrow[d, "exp_H"] & \mathbf{g} \arrow[d, "exp_G"] \\ H \arrow[r, "F"] & G \end{tikzcd}$$

Notiamo prima di tutto che, dato $X \in T_eH$, sia $F(exp_H(tX))$ che $exp_G(F_{*e}(tX))$ sono sottogruppi ad un parametro di G. Per dimostrare l'uguaglianza quindi, basta dimostrare che entrambi sono generati dal campo $F_{*e}X$. Immediatamente si vede che

$$\frac{d}{dt}\left(exp_G(F_{*e}(tX))\right)_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(exp_G(tF_{*e}(X))\right)_{t=0} = F_{*e}X.$$

D'altra parte, ricordando che $exp_H(0) = e$ si ha

$$\frac{d}{dt}\left((F \circ exp_H)(tX)\right)_{t=0} = F_{*e}\left((exp_H)'_0(tX)\right) = F_{*e}X.$$

Confrontando le precedenti equazioni si ottiene la tesi. $\square$

Corollario 3.2.2. *Se H è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie G, allora*

$$exp_G|_{\boldsymbol{h}} = exp_{\boldsymbol{h}}.$$

Dal corollario precedente segue che per tutti i sottogruppi di $GL_n(\mathbb{R})$, l'applicazione esponenziale è sempre l'esponenziale di matrici.

Capitolo 4

Suriettività dell'esponenziale

In questo capitolo vedremo alcuni casi particolari in cui l'applicazione esponenziale definita nel capitolo precedente è suriettiva, ovvero tale che $exp(\mathbf{g}) = G$, dove G è un gruppo di Lie e $\mathbf{g}$ la sua algebra di Lie. In piu', basandoci sull'articolo [1], mostreremo alcune formule che permettono praticamente di calcolare l'esponenziale di una matrice.
Osserviamo prima di tutto il seguente fatto: sia G gruppo di Lie, $e \in G$ e sia G^e la componente connessa di e, ovvero il piu' grande sottoinsieme connesso di G che contiene e. Essendo $\mathbf{g}$ connesso[1], si ha che $exp(g) \subset G^e$. Da questo segue che **condizione necessaria** affinché exp sia suriettiva è che G sia connesso. Tale condizione non è però sufficiente, come mostra il seguente

Esempio 4.0.1. Sia $G = SL_2(\mathbb{R})$ e $exp\colon \mathbf{g}_{I_2}(\mathbb{R}) \to G$ l'applicazione esponenziale associata, che coincide con l'esponenziale di matrici per il Corollario 3.2.2. Ricordiamo che $B \in \mathbf{g}_{I_2}(\mathbb{R})$ è tale che $tr(B) = 0$. Consideriamo la matrice $A \in G$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dimostriamo che non esiste $B \in \mathbf{g}_{I_2}(\mathbb{R})$ tale che

$$exp(B) = e^B = A. \tag{4.1}$$

Supponiamo per assurdo che esista $B \in \mathbf{g}_{I_2}(\mathbb{R})$ tale che valga l'equazione precedente.

[1] Ogni spazio vettoriale topologico su un campo connesso è connesso.

Distinguiamo 2 casi:
Caso 1. Supponiamo che B sia diagonalizzabile si $\mathbb{R}$ e siano λ_1, λ_2 i suoi autovalori. Si ha allora che $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}$ sono gli autovalori della matrice $A = e^B$. Infatti, sia v un autovettore di B con autovalore λ, allora

$$Bv = \lambda v \Longrightarrow B^n v = \lambda^n v$$

da cui segue

$$Av = e^B v = (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!})v = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(B^j v) = (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!})v = e^{\lambda} v.$$

Ma gli autovalori di A sono -2 e $-\frac{1}{2}$, da cui si avrebbe l'assurdo

$$e^{\lambda_1} = -2, \; e^{\lambda_2} = -\frac{1}{2}.$$

Caso 2. Supponiamo che B non sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Siano allora α e $\overline{\alpha}$ gli autovalori complessi e coniugati di B. Allora come sopra e^{α} e $e^{\overline{\alpha}}$ sono gli autovalori di A, cioè

$$e^{\alpha} = -2, \; e^{\overline{\alpha}} = -\frac{1}{2}.$$

D'altra parte però si ha l'assurdo

$$2 = |e^{\alpha}| = |e^{\overline{\alpha}}| = \frac{1}{2}.$$

Dal fatto quindi che $exp(\mathbf{g})$ generi la componente connessa G^e di G, nascono 2 problemi di particolare interesse:

1. Determinare delle condizioni sul gruppo G affinché exp sia suriettiva.

2. Determinare l'immagine $exp(\mathbf{g})$ dell'applicazione esponenziale.

In [6, pp. 135 e 147] viene dimostrato il seguente teorema, che asserisce che se il gruppo di Lie è connesso e compatto, l'applicazione esponenziale è suriettiva:

Teorema 4.0.1. *Se G è connesso e compatto, allora l'applicazione esponenziale è suriettiva.*

Un gruppo di Lie (connesso) tale che $G = exp(\mathbf{g})$ si dice **esponenziale**.

Esempio 4.0.2. Per il precedente Teorema, $SO(n)$ è esponenziale.

La compattezza del gruppo di Lie è invece una condizione sufficiente, ma non necessaria, infatti piu' avanti dimostreremo che il **gruppo Euclideo speciale** $SE(n)$, composto dalle isometrie di $\mathbb{R}^n$ che preservano l'orientazione, non è compatto, tuttavia l'applicazione esponenziale è suriettiva.
Altro problema interessante è trovare una formula per l'applicazione esponenziale. Vedremo che quest'ultima esiste per i gruppi di Lie $SO(n)$ e $SE(n)$ chiamata **formula di Rodrigues**, e mostreremo qualche esempio concreto di come ricavarla nei casi $n = 2$ e $n = 3$.

4.1 Formula di Rodrigues per $SO(n)$

Consideriamo $G = SO(n)$. Abbiamo già dimostrato che è compatto e connesso, quindi l'applicazione esponenziale è suriettiva. Ci proponiamo però di dimostrare questo fatto in una maniera alternativa, cercando di determinare una formula esplicita, ovvero la forma della somma di (2.1). Sappiamo che l'algebra di Lie ***so(n)*** associata a $SO(n)$ è composta da tutte le matrici antisimmetriche[2], con il commutatore $[A, B] = AB - BA$. Sempre per il Corollario 3.2.2, l'applicazione esponenziale per ***so(n)*** coincide con l'esponenziale di matrici, infatti è la restrizione alla sottoalgebra di Lie ***so(n)*** di $\mathbf{g}_{I_n}(\mathbb{R})$, quindi $\forall X$ antisimmetrica:

$$exp(X) = e^X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{4.2}$$

Dall'algebra lineare, una matrice X antisimmetrica ha le seguenti proprietà:

- Se n è dispari, allora X è singolare e ha un autovalore uguale a 0.

- Gli autovalori non nulli sono immaginari puri e, ovviamente, complessi coniugati.

[2]Perché $SO(n)$ è un aperto di $O(n)$.

Teorema 4.1.1 (Hamilton-Cayley)**.** [9, p. 83]. *Siano $X \in M_n(\mathbb{R})$ e $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico. Allora il polinomio $p_A(A)$ ottenuto sostituendo x con la matrice A (di fatto "valutando" il polinomio con la matrice) è identicamente nullo, ovvero*

$$p_A(A) = 0.$$

Osservazione 4.1.1. Un'applicazione del precedente teorema ci risulterà particolarmente utile: supponiamo infatti di considerare una funzione analitica

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Sia ora $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico. Facendo la divisione tra polinomi la funzione f può essere espressa

$$f(x) = q(x)p_A(x) + r(x),$$

dove $q(x)$ è il polinomio quoziente e $r(x)$ è il resto. Chiaramente se $p(x)$ ha grado n, allora il il grado di $r(x)$ è minore di n. Per il Teorema di Hamilton-Cayley, si ha $p_A(A) = 0$ e quindi

$$f(A) = r(A)$$

ovvero

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(A) A^k$$

dove i coefficienti $c_k(A)$ dipendono dalla matrice A.

In accordo con l'osservazione precedente quindi, possiamo scrivere l'applicazione esponenziale come

$$exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X) X^k \tag{4.3}$$

dove i coefficienti $a_0(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ dipendono appunto dalla matrice X. Piu' precisamente, sono funzioni degli autovalori della matrice, cioè $a_j = a_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $j = 1, \ldots, n-1$. Trovare quindi una formula per $exp(X)$ significa determinare i coefficienti $a_0, \ldots, a_{n-1}$, chiamati **coefficienti di Rodrigues** della matrice X.

I coefficienti di Rodrigues soddisfano un' importante relazione, utile nei casi pratici, come enunciato dal seguente teorema:

Teorema 4.1.2. *Data $X \in GL_n(\mathbb{R})$, valgono i seguenti fatti*

1. *I coefficienti di Rodrigues di X sono soluzioni del sistema*

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+j} a_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s} \quad j = 0, \ldots, n-1 \tag{4.4}$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori di X e $S_j = \lambda_1^j + \cdots + \lambda_n^j$.

2. *Se gli autovalori della matrice X sono distinti a coppie, allora i coefficienti di Rodrigues sono perfettamente determinati dal sistema e sono combinazioni lineari di $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, cioè*

$$a_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = A_k^{(1)} e^{\lambda_1} + \cdots + A_k^{(n)} e^{\lambda_n} \quad k = 0, \ldots, n-1 \tag{4.5}$$

con $A_k^{(h)}$ funzioni razionali sempre degli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\forall k, h$.

Dimostrazione. Sia $X \in GL_n(\mathbb{R})$, moltiplichiamo la (4.3) per X^j, con $j = 0, \ldots, n-1$, ottenendo

$$X^j exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X) X^{k+j}$$

da cui si ricava la relazione sulle rispettive tracce

$$tr(X^j exp(X)) = \sum_{k=0}^{n-1} tr(X^{k+j}) a_k(X). \tag{4.6}$$

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di X. Grazie al Teorema 2.1.1 si può facilmente provare che gli autovalori di X^j sono $\lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j$, da cui, grazie alla Proposizione 2.2.1

$$tr(X^{k+j}) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{k+j}. \tag{4.7}$$

Per le stesse considerazioni e usando ancora il Teorema 2.1.1, si ha che gli autovalori della matrice $X^j exp(X)$ sono $\lambda_1^j e^{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n^j e^{\lambda_n}$, e dunque si ottiene:

$$tr(X^j exp(X)) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s}. \tag{4.8}$$

Sostituendo questi risultati in (4.6), e ponendo $S_j = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j$ si ottiene il sistema

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+j} a_k(X) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Per provare la parte 2 del teorema, occorre dimostrare che il sistema 4.4 è compatibile. Il determinante matrice dei coefficienti è

$$\delta = det \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} n & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{n-1} \\ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2 & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{n-1} & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^n & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{2n-2} \end{pmatrix}$$

Per induzione si può dimostrare che

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{n-1} \\ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2 & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{n-1} & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^n & \dots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{2n-2} \end{pmatrix} = VV^T$$

dove

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Sempre per induzione di prova che il determinante di V è dato da

$$det(V) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Sapendo per ipotesi che gli autovalori sono a due a due distinti, segue che $det(V) \neq 0$, da cui

$$\delta = det(V)^2 \neq 0. \qquad \square$$

Esempio 4.1.1 (Formula di Rodrigues per $SO(2)$)**.** Consideriamo $SO(2)$ e sia $X \in$ **so**(2). Se $X = O_2$, allora abbiamo già calcolato che

$$exp(O_2) = I_2$$

ergo i coefficienti di Rodrigues sono $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$. Supponiamo $X \neq O_2$, allora X sarà della forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}.$$

In questo caso gli autovalori sono $\lambda_1 = ai$, $\lambda_2 = -ai$ I coefficienti di Rodrigues soddisfano il sistema (4.5)

$$\begin{cases} 2a_0(X) + (\lambda_1 + \lambda_2)a_1(X) = e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \\ (\lambda_1 + \lambda_2)a_0(X) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)a_1(X) = \lambda_1 e^{\lambda_1} + \lambda_2 e^{\lambda_2} \end{cases}$$

da cui, attraverso alcuni calcoli:

$$\begin{cases} a_0(X) = \dfrac{1}{2}(e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2}) = \cos a \\ a_1(X) = \dfrac{\lambda e^{\lambda_1} + \lambda_2 e^{\lambda_2}}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} = \dfrac{\sin a}{a} \end{cases}$$

Ottenendo quindi l'espressione dell'esponenziale di matrici

$$exp(X) = (\cos a)\, I_2 + \left(\frac{\sin a}{a} \right) X. \tag{4.9}$$

Esempio 4.1.2 (Formula di Rodrigues per $SO(3)$)**.** Sia $X \in$ ***so(3)*** una matrice antisimmetrica, $X \neq O_3$, della forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

con a, b, c non tutti nulli. Per le proprietà delle matrici antisimmetriche di ordine dispari, sappiamo che un autovalore è nullo, supponiamo $\lambda_3 = 0$.

Per determinare gli altri due troviamo le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$p_X(\lambda) = \lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\lambda = 0$$

trovando quindi le soluzioni

$$\lambda_1 = i\theta, \quad \lambda_2 = -i\theta, \quad \lambda_3 = 0$$

con $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Il sistema (4.1.2) in questo caso diventa

$$\begin{cases} 3a_0(X) - 2\theta^2 a_2(X) = 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ -2\theta^2 a_1(X) = i\theta \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \\ -2\theta^2 a_0(X) + 2\theta^4 a_2(X) = -\theta^2 \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \end{cases} \tag{4.10}$$

svolgendo alcuni calcoli si trova il valore dei coefficienti di Rodrigues

$$a_0(X) = 1, \quad a_1(X) = \frac{\sin\theta}{\theta}, \quad a_2(X) = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$$

trovando cosi la formula ben nota

$$exp(X) = I_3 + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) X + \left(\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}\right) X^2. \tag{4.11}$$

Tale formula esprime la rotazione di un vettore dello spazio tridimensionale, infatti $\mathbf{so}(3)$ è isomorfa come algebra di Lie a $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto vettoriale usuale definito nel Capitolo 3(cfr. esempio 3.0.1), tramite l'isomorfismo

$$v = (a\ b\ c)^T \longrightarrow \overline{v} = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Banalmente in questo caso $\theta^2 = \|v\|$, ergo la formula (4.11) può essere scritta come

$$exp(\overline{v}) = I_3 + \left(\frac{\sin\|v\|}{\|v\|}\right) \overline{v} + \left(\frac{1 - \cos\|v\|}{\|v\|^2}\right) \overline{v}^2. \tag{4.13}$$

Osservazione 4.1.2. Nella formula (4.11), in molti casi risulta conveniente normalizzare la matrice X, ovvero scrivere $X = \theta X_1$, supponendo $\theta \neq 0$.

Con questa scrittura la formula (4.11) diventa:

$$exp(\theta X_1) = I_3 + \sin\theta X_1 + (1-\cos\theta)X_1^2. \tag{4.14}$$

Data inoltre $R \in SO(3)$, $R \neq I_3$, è possibile calcolare θ e X_1 tali per cui ponendo $X = \theta X_1$, si abbia $exp(X) = R$. Infatti, data X antisimmetrica, della forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

ponendo $\theta^2 = a^2 + b^2 + c^2$, osserviamo prima di tutto che $tr(X^2) = -2\theta^2$, da cui $tr(X_1^2) = -2$. Grazie a ciò, alla formula (4.14) e al fatto che X è antisimmetrica (e quindi $tr(X) = tr(X_1) = 0$), otteniamo un modo per ricavare θ dalla formula:

$$\begin{aligned} tr(R) =& tr(exp(\theta X_1)) = tr(I_3) + \sin\theta tr(X_1) + (1-\cos\theta)tr(X_1^2) \\ &= 3 - 2(1-\cos\theta) = 1 + 2\cos\theta. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Inoltre, nel caso in cui $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, vale la seguente relazione, grazie alla quale si può facilmente ricavare X_1

$$\frac{1}{2}(R - R^T) = \sin\theta X_1. \tag{4.16}$$

La precedente formula si ottiene ricordando che $R = exp(\theta X_1)$ e il fatto che X_1^2 sia simmetrica, e dunque:

$$\begin{aligned} (R - R^T) &= I_3 + \sin\theta X_1 + (1-\cos\theta)X_1^2 - (I_3 + \sin\theta X_1 + (1-\cos\theta)X_1^2)^T \\ &= I_3 + \sin\theta X_1 + (1-\cos\theta)X_1^2 - I_3 - \sin\theta(X_1)^T - (1-\cos\theta)(X_1^2)^T \\ &= 2\sin\theta X_1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Nel caso in cui $\theta = 0$, allora $X = O_3$ e quindi $exp(O_3) = I_3$. Se $\theta = \pi$, si può ricavare X_1 constatando che quest'ultima soddisfa la relazione

$$X_1^2 = \frac{1}{2}(R - I_3) \tag{4.18}$$

che discende facilmente dalla formula di Rodrigues.

Esempio 4.1.3 (Formula di Rodrigues per $SO(4)$)**.** Una matrice antisimmetrica $X \neq O_4$ di ordine 4 è del tipo:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

con a, b, c, d, f non tutti nulli. Il polinomio caratteristico è dato da

$$p_X(t) = t^4 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)t^2 + (af - be + cd)^2. \tag{4.19}$$

Grazie alle proprietà delle matrici antisimmetriche, abbiamo che le soluzioni ti tale polinomio sono del tipo

$$\lambda_1 = \alpha i, \quad \lambda_2 = -\alpha i, \quad \lambda_3 = \beta i, \quad \lambda_4 = -\beta i.$$

Con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, non contemporaneamente nulli. Attraverso calcoli algebrici, il sistema (4.4) diventa (per non appesantire la notazione, verrà omessa la dipendenza dei coefficienti di Rodrigues da X):

$$\begin{cases} 2a_0 + (\alpha^2 + \beta^2)a_2 = \cos\alpha + \cos\beta \\ -(\alpha^2 + \beta^2)a_1 + (\alpha^4 + \beta^4)a_3 = -\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta \\ -(\alpha^2 + \beta^2)a_0 + (\alpha^4 + \beta^4)a_2 = -\alpha^2\sin\alpha - \beta^2\sin\beta \\ -(\alpha^4 + \beta^4)a_1 - (\alpha^6 + \beta^6)a_3 = \alpha^3\sin\alpha + \beta^3\sin\beta \end{cases} \tag{4.20}$$

Suddividiamo il problema in 3 casi.
Caso 1. $\alpha \neq \beta$, entrambi diversi da 0. Allora in questo caso abbiamo le seguenti espressioni per i coefficienti di Rodrigues

$$a_0 = \frac{\beta^2\cos\alpha - \alpha^2\cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \qquad a_1 = \frac{\beta^3\cos\alpha - \alpha^3\cos\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}$$
$$a_2 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \qquad a_3 = \frac{\beta\cos\alpha - \alpha\cos\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}$$

Caso 2. $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. In questo caso, il metodo utilizzato in [1] per ottenere i coefficienti di Rodrigues è fare il limite dei precedenti coefficienti per β che tende a 0, ottenendo la seguente forma per l' applicazione esponenziale:

$$exp(X) = I_4 + X + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}X^2 + \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}X^3. \tag{4.21}$$

Caso 3. $\alpha = \beta \neq 0$. Come nel caso precedente, otteniamo la formula di Rodrigues facendo il limite $\beta \to \alpha$, ottenendo:

$$\begin{aligned} exp(X) = \frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2}I_4 + &\frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha}X + \\ &\frac{\sin\alpha}{2\alpha}X^2 + \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3}X^3. \end{aligned} \tag{4.22}$$

A questo punto sorge spontaneo chiedersi se sia possibile estendere il ragionamento proposto nell' *Osservazione* 4.1.2 ai casi per $n \geq 4$. In generale purtroppo non è possibile, e questo è dovuto al fatto che per $n = 3$, una matrice antisimmetrica X è tale che

$$X^3 = -\theta^2 X \tag{4.23}$$

dove $\theta^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e a, b, c sono le entrate non nulle di X. Purtroppo per $n \geq 4$, in generale la formula precedente è falsa. Quanto detto è giustificato dal seguente teorema, provato in [7], che ci fornisce una generalizzazione implicita della formula (4.13).

Teorema 4.1.3. *Sia $X \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica, $n \geq 3$, e sia*

$$\{\, i\theta_1, -i\theta_1, \ldots, i\theta_p, -i\theta_p \,\}$$

l'insieme degli autovalori distinti di X, con $\theta_j > 0$ per $j = 1, \ldots, p$ e sia $k_j \geq 1$ la molteplicità di $i\theta_j$ (e $-i\theta_j$). Allora esistono p uniche matrici antisimmetriche $X_1, \ldots, X_p$, con $2p \leq n$ tali che soddisfano le relazioni seguenti

$$X = \theta_1 X_1 + \cdots + \theta_p X_p, \qquad X_i X_j = X_j X_i = O_n \ (i \neq j), \qquad X_i^3 = -X_i,$$

$\forall 1 \leq i, j \leq p$. Inoltre si ha

$$exp(X) = I_n + \sum_{i=1}^{p}((\sin\theta_i)X_i + (1-\cos\theta_i)X_i^2) \tag{4.24}$$

e $\{\theta_1, \ldots, \theta_p\}$ *è l'insieme delle radici quadrate distinte dei* $2m$ *autovalori positivi della matrice simmetrica* $-\frac{1}{4}(X - X^T)^2$, *con* $m = k_1 + \cdots + k_p$.

Osservazione 4.1.3. Notiamo che, nel caso $n = 3$, si ottiene esattamente quanto fatto nell'*Osservazione*4.1.2, con $p = 1$.

Il teorema precedente è un risultato implicito in quanto in generale non è possibile calcolare le matrici $X_1, \ldots, X_p$.

Suriettività dell'applicazione esponenziale in $SO(n)$

Dal Teorema 4.0.1, sappiamo che per ogni gruppo di Lie connesso è compatto, l'applicazione esponenziale è suriettiva. Essendo quindi $SO(n)$ connesso e compatto, sappiamo già che è esponenziale. Proponiamo tuttavia una dimostrazione alternativa della suriettività utilizzando la formula di Rodrigues, in particolare dimostriamo il seguente

Teorema 4.1.4. *L'applicazione esponenziale*

$$exp\colon \boldsymbol{so(3)} \to SO(3)$$

è suriettiva.

Dimostrazione. Sia $R \in SO(3)$, della forma

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui $R = I_3$, il problema è risolto poiché per le proprietà dell'esponenziale sappiamo che

$$exp(O(3)) = I_3.$$

Supponiamo $R \neq I_3$. Utilizzando l'isomorfismo di algebre di Lie tra $\mathbb{R}^3$ e **so(3)**, vorremo trovare un vettore $\omega \in \mathbb{R}^3$ tale che, attraverso la formula (4.13), si abbia

$$exp(\overline{\omega}) = I_3 + \left(\frac{\sin\|\omega\|}{\|\omega\|}\right)\overline{\omega} + \left(\frac{1-\cos\|\omega\|}{\|\omega\|^2}\right)\overline{\omega}^2 = R. \tag{4.25}$$

Come fatto per l'*Osservazione*4.1.2, otteniamo la relazione

$$tr(R) = 1 + 2\cos\|\omega\|.$$

Notiamo che $-1 \leq tr(R) < 3$, ha senso quindi calcolare

$$\|\omega\| = \arccos \frac{tr(R) - 1}{2}.$$

Inoltre, supponendo $tr(R) \neq -1$, da cui $\|\omega\| \neq \pi$, svolgendo alcuni calcoli nella (4.25) si ottiene

$$R - R^T = 2 \left(\frac{\sin \|\omega\|}{\|\omega\|} \right) \overline{\omega}$$

Ricordando che se $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, si può scrivere $\overline{\omega}$ matrice antisimmetrica come descritto dalla (4.12). Si ottiene, dopo semplici calcoli algebrici, il sistema di 3 equazioni e 3 incognite

$$\begin{cases} r_{32} - r_{23} = 2 \left(\frac{\sin \|\omega\|}{\|\omega\|} \right) \omega_1 \\ r_{13} - r_{31} = 2 \left(\frac{\sin \|\omega\|}{\|\omega\|} \right) \omega_2 \\ r_{21} - r_{12} = 2 \left(\frac{\sin \|\omega\|}{\|\omega\|} \right) \omega_3 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene la forma di ω desiderata:

$$\omega = \left(\frac{\|\omega\|}{2 \sin \|\omega\|} \right) \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui $tr(R) = -1$, allora per le proprietà della traccia[3] e per il Lemma 2.1.1, esiste una matrice ortogonale D tale che $R = DR_\pi D^T$, con

$$R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la matrice antisimmetrica

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Grazie alla formula (4.11) è immediato verificare che $exp(X) = R_\pi$.

[3] Matrici simili hanno stessa traccia.

Definendo quindi la matrice antisimmetrica

$$\overline{\omega} = DXD^T$$

e usando le proprietà dell'esponenziale di matrici si ha

$$exp(\overline{\omega}) = Dexp(X)D^T = DR_\pi D^T = R$$

che prova la suriettività di *exp*. □

Osservazione 4.1.4. Nel caso in cui $tr(R) = -1$, allora $\|\omega\| = \pi$ e in accordo con l'Osservazione 4.1.2 possiamo ricavare ω dal sistema

$$\overline{\omega}^2 = \frac{\pi^2}{2}\,(R - I_3)\,. \tag{4.26}$$

Quest'ultimo è sempre risolvibile, poiché l'esponenziale è suriettiva.

Possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema 4.1.5. *L'applicazione esponenziale*

$$exp\colon \boldsymbol{so(n)} \to SO(n)$$

è suriettiva.

Dimostrazione. Sia $R \in SO(n)$, per il Lemma 2.1.2 esistono una matrice ortogonale P e una matrice diagonale D definita da m blocchi del tipo

$$D_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

tale che $R = PDP^T$. Definiamo ora le m matrici

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che dalla formula (4.9), vale

$$exp(E_i) = (\cos\theta_i)\, I_2 + \left(\frac{\sin\theta_i}{\theta_i}\right) E_i = D_i.$$

Sia E la matrice definita mediante le E_i come mostrata nel Lemma 2.1.1.Utilizzando la definizione di esponenziale di matrici si prova subito che $exp(E) = D$. Definiamo la matrice $X = PEP^T$. X è antisimmetrica poiché lo è E. Si ha quindi

$$exp(X) = exp(PEP^T) = Pexp(E)P^T = PDP^T = R$$

che è quello che volevamo dimostrare. □

Da quest'ultimo risultato e dal Teorema 4.1.3, abbiamo la seguente caratterizzazione per $SO(n)$

Teorema 4.1.6. *Data $R \in SO(n)$, con $n \geq 3$, sia $\{ e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p}, e^{i\theta_p} \}$ l'insieme dei suoi autovalori diversi da 1, con $0 < \theta_i \leq \pi$. Allora esistono $X_1, \dots, X_p$ matrici antisimmetriche tali che*

$$X = \theta_1 X_1 + \cdots + \theta_p X_p \qquad X_i X_j = X_j X_i = O_n \ (i \neq j) \qquad X_i^3 = -X_i.$$

Inoltre si ha

$$R = exp(\theta_1 X_1 + \cdots + \theta_p X_p).$$

4.2 Il Gruppo Euclideo Speciale $SE(n)$

Il Gruppo Euclideo $E(n)$ è il gruppo di tutte le isometrie dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$. Ad esempio per $n = 2$, $E(2)$ rappresenta il gruppo di tutte le traslazioni, rotazioni e riflessioni del piano. $E(n)$ può essere espresso in termini di matrici quadrate di ordine $(n + 1)$ nel modo seguente:

$$E(n) \colon = \left\{ \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid R \in O(n), \ v \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

Definizione 4.2.1. L'insieme delle mappe affini ρ di $\mathbb{R}^n$, definite da

$$\rho(x) = Rx + v \tag{4.27}$$

dove $R \in SO(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$, munito della composizione di applicazioni è un gruppo, chiamato *gruppo delle isometrie affini dirette* e indicato con $SE(n)$.

$SE(n)$ può essere visto come insieme di matrici di ordine $(n+1)$, ovvero:

$$SE(n) \colon = \left\{ \Omega = \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid R \in SO(n),\ v \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}. \tag{4.28}$$

Ergo $SE(n) \subset E(n)$. Tale insieme, munito delle operazioni di prodotto tra matrici

$$\Omega_1\Omega_2 = \begin{pmatrix} R_1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1R_2 & R_1v_2 + v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

e l'inversa definita da

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

è ancora un gruppo. Piu' precisamente $SE(n)$ è un sottogruppo chiuso di $SL_{n+1}(\mathbb{R})$, infatti $det(\Omega) = det(R) = 1$, inoltre supponiamo di considerare una successione $(\Omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $SE(n)$ convergente(stiamo pensando $M_n(\mathbb{R})$ con la norma di Frobenius) ad una matrice Ω. Essendo convergente è di Cauchy, ergo $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|\Omega_m - \Omega_n\| < \epsilon, \quad m, n > N.$$

Ottenendo quindi le successioni

$$\|R_m - R_n\| < \epsilon \quad m, n > N \tag{4.31}$$

$$\|v_m - v_n\| < \epsilon \quad m, n > N \tag{4.32}$$

Dunque $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$, ed essendo completo è convergente ad un certo $v \in \mathbb{R}^n$. Anche $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $M_n(\mathbb{R})$ e dunque convergente a $R \in M_n(\mathbb{R})$ in quanto anch'esso completo. La matrice Ω e quindi della forma

$$\Omega = \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si hanno due casi: se $R \notin GL_n(\mathbb{R})$, allora $det(R) = 0$. Ma allora $det(\Omega) = det(R) = 0$, ma questo è assurdo poiché il determinante è una funzione continua. Necessariamente allora $R \in GL_n(\mathbb{R})$, ma essendo $SO(n)$ chiuso, concludiamo che $R \in SO(n)$.

Essendo un sottogruppo chiuso di $SL_{n+1}(\mathbb{R}) \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$, per l'Osservazione 2.1.2, è un sottogruppo di Lie di $GL_{n+1}(\mathbb{R})$, e quindi un gruppo di Lie, chiamato **gruppo Euclideo Speciale**.

Osservazione 4.2.1. Esattamente come nell' Esempio 2.2.2, si prova che $SE(n)$ è connesso. Tuttavia non è compatto in quanto non è limitato, infatti consideriamo le matrici $\Omega_m \in SE(n)$ della forma

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} I_n & v_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $v_m = (m, 0, \dots, 0)$, $m \neq 0$. La norma di Ω è

$$\|\Omega\| = \sqrt{m+1}$$

di conseguenza la successione $(\Omega_m)_{m \geq 0}$ non è limitata.

Definizione 4.2.2. Lo spazio vettoriale formato da tutte le matrici $M_{n+1}(\mathbb{R})$ della forma

$$A = \begin{pmatrix} X & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

dove X è una matrice antisimmetrica e $b \in \mathbb{R}^n$, è denotato con ***se(n)***.

Osservazione 4.2.2. ***se(n)*** è l'algebra di Lie associata a $SE(n)$. Presa infatti $c(t)$ una curva in $SE(n)$ tale che $c(0) = I_{n+1}$ della forma

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) & c_2(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $c_1(t)$ una curva in $SO(n)$, mentre $c_2(t)$ una curva in $\mathbb{R}^n$. Notiamo che $c_1(0) = I_n$, $c_2(0) = 0$. Il suo vettore velocità valutato in 0 è

$$c'(0) = \begin{pmatrix} c_1'(0) & c_2'(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_{I_{n+1}} SE(n)$$

con $c_1'(0) \in T_{I_n} SO(n)$, $c_2'(0) \in \mathbb{R}^n$. Ma allora $c_1'(0)$ è una matrice antisimmetrica per definizione di $T_{I_n} SO(n)$. Segue che

$$T_{I_{n+1}} SE(n) = \boldsymbol{se(n)}.$$

Essendo $SE(n)$ un sottogruppo di Lie di $GL_{n+1}(\mathbb{R})$, ***se(n)*** è una sottoalgebra di $\mathbf{g}_I(\mathbb{R})$, e quindi l'esponenziale

$$exp\colon \boldsymbol{se(n)} \to SE(n)$$

coincide con l'esponenziale di matrici definita nei capitoli precedenti.

4.3 Formula di Rodrigues per $SE(n)$

Sia $A \in$ ***se(n)*** della forma (4.33). Il suo polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ è tale che

$$p_A(\lambda) = -\lambda p_x(\lambda) \tag{4.34}$$

dove $p_X(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice antisimmetrica X della Definizione (4.33). Infatti

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_{n+1}) = det \begin{pmatrix} X - \lambda I_n & b \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda det(X - \lambda I_n) = -\lambda p_X(\lambda).$$

Esempio 4.3.1 (Formula di Rodrigues per $SE(2)$)**.** Data una matrice $A \in$ ***se(2)***, sappiamo che se $A = O_3$, allora

$$exp(O_3) = I_3.$$

Sia $X \neq O_2$ matrice antisimmetrica del tipo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula (4.34) e da quanto visto precedentemente per $SO(2)$, segue che gli autovalori di $A \in$ ***se(2)*** data da

$$A = \begin{pmatrix} X & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda_1 = ai$, $\lambda_2 = -ai$, $\lambda_3 = 0$. Per la (4.3) l'esponenziale valutata in A è

$$exp(A) = a_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)I_3 + a_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)A + a_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)A^2$$

e per il Teorema 4.1.2, i coefficienti soddisfano il sistema (4.4). Per quanto appena trovato, il sistema si riduce a quello risolto nel caso di $SO(3)$, ottenendo quindi la classica formula di Rodrigues

$$exp(A) = I_3 + \frac{\sin a}{a} A + \frac{1 - \cos a}{a^2} A^2. \tag{4.35}$$

Suriettività dell'applicazione esponenziale in $SE(n)$

Come abbiamo visto, non essendo $SE(n)$ compatto, non è possibile utilizzare il Teorema 4.0.1 per concludere che l'applicazione esponenziale

$$exp\colon \boldsymbol{se(n)} \to SE(n)$$

è suriettiva. In questo caso dunque conoscere la formula risulta essere uno strumento decisivo per dimostrarlo. Dimostreremo inizialmente il caso $n = 2$, per poi studiare la suriettività per $n \geq 3$.

Teorema 4.3.1. *L'applicazione*

$$exp\colon \boldsymbol{se(2)} \to SE(2)$$

è suriettiva e non iniettiva.

Dimostrazione. Sia

$$X = \begin{pmatrix} R_\theta & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(n)$$

dove

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) \qquad v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Supponiamo per ora $0 < \theta \leq \pi$. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & x_1 \\ a & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{se(2)}$$

con $a \neq 0$. Usando la formula (4.35), si ha

$$exp(A) = I_3 + \frac{\sin a}{a} A + \frac{1 - \cos a}{a^2} A^2.$$

Il problema si riduce quindi a trovare a, x_1, x_2 tali che

$$exp(A) = X.$$

Dopo semplici calcoli algebrici, si trova che $a = \theta$ e

$$x_1 = \frac{\theta \sin\theta v_1}{2(1-\cos(\theta))} + \frac{\theta v_2}{2}, \qquad x_2 = \frac{\theta \sin\theta v_2}{2(1-\cos(\theta))} - \frac{\theta v_1}{2}.$$

Se $\theta = 0$, allora la matrice X è

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{se(2)}.$$

Usando la (4.2), e osservando che $\Omega^k = O_3$ per $k \geq 2$, si dimostra facilmente che $exp(\Omega) = X$.

Dimostriamo ora che exp non è iniettiva. Consideriamo le matrici

$$\Omega_1 = O_3, \qquad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula (4.35) e dalle proprietà dell'applicazione esponenziale segue che

$$exp(\Omega_1) = exp(\Omega_2) = I_3$$

il che prova che l'esponenziale non è iniettiva. $\square$

Per generalizzare questo risultato al caso $n \geq 3$, occorrono dei risultati preliminari.

Proposizione 4.3.1. *Data $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ della forma*

$$A = \begin{pmatrix} X & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $X \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $b \in \mathbb{R}^n$. *Allora*

$$A^k = \begin{pmatrix} X^k & X^{k-1}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $X^0 = I_n$. *Come conseguenza vale*

$$exp(A) = \begin{pmatrix} exp(X) & Vb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

dove

$$V = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{(k+1)!}. \tag{4.37}$$

Dimostrazione. Per induzione su k, si prova facilmente che

$$A^k = \begin{pmatrix} X^k & X^{k-1}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per definizione di esponenziale di matrici e per l'espressione di A^k appena vista si ha

$$\begin{aligned} exp(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} X^k & X^{k-1}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{k-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} exp(X) & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{k-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Facendo un cambio di indice in $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^{k-1}$, ponendo $i = k-1$, si ottiene la matrice

$$V = I_n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} X^i.$$ □

Osservazione 4.3.1. La matrice V può essere scritta come

$$V = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{(k+1)!} = \int_0^1 exp(tX)dt. \tag{4.38}$$

Infatti, usando la definizione di esponenziale di matrici 4.2, e il fatto che la serie è convergente, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 exp(tX)dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \int_0^1 t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{(k+1)!} \\ &= I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{(k+1)!}.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Notiamo anche che l'integrale presente nella (4.38) può anche essere svolto come un integrale usuale per l'esponenziale ottenendo

$$\int_0^1 exp(tX)dt = \left[X^{-1}exp(tX)\right]_0^1 = X^{-1}(exp(X) - I_n).$$

La formula appena trovata tuttavia ha senso solo nel caso in cui X sia invertibile. Usando invece la definizione (4.2) come fatto in (4.39) si evita questa singolarità.

Il teorema successivo fornisce una formula di Rodrigues implicita per $SE(n)$ che ci sarà utile per dimostrare la suriettività dell'esponenziale:

Teorema 4.3.2. *Sia A una matrice di ordine $(n+1)$ della forma*

$$A = \begin{pmatrix} X & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{se(n)}$$

con X antisimmetrica e $b \in \mathbb{R}^n$, e sia $\{ i\theta_1, -i\theta_2, \ldots, i\theta_p, -i\theta_p \}$ l'insieme degli autovalori non nulli di X.

Allora esistono uniche $X_1, \ldots, X_p$ matrici antisimmetriche tali che

$$X = \sum_{i=1}^{p} \theta_i X_i, \qquad X_i X_j = X_j X_i = O_n (i \neq j), \qquad X_i^3 = -X_i.$$

Inoltre si ha

$$exp(A) = \begin{pmatrix} exp(X) & Vb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

dove

$$exp(X) = I_n + \sum_{i=1}^{p}((\sin\theta_i)X_i + (1-\cos\theta_i)X_i^2), \tag{4.41}$$

$$V = I_n + \sum_{i=1}^{p}\big(\frac{1-\cos\theta_i}{\theta_i}X_i + \frac{\theta_i - \sin\theta_i}{\theta_i^2}X_i^2\big). \tag{4.42}$$

Dimostrazione. L'espressione (4.40) deriva dalla Proposizione 4.3.1. Essendo X antisimmetrica, siamo nelle condizioni di poter utilizzare il Teorema 4.1.3, che ci garantisce l'esistenza e l'unicità delle matrici $X_1, \ldots, X_p$ che soddisfano le condizioni richieste e tali che valga l'espressione (4.41).
Si ha che

$$exp(tX) = I_n + \sum_{i=1}^{p}(\sin t\theta_i X_i + (1-\cos t\theta_i)X_i^2).$$

Dall' equazione (4.38) otteniamo:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 exp(tX)dt = \int_0^1 \left(I_n + \sum_{i=1}^{p}(\sin t\theta_i X_i + (1-\cos t\theta_i)X_i^2) \right) dt \\ &= \left[tI_n + \sum_{i=1}^{p}(-\frac{\cos t\theta_i}{\theta_i}X_i + (t - \frac{\sin t\theta_i}{\theta_i})X_i^2) \right]_0^1 \\ &= I_n + \sum_{i=1}^{p}\big(\frac{1-\cos\theta_i}{\theta_i}X_i + \frac{\theta_i - \sin\theta_i}{\theta_i^2}X_i^2\big) \end{aligned}$$

che è quello che volevamo dimostrare. □

Grazie a questa formula possiamo ora dimostrare la suriettività dell'applicazione esponenziale per $n \geq 3$.

Teorema 4.3.3. *Per $n \geq 3$, l'applicazione esponenziale*

$$exp\colon \boldsymbol{se(n)} \to SE(n)$$

è suriettiva.

Dimostrazione. Sia $Y \in SO(n)$ e $w \in R^n$, consideriamo la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} Y & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(n)$$

vogliamo dimostrare l'esistenza di una matrice $A \in \boldsymbol{se(n)}$ tale che $exp(A) = \Omega$. Dobbiamo quindi trovare una matrice X antisimmetrica e $b \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$exp \begin{pmatrix} X & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per il Teorema 4.3.2, vale la relazione (4.40), e quindi X e b devono essere tali che

$$exp(X) = Y \tag{4.43}$$

$$Vb = w \tag{4.44}$$

Poichè $Y \in SO(n)$, dal fatto che esponenziale per $SO(n)$ è suriettiva segue l'esistenza di una matrice X antisimmetrica tale che valga la prima prima equazione.
Resta quindi da dimostrare che si può trovare $b \in R^n$ tale che sia vera (4.44). Ciò equivale a dimostrare che la matrice V è invertibile. Infatti se questo fosse vero, basta porre

$$b = V^{-1}w$$

per ottenere la tesi. Sempre per il Teorema 4.3.2, V è espressa come

$$V = I_n + \sum_{i=1}^{p} \big(\frac{1-\cos\theta_i}{\theta_i} X_i + \frac{\theta_i - \sin\theta_i}{\theta_i^2} X_i^2\big).$$

Assumiamo che la forma di V^{-1} sia

$$W = I_n + \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i X_i + \beta_i X_i^2\right) \tag{4.45}$$

Affinché W sia l'inversa di V deve valere la relazione $WV = VW = I_n$.

L'equazione $VW = I_n$, dopo alcuni calcoli, è data da

$$\begin{aligned} I_n =& I_n + \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\sin\theta_i \alpha_i}{\theta_i} - \frac{(1-\cos\theta_i)\beta_i}{\theta_i} + \frac{(1-\cos\theta_i)}{\theta_i} \right) X_i \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{(1-\cos\theta_i)\alpha_i}{\theta_i} + \frac{\sin\theta_i \beta_i}{\theta_i} + \frac{(\theta_i - \sin\theta_i)}{\theta_i} \right) X_i^2 \end{aligned}$$

il che si riduce a risolvere p sistemi lineari nelle incognite α_i, β_i del tipo

$$\begin{cases} \sin\theta_i \alpha_i - (1-\cos\theta_i)\beta_i = \cos\theta_i - 1 \\ (1-\cos\theta_i \alpha_i + \sin\theta_i \beta_i = \sin\theta_i - \theta_i \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile poiché il determinante della matrice associata è

$$\sin\theta_i{}^2 + (1-\cos\theta_i)^2 = 2(1-\cos\theta_i) \neq 0$$

in quanto, per il Teorema 4.3.2 $0 < \theta_i \leq \pi$. Ergo esistono unici α_i, β_i per ogni p, e quindi è possibile definire W della forma (4.45), il che prova che V è invertibile. □
Concludiamo il capitolo facendo la seguente osservazione: sia

$$\Omega = \begin{pmatrix} X & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{se(n)}.$$

Grazie al Teorema 4.3.2 abbiamo che $X = \sum_{i=1}^{p} \theta_i X_i$. Definiamo la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} X_i & \frac{b}{\theta_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ovviamente $\Omega_i \in \boldsymbol{se(n)}$ per costruzione, e dunque vale la relazione

$$\Omega_i^k = \begin{pmatrix} X^k & X^{k-1}\frac{b}{\theta_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando quest'ultimo fatto e che vale $X_i^3 = -X_i$, dopo alcuni calcoli si dimostra che vale

$$exp(\Omega) = I_{n+1} + \Omega + \sum_{i=1}^{p} \left((1-\cos\theta_i)\Omega_i^2 + (\theta_i - \sin\theta_i)\Omega_i^3 \right).$$

Bibliografia

[1] Ramona-Andreea Rohan, *Some Remarks on the Exponential Map on the Groups $SO(n)$ and $SE(n)$*, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science Babe¸s-Bolyai University, Str. Kog˘alniceanu 1, 400084, Cluj-Napoca, Romania.

[2] Boothby William M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York 1986.

[3] Tu Lorig W., *An Introduction to Manifolds*, Springer New York Dordrecht Heidelberg, London 2011.

[4] E. Abbena , S. Console, S. Garbiero, *Gruppi di Lie*, dipartimento di Matematica di Torino, A.A 2006-2007.

[5] Karin Erdmann and Mark J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer-Verlag, London 2006.

[6] Helgason Sicurdur, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York 1978; ristampato da American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[7] Gallier J. and Xu D., *Computing Exponential o Skew-Symmetric Matrices And Logatithms of Orthogonal Matrices*, Int. J. Robotics and Automation 17 (2002) 2-11.

[8] Andrica D. and Rohan R.-A, *Computing the Rodrigues coefficients of the exponential map of the Lie groups of matrices*, Balkan Journal of Geometry and Applications.

[9] F.R.Gantmacher, *The Theory Of Matrices, Volume One*, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[10] M.-J. Kim, M.-S. Kim, e S.Y. Shin, *A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives*,Annual Conference Series, ACM, 1995, 369–376.

[11] N.J.Hilgram, *Functions on Matrices, Theory and Computation*,University of Manchester Manchester, United Kingdom, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.