# Tesi di laurea di Chiara Leo

## Reticoli e algebre di Boole

Febbraio 2016

**Teorema**

Ogni reticolo distributivo limitato L è isomorfo ad un sottoreticolo di un reticolo del tipo $\mathcal{P}(X)$.

## Definizione

Un reticolo è un insieme ordinato ($L$,$\leq$) tale che per ogni coppia a,b$\in$L l'insieme {a,b} ammette estremo superiore, denotato con $a \vee b$, e estremo inferiore, denotato con $a \wedge b$.

## NOTAZIONE

Nel seguito denoteremo con ($L$,$\wedge$, $\vee$) un reticolo per mettere in evidenza le operazioni $\wedge$ e $\vee$.

Legge commutativa e associativa in un reticolo:

-$x \wedge y = y \wedge x$,

-$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,

-$x \vee y = y \vee x$,

-$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

### Definizione

Si dice che $L$ è *limitato* se ammette massimo e minimo, indicati rispettivamente con 1 e 0.

### NOTAZIONE

$(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ denota un reticolo limitato.

### Definizione

Un reticolo limitato $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ si dice *distributivo* se soddisfa una delle due condizioni equivalenti:
$(a)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
$(b)$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

### Definizioni

Sia $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ un reticolo limitato, allora un elemento $a \in L$ si dice *complemento* di un elemento b se $a \vee b = 1$ e $a \wedge b = 0$;

### Proprietà

Se un elemento $x$ di un reticolo $X$ limitato e distributivo ammette complemento $\overline{x}$, allora tale complemento è unico.

### Definizione

un reticolo distributivo e complementato si dice *reticolo di Boole* o *reticolo Booleano*.

### Proprietà

In un reticolo di Boole valgono le leggi di De Morgan:
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ ; $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ .

## Proprietà

-L'insieme ordinato $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, con $0 < 1$, ammette un'unica struttura di reticolo che lo rende un reticolo Booleano.
-Ogni reticolo Booleano contiene una copia di $\mathbb{B}$.
-Per ogni insieme non vuoto $X$ l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ risulta un reticolo Booleano, con $1 = X$ , $0 = \emptyset$, $A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = A \cap B$ per $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Di conseguenza ogni sottoreticolo di $\mathcal{P}(X)$ risulta distributivo.

## Definizione

Un sottoinsieme $M$ di un reticolo $(L, \wedge, \vee)$ si dice sottoreticolo se $a \wedge b \in M$ e $a \vee b \in M$ per ogni $a, b \in M$.

### Proprietà

Un insieme totalmente ordinato è un reticolo di Boole se e solo se coincide con $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

### Definizioni

Sia $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ un reticolo limitato. Un *ideale* di $L$ è un sottoinsieme non vuoto $I$ di $L$ con le proprietà:
$(a) 1 \notin I$;
$(b)$se $a \in I$ e $b \leq a$ allora anche $b \in I$;
$(c)$se $a, b \in I$, allora anche $a \vee b \in I$.

### Definizione

Un ideale $I$ di $L$ è *primo* se $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ oppure $b \in I$.

## Lemma (esistenza di ideali primi)

Siano L un reticolo distributivo, $x, y \in L$ con $y \nleq x$. Allora esiste un ideale primo di L che contiene x ma non contiene y.

**DIMOSTRAZIONE:** Sia $\mathcal{I}$ l'insieme degli ideali di $L$ che contengono $x$ e non contengono $y$.
Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale $M$ di $\mathcal{I}$.
Dobbiamo dimostrare che $M$ è primo. Supponiamo che esistano $a, b \in L$ con $a \wedge b \in M$ , ma $a \notin M$ e $b \notin M$. Sia $M_a$ l'insieme degli elementi $u$ di $L$ tale che esiste $m \in M$ con $u \leq a \vee m$.
Dimostriamo che $M_a$ è un ideale:
- siano $u, v \in M_a$ , e $t \in L$ con $t \leq u$, allora $t \in M_a$;
- se $u \leq a \vee m$ e $v \leq a \vee n$ con $n, m \in M$, allora $u \vee v \leq a \vee (n \vee m)$ con $n \vee m \in M$, in quanto $M$ è un ideale, quindi $u \vee v \in M_a$;
- infine se per assurdo $1 \in M_a$, si avrebbe $1 = a \vee m$, per qualche $m \in M$. Allora
$m \vee (a \wedge b) = (m \vee a) \wedge (m \vee b) = 1 \wedge (m \vee b) = m \vee b$ è un

elemento di $M$ e quindi anche $b \leq m \vee b$ è un elemento di $M$, in quanto $M$ è un ideale, ma questo contraddice l'ipotesi $b \notin M$.
Pertanto $1 \notin M_a$.
Dunque $M_a$ è un ideale e contiene $M$ ( perché $m \leq a \vee m$ per definizione di estremo superiore).
Osserviamo che $a \leq a \vee (a \wedge b)$ , da cui segue $a \in M_a$. Allora $M_a$ è un ideale di $L$ che contiene propriamente $M$, e quindi $M_a \notin \mathcal{I}$ perchè $M$ è massimale per $\mathcal{I}$ , cioè $y \in M_a$.
Di conseguenza $y \leq a \vee m_1$ per qualche elemento $m_1 \in M$.
Analogamente risulta $y \leq b \vee m_2$ per qualche elemento $m_2 \in M$.
Dunque $y = y \wedge y \leq (a \vee m_1) \wedge (b \vee m_2) =$
$(a \wedge b) \vee (a \wedge m_2) \vee (m_1 \wedge b) \vee (m_1 \wedge m_2) \in M$, pertanto $y \in M$ , ma ciò è assurdo.

Quindi $M_a$ non è un ideale e $b \in M$.

## Definizioni

Siano $(L_1, \wedge, \vee)$ e $(L_2, \wedge, \vee)$ due reticoli. Allora un'applicazione $f : L_1 \to L_2$ si dice un *omomorfismo* di reticoli , se $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ e $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ per tutti gli $a, b \in L$. Se $f$ è biettiva, $f$ si dice un *isomorfismo* di reticoli. Se $L_1$ ed $L_2$ sono reticoli limitati con $0_i$ e $1_i$ il minimo e il massimo di $L_i$ , $i = 1, 2$ , allora $f$ si dice un omomorfismo di reticoli limitati se $f(1_1) = 1_2$ e $f(0_1) = 0_2$.

### Teorema

Ogni reticolo distributivo limitato L è isomorfo ad un sottoreticolo di un reticolo del tipo $\mathcal{P}$(X).

### Dimostrazione

Sia $X$ l'insieme degli ideali primi di $L$. All'elemento $x \in L$ si mette in corrispondenza l'insieme $P_x$ degli ideali primi di $L$ che non contengono $x$. Consideriamo l'applicazione $\varphi\colon L \to \mathcal{P}(X)$ definita da $\varphi(x) := P_x$. Valgono $\varphi(x \vee y) = P_{x \vee y} = P_x \cup P_y$ e $\varphi(x \wedge y) = P_{x \wedge y} = P_x \cap P_y$. Pertanto $\varphi$ è un omomorfismo di reticoli tra $L$ e $\varphi(L)$, quindi $\varphi(L)$ è un sottoreticolo di $\mathcal{P}(X)$. Segue dal lemma sugli ideali primi che $\varphi\colon L \to \mathcal{P}(X)$ è iniettiva. Dunque $L$ è isomorfo al sottoreticolo $\varphi(L)$ di $\mathcal{P}(X)$.