Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

Il caos implica dipendenze sensibili dalle condizioni iniziali

Chiara Lenzi

Anno Accademico 2017-2018

Obiettivo

Dimostrare che la nozione metrica di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali è una conseguenza della definizione topologica di caos.

Definizioni utili

1. Funzione caotica
2. Funzione con dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

Funzione Caotica

Definizione

Sia X uno spazio topologico.
Una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ è detta CAOTICA se:

- un insieme di punti periodici di f è denso in X;
- per ogni U aperto in X, dato V aperto in X, esiste x $\in U$ e n $\in \mathbb{Z}$ tale che f^n(x) $\in V$

Funzione Caotica

Definizione

Sia X uno spazio topologico.
Una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ è detta CAOTICA se:

- un insieme di punti periodici di f è denso in X;
- per ogni U aperto in X, dato V aperto in X, esiste x $\in U$ e n $\in \mathbb{Z}$ tale che f^n(x) $\in V$

Definizione

Un *punto periodico* con periodo n di una funzione f è un punto x_0 nel dominio di f tale che $f^n(x_0) = x_0$

Funzione con dipendenze sensibili dalle condizioni iniziali

Definizione

Sia (X,d) uno spazio metrico.
Una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ha una DIPENDENZA SENSIBILE DALLE CONDIZIONI INIZIALI se esiste $\delta >0$ tale che
per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$
esiste $y \in B_d(x, \varepsilon)$ e $n \in \mathbb{Z}_+$ tale che

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta \tag{1}$$

Teorema (*enunciato*)

Teorema

Sia X uno spazio metrico infinito e sia f $: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *una funzione continua e caotica.*
Allora f ha sensibili dipendenze dalle condizioni iniziali.

Dimostrazione

Prima parte: scelta di δ

Siano q e q' due punti periodici di f le cui orbite sono disgiunte.

Sia δ_0 la minima distanza fra le orbite
$\Rightarrow \delta_0 > 0$
$\Rightarrow$ possiamo porre $\delta = \frac{\delta_0}{8}$

Siano inoltre $x \in X$ e $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow \varepsilon \leq \delta$

Dimostrazione

Prima parte: scelta di δ

I punti periodici di f sono densi $\Rightarrow$ esiste un punto periodico p in $B_d(x, \varepsilon)$
poniamo m = periodo di p

sia $z \in$ orbita di $q \Rightarrow d(z, x) > \frac{\delta_0}{2}$
sia $z' \in$ orbita di $q' \Rightarrow d(z', x) > \frac{\delta_0}{2}$

Dimostrazione

Prima parte: scelta di δ

Se per assurdo non fosse vero, avremmo:

esiste $w \in$ orbita di q
esiste $w' \in$ orbita di q'

tali che $d(w, w') < \delta_0$

ASSURDO!

Dimostrazione

Prima parte: scelta di δ

Se per assurdo non fosse vero, avremmo:

esiste $w \in$ orbita di q
esiste $w' \in$ orbita di q'
tali che $d(w, w') < \delta_0$

ASSURDO!

Possiamo porre $\frac{\delta_0}{2} = 4\delta$

Dimostrazione

Dimostrazione-*Seconda parte*

Consideriamo:

- $B_0 = B_\delta(q)$
- $B_j = B_\delta(f^j(q))$ con $j = 1, .., m$

Ma f^j é una funzione continua $\Rightarrow (f^j)^{-1}(B_j)$ sono aperti e $q \in (f^j)^{-1}(B_j)\ \forall j = 1, .., m$

$\Rightarrow V = B_0 \bigcap (\bigcap_{j=1}^{m}((f^j)^{-1}(B_j))$ è aperto e contiene q

Dimostrazione

Dimostrazione-*Seconda parte* (IDEA)

Vogliamo dimostrare che esiste un intorno di q tale che:
per ogni v appartenente all'intorno di q i punti $f^1(v), .., f^m(v)$, distano tutti δ dall'orbita di q.

Dimostrazione

Dimostrazione-*Seconda parte*

Per la transitività topologica:
esite $w \in B_d(x, \varepsilon)$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tale che $f^k(w) \in V$

$\Rightarrow$ esiste $h \in \mathbb{Z}_+$ tale che $k \leq hm \leq k + m$.

Ma questo $\Rightarrow d(f^{hm}(p), f^{hm}(w)) > 2\delta$.

Dimostrazione

Dimostrazione-*Seconda parte*

Dimostriamo che $d(f^{hm}(p), f^{hm}(w)) > 2\delta$:

- Prendiamo come notazione $p = f^{hm}(p)$.
- Notiamo che $f^k(w) \in V$

$\Rightarrow$ in particolare abbiamo che $f^{hm}(w) \in B_{hm-k}$
$\Rightarrow d(f^{hm}(w), f^{hm-k}(q)) < \delta$

Dimostrazione

Dimostrazione-*Seconda parte*

Dimostriamo che $d(f^{hm}(p), f^{hm}(w)) > 2\delta$:

- Prendiamo come notazione $p = f^{hm}(p)$.
- Notiamo che $f^k(w) \in V$

$\Rightarrow$ in particolare abbiamo che $f^{hm}(w) \in B_{hm-k}$
$\Rightarrow d(f^{hm}(w), f^{hm-k}(q)) < \delta$

..*usiamo la disuguaglianza triangolare*

$$d(x, f^{hm-k}(q)) \leq d(x,p) + d(p, f^{hm}(w)) + d(f^{hm}(w), f^{hm-k}(q))$$
$$\leq \delta + d(p, f^{hm}(w)) + \delta$$
$$\leq 2\delta + d(p, f^{hm}(w))$$

Dimostrazione

Dimostrazione-*Seconda parte*

Scegliamo:

$4\delta < d(x, f^{hm-k}(q))$

$\Rightarrow 4\delta < 2\delta + d(p, f^{hm}(w))$

$\Rightarrow d(p, f^{hm}(w)) > 2\delta$

$\Rightarrow d(f^{hm}(p), f^{hm}(w)) > 2\delta$

Dimostrazione

Dimostrazione-*Terza parte*

Abbiamo due possibilità:

- $d(f^{hm}(x), f^{hm}(w)) > \delta$ o $d(f^{hm}(x), f^{hm}(p)) > \delta$

  oppure

- $d(f^{hm}(x), f^{hm}(w)) \leq \delta$ e $d(f^{hm}(x), f^{hm}(p)) \leq \delta$

Dimostrazione

Dimostrazione-*Terza parte*

Abbiamo due possibilità:

- $d(f^{hm}(x), f^{hm}(w)) > \delta$ o $d(f^{hm}(x), f^{hm}(p)) > \delta$

  oppure

- $d(f^{hm}(x), f^{hm}(w)) \leq \delta$ e $d(f^{hm}(x), f^{hm}(p)) \leq \delta$

Ma se $d(f^{hm}(x), f^{hm}(w)) \leq \delta$ e $d(f^{hm}(x), f^{hm}(p)) \leq \delta$
$\Rightarrow$ dalla disuguaglianza triangolare segue che
$d(f^{hm}(p), f^{hm}(w)) \leq 2\delta$
ASSURDO!

Dimostrazione

Dimostrazione.

Chiamiamo $n = hm$

Ma abbiamo che:

- $w \in B_d(x, \varepsilon)$
- $p \in B_d(x, \varepsilon)$

$\Rightarrow$

esiste $y \in B_d(x, \varepsilon)$ e esiste $n \in \mathbb{Z}_+$ tale che $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$

Completando così la dimostrazione del teorema.

$\square$

FINE

Grazie per la cortese attenzione.