UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN MATEMATICA

PROPRIETÁ DI SOLLEVAMENTO DI UN RIVESTIMENTO

Relatore:
Prof. Andrea Loi

Tesi di laurea di:
Caterina Fenu

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Introduzione

Un rivestimento tra due spazi topologici $\widetilde{X}$ e X é un'applicazione continua e suriettiva

$$p : \widetilde{X} \to X$$

tale che per ogni $x \in X$ esiste un aperto U contenente x tale che $p^{-1}(U)$ é unione di aperti disgiunti di $\widetilde{X}$ ognuno dei quali si proietta omeomorficamente su U tramite p. I rivestimenti giocano un ruolo fondamentale nell'ambito della topologia e della geometria delle varietá topologiche e differenziabili. Una delle domande fondamentali nell'ambito della teoria dei rivestimenti é di capire quando, dato uno spazio topologico Y e una funzione continua $f : Y \to X$, esiste un suo sollevamento cioé un'applicazione continua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tale che $f = p \circ \widetilde{f}$. Se lo spazio Y é connesso e localmente connesso per archi (ad esempio una varietá topologica) allora l'esistenza di un sollevamento di un'applicazione continua $f : Y \to X$, con $f(y_0) = x_0$, é equivalente alla condizione

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \qquad \text{con} \quad \widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$$

dove

$$f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0) \qquad p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$$

sono le applicazioni indotte sui gruppi fondamentali. É allora naturale chiedersi se, dato un sollevamento $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ di un'applicazione continua $f : Y \to X$, esistono un intorno U di f, nella topologia compatto-aperta dello spazio delle funzioni continue $C(Y, X)$, e un intorno V di $\widetilde{f}$, nella topologia compatto-aperta dello spazio delle funzioni continue $C(Y, \widetilde{X})$, tali che per ogni $g \in U$ esiste $\widetilde{g} \in V$ tale che $p \circ \widetilde{g}$ e tale che $\widetilde{g}$ vari con "continuitá" al variare di g. In termini piú rigorosi ci si chiede se, dato un rivestimento $p : \widetilde{X} \to X$ e uno spazio topologico connesso Y, l'applicazione

$$\begin{aligned} p_\sharp : C(Y, \widetilde{X}) &\to C(Y, X) \\ \widetilde{f} &\longmapsto p_\sharp(\widetilde{f}) = p \circ \widetilde{f} \end{aligned}$$

é un rivestimento. In questa tesi si fornirá una risposta positiva al precedente quesito dimostrando che se Y é di Hausdorff e contraibile allora $p_\sharp$ é un rivestimento (Teorema 5.1). La dimostrazione presentata in questa tesi si basa su un lavoro di François Apéry [1].

La tesi é organizzata come segue.

Il primo capitolo é dedicato ai prerequisiti necessari per la formulazione topologica del problema. Si daranno quindi le definizioni e i principali teoremi utili ai fini della trattazione matematica, partendo dalle omotopie e concludendo con le topologie sul prodotto cartesiano $X \times Y$.

Nel secondo capitolo si affronta il problema che si vuole risolvere andando ad analizzare nello specifico i casi in cui si abbia a che fare con spazi prodotto e spazi coprodotto.

Nel capitolo terzo il problema della dimostrazione dell'esistenza di un sollevamento di un rivestimento viene ridotto al problema della ricerca di un sollevamento di aperti banalizzanti e si tratteranno i casi in cui le due condizioni sono equivalenti.

Il quarto capitolo é dedicato alle dimostrazione del teorema che risponde al nostro quesito iniziale.

1 Prerequisiti

1.1 Omotopie e gruppi fondamentali

Definizione 1.1. *Siano X e Y due spazi topologici e $f_0, f_1 : X \to Y$ due funzioni continue. Diremo che f_0 é omotopa a f_1 se esiste un'applicazione continua $F : X \times I \to Y$, chiamata omotopia, tale che:*

- $F(x, 0) = f_0(x)$
- $F(x, 1) = f_1(x)$

dove $I = [0, 1]$ e $X \times I$ é dotato della topologia prodotto.

Lemma 1.1. *Siano f_0 e f_1 due applicazioni continue da uno spazio topologico qualunque X a uno spazio $Y \subset \mathbb{R}^n$ convesso. Allora f_0 é omotopa a f_1.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché Y é convesso esiste un segmento che unisce $f_0(x)$ e $f_1(x)$ che possiamo utilizzare per costruire l'omotopia $F : X \times I \to Y$. Poniamo

$$F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x) \tag{1}$$

Si ha

$$F(x, 0) = f_0(x) \qquad \text{e} \qquad F(x, 1) = f_1(x)$$

quindi F é un'omotopia tra f_0 e f_1. □

Corollario 1.1. *Se il segmento di retta che unisce $f_0(x)$ e $f_1(x)$ é contenuto in $Y \subset \mathbb{R}^n$ per ogni $x \in X$, allora le applicazioni $f_0, f_1 : X \to Y$ sono omotope.*

Definizione 1.2. *L'omotopia (1) é detta omotopia lineare.*

Definizione 1.3. *Siano $f_0, f_1 : X \to Y$ due funzioni continue e sia $A \subset X$ un sottoinsieme qualunque. Diremo che f_0 é omotopa a f_1 relativamente ad A se esiste un'omotopia $F : X \times I \to Y$ tale che $F(a, t)$ non dipende da $t \in I$, cioé*

$$f_0(a) = f_1(a) = f_t(a).$$

Se f_0 é omotopa a f_1 relativamente ad A scriveremo $f_0 \sim_A f_1$.

Proposizione 1.1. *Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di X e siano X e Y spazi topologici. L'omotopia relativa ad A é una relazione d'equivalenza nello spazio $C(X, Y)$.*

Dimostrazione: Bisogna dimostrare che é riflessiva, simmetrica e transitiva.

- Se $f \in C(X,Y)$ allora $f \sim_A f$. Un'omotopia di f in se stessa (che non dipende da t) é
$$F(x,t) = f(x).$$
- Se $f, g \in C(X,Y)$ e $f \sim_A g$ allora $g \sim_A f$. Un'omotopia tra g ed f é
$$G(x,t) = F(x, 1-t)$$
dove $F(x,t)$ é l'omotopia tra f e g. Infatti:
  - $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$
  - $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$

  G non dipende da t perché per ipotesi F non dipende da t.
- Se $f, g, h \in C(X,Y)$, $f \sim_A g$ e $g \sim_A h$ allora $f \sim_A h$. Siano F e G rispettivamente le omotopie tra f e g e tra g e h. Allora
$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & \text{se } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$
é un'omotopia tra f e h. Infatti:
  - $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$
  - $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$

  Bisogna controllare che H sia continua, cioé bisogna verificare il suo comportamento per $t = 1/2$:
$$H(x,1/2) = F(x,1) = g(x) = G(x,0).$$
  Quindi H é continua e non dipende da t perché F e G non dipendono da t.

$\square$

Definizione 1.4. *Diremo che due spazi topologici X e Y sono omotopi (oppure sono omotopicamente equivalenti oppure hanno lo stesso tipo di omotopia) se esistono due funzioni continue $X \xrightarrow{f} Y$ e $Y \xrightarrow{g} X$ tali che*

$$g \circ f \sim id_X \qquad e \qquad f \circ g \sim id_Y.$$

Indicheremo che due spazi topologici X e Y sono omotopicamente equivalenti con la notazione $X \sim Y$.

Definizione 1.5. *Uno spazio topologico X é contraibile se $X \sim \{x_0\}$ con $x_0 \in X$.*

Definizione 1.6. *Un arco (o un cammino) tra due punti x e y in uno spazio topologico X é un'applicazione $f \in C(I, X)$ tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$.*

Definizione 1.7. *Siano $f, g : I \to X$ due archi in X tali che $f(1) = g(0)$. Diremo che $f * g$ definita come:*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & se\ 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & se\ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é il prodotto (o la concatenazione) di f e g.

Osservazione 1.1. Essendo stata imposta la condizione $f(1) = g(0)$, $f * g$ é continua per il lemma di incollamento .

Lemma 1.2. *Se f_0, f_1, g_0, g_1 sono archi in X tali che*

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \qquad g_0 \overset{G}{\sim} g_1$$

e se $f_0(1) = g_0(0), f_1(1) = g_1(0)$, allora $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.

DIMOSTRAZIONE: Siano F e G le omotopie rispettivamente tra f_0 e f_1 e tra g_0 e g_1 (entrambe relative a $\{0,1\}$). Allora $H : I \times I \to X$
definita come

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2t-1, s) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é continua per il lemma di incollamento, infatti

$$F(1, s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0, s) = H(1/2, s).$$

Verifichiamo che é un'omotopia tra $f_0 * g_0$ e $f_1 * g_1$ relativa a $\{0,1\}$:

$$H(t,0) = \begin{cases} F(2t,0) = f_0(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2t-1,0) = g_0(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = (f_0 * g_0)(t)$$

$$H(t,1) = \begin{cases} F(2t,1) = f_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2t-1,1) = g_1(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = (f_1 * g_1)(t)$$

$$H(0,s) = F(0,s) \qquad \text{e} \qquad H(1,s) = G(1,s)$$

quindi non dipende da s perché F e G non dipendono da s. $\square$

Abbiamo visto che l'omotopia relativa é una relazione d'equivalenza. Diremo che due cammini f_0 e f_1 in X sono equivalenti se e solo se $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$, cioé se esiste $F : I \times I \to X$ tale che

$$\left.\begin{array}{r} F(t,0) = f_0(t) \\ F(t,1) = f_1(t) \end{array}\right\} \text{ é un'omotopia}$$

$$\left.\begin{array}{r} F(0,s) = f_0(0) = f_1(0) \\ F(1,s) = f_0(1) = f_1(1) \end{array}\right\} \text{ lascia fissi gli estremi}$$

Sia $[f] = \{h : I \to X | h \sim_{\{0,1\}} f\}$ la classe di equivalenza di un arco $f : I \to X$ rispetto all'omotopia relativa a $\{0,1\}$ e sia $[g]$ la classe di equivalenza dell'arco $g : I \to X$ tale che $g(0) = f(1)$. Definiamo un prodotto tra le due classi di equivalenza $[f]$ e $[g]$ ponendo

$$[f] \cdot [g] =: [f * g]$$

Il Lemma 1.2 ci assicura che questo prodotto é ben definito, cioé non dipende dal rappresentante scelto. Infatti se $f' \sim f$ e $g' \sim g$ allora $f' * g' \sim f * g$ e quindi $[f' * g'] = [f * g]$.

Lemma 1.3. *Sia $k : X \to Y$ e siano $f, g : I \to X$ due cammini in X. Si hanno i seguenti risultati:*

1. *$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$;*
2. *Se $f \sim g$ allora $k \circ f \sim k \circ g$;*

3. $k(i(f)) = i(k(f))$*, dove* $i(f)$ *é il cammino inverso di* f *definito come* $i(f)(t) = f(1-t)$*.*

Proposizione 1.2. *Se* $f(1) = g(0)$ *e* $g(1) = h(0)$ *allora vale la proprietá associativa:*

$$([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$$

DIMOSTRAZIONE: Facciamo delle considerazioni preliminari. Dati

$$0 \leq a < b \qquad \text{e} \qquad 0 \leq c < d$$

esiste un'unica applicazione affine, cioé un'applicazione della forma $h(x) = mx + q$, tale che $h(a) = c$ e $h(b) = d$. Chiamiamo h l'ALP (applicazione lineare positiva) da $[a, b]$ a $[c, d]$. Si ha che la composizione di due ALP é un ALP cosí come la sua inversa. Possiamo reinterpretare la concatenazione di due cammini f e g

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

in termini di ALP. Infatti $2t$ é un ALP da $[0, 1/2]$ a $[0, 1]$ e $2t - 1$ é un ALP da $[1/2, 1]$ a $[0, 1]$. Supponiamo che $f, g, h : I \to X$ siano tre archi tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Se a, b sono tali che $0 < a < b < 1$ definiamo $k_{a,b}$ in questo modo

$$k_{a,b} = \begin{cases} f(\text{ALP da } [0, a] \text{ a } [0, 1]) & \text{in } [0, a] \\ g(\text{ALP da } [a, b] \text{ a } [0, 1]) & \text{in } [a, b] \\ h(\text{ALP da } [b, 1] \text{ a } [0, 1]) & \text{in } [b, 1] \end{cases}$$

Vale il seguente risultato

Lemma 1.4. *Se* a, b, c, d *sono tali che* $0 < a < b < 1$ *e* $0 < c < d < 1$ *allora* $k_{a,b} \sim k_{c,d}$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'applicazione $P : I \to I$ definita a tratti in questo modo:

il primo tratto é l'ALP da $[0, a]$ a $[0, c]$;

il secondo tratto é l'ALP da $[a, b]$ a $[c, d]$;

il terzo tratto é l'ALP da $[b, 1]$ a $[d, 1]$;

Dato che I é convesso si puó utilizzare l'omotopia lineare per dimostrare che $P \sim id_I$. Inoltre poiché l'ALP é unica in ogni tratto $[0, a], [a, b], [b, 1]$ si ha $k_{c,d} \circ P = k_{a,b}$. Quindi

$$P \sim id_I \Rightarrow k_{c,d} \circ P \sim k_{c,d} \circ id_I \Rightarrow k_{a,b} \sim k_{c,d}$$

□

Si ha quindi

$$(f * g) * h = k_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad f * (g * h) = k_{\frac{1}{2},\frac{3}{4}}$$

Per il lemma appena visto $k_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}} \sim k_{\frac{1}{2},\frac{3}{4}}$ quindi $(f * g) * h \sim f * (g * h)$, cioé

$$([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h]).$$

□

Proposizione 1.3. *Se f é un arco che collega i punti x e y esiste l'elemento neutro a sinistra $[\epsilon_x]$ e l'elemento neutro a destra $[\epsilon_y]$:*

$$[\epsilon_x] \cdot [f] = [f] = [f] \cdot [\epsilon_y]$$

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare che $\epsilon_x * f \sim f$ consideriamo l'applicazione costante $\epsilon_0 : I \to I$ definita come

$$\epsilon_0(t) = 0 \qquad \text{per ogni t}$$

e $id_I : I \to I$. La loro concatenazione é:

$$(\epsilon_0 * id_I)(t) = \begin{cases} \epsilon_0(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ id_I(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si ha $\epsilon_0 * id_I \sim id_I$. Infatti I é convesso e quindi l'applicazione

$$F(t, s) = st + (1-s)(\epsilon_0 * id_I)(t)$$

é un'omotopia fra $\epsilon_0 * id_I$ e id_I che lascia fissi gli estremi 0 e 1:

- $F(0, s) = 0 = id_I(0) = (\epsilon_0 * id_I)(0)$;
- $F(1, s) = 1 = id_I(1) = (\epsilon_0 * id_I)(1)$.

Quindi, componendo con f:

$$f(\epsilon_0 * id_I) \sim f \circ id_I \Rightarrow (f \circ \epsilon_0) * (f \circ id_I) \sim f \Rightarrow \epsilon_x * f \sim f.$$

In modo analogo si dimostra che $f * \epsilon_y \sim f$. □

Proposizione 1.4. *Se f é un arco che collega i punti x e y allora $[i(f)]$ é l'inverso a sinistra e a destra:*

$$[i(f)] \cdot [f] = [\epsilon_y] \qquad e \qquad [f][i(f)] = [\epsilon_x]\cdot$$

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare che $f * i(f) \sim \epsilon_x$ consideriamo l'applicazione $i : I \to I$ definita come $i(t) = 1 - t$.

Consideriamo la concatenazione:

$$(id_I * i)(t) = \begin{cases} id_I(2t) = 2t & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ i(2t-1) = -2t+2 & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si ha $id_I * i \sim \epsilon_0$. Infatti I é convesso e quindi l'applicazione

$$F(t,s) = (1-s)(id_I * i)(t)$$

é un'omotopia fra $id_I * i$ e ϵ_0 che lascia fissi gli estremi 0 e 1:

- $F(0,s) = 0 = \epsilon_0(0) = (id_I * i)(0)$;
- $F(1,s) = 0 = \epsilon_0(1) = (id_I * i)(1)$.

Quindi, componendo con f:

$$f(id_I * i) \sim f \circ \epsilon_0 \Rightarrow (f \circ id_I) * (f \circ i) \sim \epsilon_x \Rightarrow f * i(f) \sim \epsilon_x.$$

In modo analogo si dimostra che $i(f) * f \sim \epsilon_y$. □

Osservazione 1.2. L'insieme che si ottiene quozientando $C(I,X)$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim_{\{0,1\}}$ non é un gruppo dato che non é possibile definire un prodotto tra due suoi elementi qualsiasi.

Definizione 1.8. *Sia X uno spazio topologico. Diremo che l'applicazione $f : I \to X$ é un cammino chiuso (o un laccio) se $f(0) = f(1)$. Se $f(0) = f(1) = x$ diremo che f é un laccio basato in x.*

Definizione 1.9. *Sia X uno spazio topologico. Consideriamo l'insieme*

$$\pi_1(X,x) = \{[f] \, | f : I \to X, f(0) = f(1) = x\}$$

con la relazione d'equivalenza definita dall'omotopia relativa a {0,1}, cioé $f \sim g$ se e solo se esiste $F : I \times I \to X$ tale che

$$\begin{cases} F(t,0) = f(t) \\ F(t,1) = g(t) \\ F(0,s) = F(1,s) = x. \end{cases}$$

$\pi_1(X,x)$ é chiamato gruppo fondamentale (nel punto x) oppure primo gruppo di omotopia oppure gruppo di Poincaré.

Teorema 1.1. *$\pi_1(X,x)$ é un gruppo con la moltiplicazione definita da*

$$[f] \cdot [g] = [f * g].$$

Dimostrazione: Discende direttamente dal Lemma 1.2 e dalle Proposizioni 1.2, 1.3 e 1.4. Infatti grazie alla condizione $f(0) = f(1) = x$ si possono moltiplicare due elementi qualsiasi e l'elemento neutro é unico (in particolare é $[\epsilon_x]$).

Teorema 1.2 (Dipendenza di $\pi_1(X,x)$ dal punto x)**.** *Siano x e y due punti di X collegati da un arco f, cioé esiste $f : I \to X$ tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Allora $\pi_1(X,x)$ e $\pi_1(X,y)$ sono isomorfi.*

Dimostrazione: Definiamo $\varphi_f : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ in questo modo

$$\varphi_f([g]) = [i(f) * g * f]$$

- φ_f é ben definita, cioé se $[g'] = [g]$ allora $[i(f) * g' * f] = [i(f) * g * f]$. Infatti se $g' \sim g$ allora $i(f) * g' * f \sim i(f) * g * f$ (per il Lemma 1.2) e quindi $[i(f) * g' * f] = [i(f) * g * f]$.

- φ_f é un omomorfismo, cioé $\varphi_f([g] \cdot [h]) = \varphi_f([g]) \cdot \varphi_f([h])$. Si ha

$$\varphi_f([g]) \cdot \varphi_f([h]) = [i(f) * g * f] \cdot [i(f) * h * f] = [i(f) * g * f * i(f) * h * f] =$$

$$= [i(f) * g * \epsilon_x * h * f] = [i(f) * g * h * f] = \varphi_f([g * h]) = \varphi_f([g] \cdot [h])$$

- φ_f é invertibile e la sua inversa é $\varphi_f^{-1} : \pi(X, y) \to \pi(X, x)$ definita come
$$\varphi_f^{-1}([k]) = [f * k * i(f)].$$
Si ha
$$\varphi_f(\varphi_f^{-1}([h]) = \varphi_f([f*h*i(f)]) = [i(f)*f*h*i(f)*f] = [\epsilon_x*h*\epsilon_y] = [h]$$
quindi $\varphi_f \circ \varphi_f^{-1} = id_{\pi_1(X,y)}$. Con un ragionamento analogo si dimostra che $\varphi_f^{-1} \circ \varphi_f = id_{\pi_1(X,x)}$. □

Corollario 1.2. *Se X é uno spazio topologico connesso per archi allora il gruppo fondamentale non dipende dal punto scelto.*

Definizione 1.10. *Sia $\phi \in C(X, Y)$. Fissato $x \in X$ consideriamo $\pi_1(X, x)$ e definiamo*
$$\begin{aligned} \phi_* : \pi_1(X, x) &\to \pi_1(Y, \phi(x)) \\ [f] &\mapsto [\phi \circ f] \end{aligned}$$
ϕ_* é chiamata mappa indotta da ϕ.

Proposizione 1.5. *Sia $\phi \in C(X, Y)$ e sia ϕ_* la mappa indotta da ϕ. Allora ϕ_* é un omomorfismo di gruppi.*

DIMOSTRAZIONE:

- ϕ_* é ben definita.
Infatti data $\widetilde{f} \sim f$ si ha $\phi \circ f \sim \phi \circ \widetilde{f}$ e quindi $[\phi \circ f] = [\phi \circ \widetilde{f}]$.
- ϕ_* é un omomorfismo, cioé $\phi_*([f] \cdot [g]) = \phi_*[f] \cdot \phi_*[g]$.
Infatti
$$\begin{aligned} \phi_*([f] \cdot [g]) = \phi_*([f * g]) = [\phi \circ (f * g)] = \\ = [\phi \circ f * \phi \circ g)] = [\phi \circ f] \cdot [\phi \circ g] = \phi_*[f] \cdot \phi_*[g]. \end{aligned}$$
□

Definizione 1.11. *Uno spazio topologico X é detto semplicemente connesso se é connesso per archi e il suo gruppo fondamentale é il gruppo banale.*

1.2 Rivestimenti e omeomorfismi locali

Definizione 1.12. *Sia $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ un'applicazione continua tra spazi topologici. Diremo che un aperto $U \subset X$ é banalizzante o uniformemente rivestito se $p^{-1}(U)$ é unione di aperti disgiunti di $\widetilde{X}$ ognuno dei quali si proietta omeomorficamente su U tramite p.*

Definizione 1.13. *Un'applicazione continua e suriettiva $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ tra spazi topologici é un rivestimento se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U_x banalizzante per p.*

Esempio 1.1. L'applicazione $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definita come

$$e(x) = \exp(2\pi i x) = cos(2\pi x) + isen(2\pi x)$$

é un rivestimento. Infatti $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ é un aperto banalizzante per p intorno ad ogni punto $y \neq x$. Consideriamo $x = 1$ (ci si puó ricondurre a questo caso tramite una rotazione), allora si ha

$$e^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}) = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} (a, a+1).$$

Definizione 1.14. *Un rivestimento $p : \widetilde{X} \to X$ é detto universale se $\widetilde{X}$ é semplicemente connesso.*

Definizione 1.15. *Un'applicazione continua $f : X \to Y$ é un omeomorfismo locale se per ogni $x \in X$ esistono un aperto $A \subset X$ contenente x e un aperto $B \subset Y$ tale che la restrizione*

$$f_{|A} : A \to B$$

é un omeomorfismo.

Proposizione 1.6. *Un rivestimento $p : \widetilde{X} \to X$ é un omeomorfismo locale.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ e sia $x = p(\widetilde{x})$. Dato che p é un rivestimento esiste un aperto banalizzante U che contiene x, cioé

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j \quad (\text{con } U_j \cap U_k = \emptyset) \quad \text{e} \quad p_{|U_j} : U_j \to U \quad \text{omeomorfismo.}$$

Sia U_0 l'aperto che contiene $\widetilde{x}$. Allora $p_{|U_0} : U_0 \to U$ é un omeomorfismo e quindi p é un omeomorfismo locale. $\square$

Osservazione 1.3. Il viceversa della proposizione appena dimostrata non é vero neanche nel caso in cui l'omeomorfismo locale sia suriettivo, come mostra il seguente

Esempio 1.2 (omeomorfismo locale suriettivo che non é un rivestimento)**.** Sia $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ il rivestimento dell' Esempio 1.1. In quanto rivestimento é un omeomorfismo locale. Consideriamo la restrizione di e all'aperto $(0, 2)$: $e_{|(0,2)}$ é ancora un omeomorfismo locale perché é la restrizione di un omeomorfismo locale ad un aperto. Preso un aperto U contenente il punto $1 \in \mathbb{S}^1$ si ha che la sua controimmagine é formata da tre aperti $(0, \epsilon)$,$(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$,$(2 - \epsilon, 2)$. La restrizione $e_{|(0,2)}$ non puó quindi essere un rivestimento dal momento che le restrizioni

$$e_{|(0,\epsilon)} : (0, \epsilon) \to U \qquad \text{e} \qquad e_{|(2-\epsilon,2)} : (2 - \epsilon, 2) \to U$$

non sono degli omeomorfismi.

Proposizione 1.7. *Un omeomorfismo locale* $p : \widetilde{X} \to X$ *é un'applicazione aperta e quindi é un'identificazione.*

Dimostrazione: Sia V un aperto di $\widetilde{X}$. Dalla definizione di omeomorfismo locale segue che per ogni $\widetilde{x} \in V$ esistono un aperto $V_{\widetilde{x}} \subset \widetilde{X}$ e un aperto $U_{\widetilde{x}} \subset U$ tale che $p_{|V_{\widetilde{x}}} : V_{\widetilde{x}} \to U_{\widetilde{x}}$ é un omeomorfismo. Consideriamo l'aperto di V ottenuto intersecando V e $V_{\widetilde{x}}$:

$$W_{\widetilde{x}} = V \cap V_{\widetilde{x}}.$$

Al variare di $\widetilde{x}$ in V, gli aperti $W_{\widetilde{x}}$ ricoprono V, cioé $\bigcup_{\widetilde{x}\in V} W_{\widetilde{x}} = V$. Si ha

$$p(V) = p\left(\bigcup_{\widetilde{x}\in V} W_{\widetilde{x}}\right) = \bigcup_{\widetilde{x}\in V} p\left(W_{\widetilde{x}}\right)$$

e quindi $p(V)$ é un aperto perché unione di aperti $\big(p\left(W_{\widetilde{x}}\right)$ é aperto perché $W_{\widetilde{x}} \subset V_{\widetilde{x}}$ e $p_{|V_{\widetilde{x}}}$ é un omeomorfismo$\big)$. □

Corollario 1.3. *Un rivestimento é un'identificazione.*

1.3 Proprietá di sollevamento

Definizione 1.16. *Dato il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

la funzione $\widetilde{f}$ che rende commutativo il diagramma, cioé tale che $p \circ \widetilde{f} = f$, si chiama sollevamento di f.

Teorema 1.3 (unicitá del sollevamento)**.** *Sia $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ un rivestimento e $Y \xrightarrow{f} X$ una funzione continua con Y connesso. Se $\widetilde{f}, \widetilde{f}' : Y \to \widetilde{X}$ sono due sollevamenti di f, cioé $p \circ \widetilde{f} = p \circ \widetilde{f}' = f$, tali che $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{f}'(y_0)$ per un certo $y_0 \in Y$ allora $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$.*

Dimostrazione: Definiamo l'insieme $Y' = \{y \in Y \mid \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y)\}$ e dimostriamo che $Y' = Y$. Dato che Y é connesso basta dimostrare che Y' é contemporaneamente aperto e chiuso ed é diverso dall'insieme vuoto.

- $Y' \neq \emptyset$, infatti contiene l'elemento y_0;
- Y' é aperto. Sia $y \in Y'$, quindi $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y) = \widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Sia $x = p(\widetilde{x})$; allora, per definizione di rivestimento, esiste un aperto banalizzante U di x, cioé

  - $x \in U$;
  - $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$;
  - $p_{|U_j} : U_j \to U$ é un omeomorfismo;
  - $U_j \cap U_k = \emptyset, \forall j \neq k$.

  Sia U_0 l'aperto contenente $\widetilde{x}$ e consideriamo l'aperto

  $$\widetilde{f}^{-1}(U_0) \cap \widetilde{f}'^{-1}(U_0) = V$$

  contentente y. Se mostriamo che $V \in Y'$ abbiamo terminato perché significa che Y' é aperto. Sia $z \in V$, quindi $\widetilde{f}(z) \in U_0$ e $\widetilde{f}'(z) \in U_0$. D'altra parte

  $$p(\widetilde{f}(z)) = f(z) = p(\widetilde{f}'(z)).$$

Ma $\widetilde{f}(z)$ e $\widetilde{f'}(z) \in U_0$ e p ristretto a U_0 é un omeomorfismo (perció é iniettivo) e quindi $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f'}(z)$, cioé $z \in Y'$ (quindi $V \in Y'$ dato che z é arbitrario).

- Y' é chiuso. Sia $y \in Y \setminus Y'$, cioé $\widetilde{f}(y) \neq \widetilde{f'}(y)$. Dato che $\widetilde{f}$ e $\widetilde{f'}$ sono sollevamenti di f, si ha

$$p(\widetilde{f}(y)) = p(\widetilde{f'}(y)) = f(y) = x.$$

Dal momento che p ristretto ad ogni U_j é iniettivo, $\widetilde{f}(y)$ e $\widetilde{f'}(y)$ devono stare su due aperti diversi, cioé esistono U_k (contenente $\widetilde{f}(y)$) e U_l (contenente $\widetilde{f'}(y)$), con $k \neq l$. Consideriamo l'aperto

$$W = \widetilde{f}^{-1}(U_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(U_l)$$

che contiene y. Si ha $W \subset Y \setminus Y'$; infatti se $z \in W$ allora $\widetilde{f}(z) \in U_k$ e $\widetilde{f'}(z) \in U_l$ che sono disgiunti. Perció $\widetilde{f}(z) \neq \widetilde{f'}(z)$ e quindi $z \in Y \setminus Y'$, cioé $Y \setminus Y'$ é aperto. □

Lemma 1.5 (esistenza del numero di Lebesgue)**.** *Sia (X,d) uno spazio metrico compatto e sia $\{U_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di X, cioé $\bigcup_{j\in J} U_j = X$. Allora esiste $\delta > 0$ reale (chiamato Numero di Lebesgue del ricoprimento $\{U_j\}_{j\in J}$) tale che per ogni $S \subset X$ con diam$(S) < \delta$, esiste $k \in J$ tale che $S \subset U_k$.*

Dimostrazione: Possiamo assumere che J sia un insieme finito in quanto X é compatto. Definiamo per ogni $j \in J$ l'applicazione $f_j : X \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_j(x) = d(x, X \backslash U_j) = \inf d(x, y)$$

con $y \in X \setminus U_j$. f_j é continua perché la funzione distanza lo é. Consideriamo ora la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \max_{j\in J} f_j(x).$$

f é continua e non negativa per ogni $x \in X$ perché le f_j lo sono. Il fatto che $\{U_j\}$ sia un ricoprimento implica che $f(x) > 0$. Supponiamo infatti per assurdo che per un certo $x \in X$ si abbia $f(x) = 0$. Per come é stata definita la funzione f si ha allora $f_j(x) = 0$, $\forall j \in J$, cioé

$$x \in X \backslash U_j \ , \ \forall j \in J \Rightarrow x \in \bigcap_{j\in J}(X \backslash U_j) \Rightarrow x \in X \backslash \Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big) \Rightarrow x \in X \backslash X = \emptyset$$

che é assurdo.
Sia $0 < \delta < f(x) \quad \forall x \in X$. Per dimostrare che δ é il numero di Lebesgue del ricoprimento $\{Uj\}_{j\in J}$ fissiamo $x_0 \in S \subset X$. Quindi esiste $k \in J$ tale che $d(x_0, X \setminus U_k) > 0$. Infatti $d(x_0, X \setminus U_k) = f_k(x_0)$ e dato che $f(x) > 0$, esiste almeno un f_k tale che $f_k(x_0) > 0$. Sappiamo inoltre che $diam(S) < \delta$ e quindi $d(x, x_0) \leq \delta$. Questo implica

$$d(x, X \setminus U_k) \geq d(x_0, X \setminus U_k) - d(x_0, x) > \delta - \delta = 0$$

cioé

$$x \notin X \setminus U_k \Rightarrow x \in U_k \Rightarrow S \subset U_k$$

□

Teorema 1.4 (sollevamento degli archi). *Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento, $f : I \to X$ un arco e $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ tale che $p(\widetilde{x_0}) = x_0 = f(0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\widetilde{f} : I \to \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{f} = f$.*

Dimostrazione: Basta dimostrare l'esistenza in quanto l'unicitá di $\widetilde{f}$ segue dal Teorema 1.3 dato che I é connesso.

Distinguiamo due casi:

- $f(I) \subset U$ aperto banalizzante. Se U_0 contenente $\widetilde{x_0}$ é un aperto tale che $p_{|U_0} : U_0 \to U$ é un omeomorfismo, allora $p_{|U_0}^{-1} \circ f = \widetilde{f}$ é un sollevamento di f.

- Se $f(I)$ non é contenuto in un aperto banalizzante possiamo trovare $s_0, s_1 < \ldots, s_n$ (con $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$) tali che $f([s_{j-1}, s_j])$ sia contenuto in un aperto banalizzante (per il Lemma 1.5). Poniamo $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x_0}$ e supponiamo di aver definito $\widetilde{f} : [0, s_j] \to \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{f} = f$. Per le scelte fatte sappiamo che $f([s_j, s_{j+1}])$ é contenuto in un aperto banalizzante U e quindi esiste U_0 contenente $\widetilde{f}(s_j)$ tale che $p_0 = p_{|U_0} : U_0 \to U$ é un omeomorfismo. Possiamo quindi definire un sollevamento $\widetilde{f} : [s_j, s_{j+1}] \to \widetilde{X}$ in questo modo:

$$\widetilde{f} = p_0^{-1} \circ f$$

e per il lemma di incollamento possiamo definire

$$\widetilde{f} : [0, s_{j+1}] \to \widetilde{X} \qquad \text{tale che } p \circ \widetilde{f} = f$$

□

Teorema 1.5 (sollevamento delle omotopie)**.** *Sia* $p : \widetilde{X} \to X$ *un rivestimento e* $F : I \times I \to X$ *un' applicazione continua tale che* $F(0,0) = x_0$*. Sia inoltre* $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ *tale che* $p(\widetilde{x_0}) = x_0$*. Allora esiste un'unica* $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$ *tale che* $p \circ \widetilde{F} = F$*. Inoltre se* F *é un'omotopia tra archi, cioé*

$$\begin{cases} F(t,0) = f(t) \\ F(t,1) = g(t) \\ F(0,s) = x_0 \\ F(1,s) = x_1 \end{cases}$$

allora $\widetilde{F}$ *é un'omotopia tra archi.*

Dimostrazione: Per il Lemma 1.5 possiamo trovare

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1 \qquad\qquad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

tali che $F([s_{j-1}, s_j] \times [t_{j-1}, t_j])$ sia contenuto in un aperto banalizzante. Sia $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x_0}$ e sia

$$F(0,s) = \alpha(s) = F : \{0\} \times I \to X$$

un arco in X tale che $F(0,0) = x_0$. Definiamo il sollevamento $\widetilde{\alpha}$ di α che inizia in $\widetilde{x_0}$. In modo analogo si puó definire il sollevamento del lato $I \times \{0\}$ e quindi si puó assumere di aver sollevato F nell'insieme

$$\{0\} \times I \cup I \times \{0\}.$$

Procediamo per induzione e supponiamo che esista $\widetilde{F_A} : A \to \widetilde{X}$ continua tale che $p \circ \widetilde{F} = F$. Vogliamo estendere $\widetilde{F}$ al rettangolo $[I_{i_0} \times J_{j_0}]$ adiacente ad A. $C = A \cap [I_{i_0} \times J_{j_0}]$ é connesso e $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$ é contenuto in un aperto banalizzante U. Esiste quindi U_0 contenente $\widetilde{F}(C)$ nel quale

$$p_0 = p_{|U_0} : U_0 \to U$$

é un omeomorfismo. Quindi $(p_0 \circ \widetilde{F})(y) = F(y)$, per ogni $y \in C$, cioé

$$\widetilde{F}(y) = p_0^{-1}(F(y)) \quad \text{per ogni} \quad y \in C.$$

Possiamo allora definire $\widetilde{F} : I_{i_0} \times J_{j_0} \to \widetilde{X}$ come $\widetilde{F}(z) = p_0^{-1}(F(z))$, per ogni $z \in I_{i_0} \times J_{j_0}$. In C le definizioni di $\widetilde{F}$ e $\widetilde{F_A}$ coincidono, quindi per il lemma di incollamento si puó trovare $\widetilde{F} : A \cup I_{i_0} \times J_{j_0} \to \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{F} = F$:

$$\widetilde{F}(y) = \begin{cases} \widetilde{F_A}(y) & \text{se } y \in A \\ (p_0^{-1}F)(y) & \text{se } y \in I_{i_0} \times J_{j_0} \end{cases}$$

Dato che $I \times I$ é connesso, $\widetilde{F}$ é unico. Resta da dimostrare che se $F(0,s) = x_0$ e $F(1,s) = x_1$ allora $\widetilde{F}(0,s) = \widetilde{x_0}$ e $\widetilde{F}(1,s) = \widetilde{x_1}$ (dove $p(\widetilde{x_0}) = x_0$ e $p(\widetilde{x_1}) = x_1$). $\widetilde{F}(\{0\} \times I)$ é connesso perché é immagine di un connesso tramite l'applicazione continua $\widetilde{F}$. Inoltre $p(\widetilde{F}(\{0\} \times I)) = F(\{0\} \times I) = x_0$, cioé

$$\widetilde{F}(\{0\} \times I) \in p^{-1}(x_0).$$

D'altra parte si ha che $p^{-1}(\{x_0\})$ é discreto e $\widetilde{F}(\{0\} \times I)$ é connesso quindi $\widetilde{F}(\{0\} \times I)$ é costituito da un solo punto appartenente a $p^{-1}(x_0)$, cioé

$$\widetilde{F}(\{0\} \times I) = \widetilde{x_0}.$$

Quindi se F fissa i punti iniziale e finale, anche $\widetilde{F}$ fissa i punti iniziale e finale (infatti il medesimo ragionamento puó essere applicato all'insieme $\{1\} \times I$).

$\square$

Corollario 1.4. *Siano $f, g : I \to X$ due cammini in X tali che $f(0) = g(0) = x_0$ e sia $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ tale che $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Se $\widetilde{f}, \widetilde{g} : I \to \widetilde{X}$ sono gli unici sollevamenti di f e g tale che $\widetilde{f}(0) = \widetilde{g}(0) = \widetilde{x}_0$ e se $f \sim g$ allora*

$$\widetilde{f} \sim \widetilde{g} \qquad e \qquad \widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1).$$

Dimostrazione: Infatti si ha $\widetilde{f}(1) = \widetilde{F}(1,0) = \widetilde{F}(1,1) = \widetilde{g}(1)$. $\square$

Proposizione 1.8. *Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento. Consideriamo $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ e $\pi_1(X, x_0)$, con $p(\widetilde{x_0}) = x_0$. Allora*

$$\begin{aligned} p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) &\to \pi_1(X, x_0) \\ [\widetilde{f}] &\mapsto p_*([\widetilde{f}]) = [p \circ \widetilde{f}] \end{aligned}$$

é iniettiva (o equivalentemente é un monomorfismo).

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che il $\ker(p_*)$ contiene solo l'elemento neutro $[\epsilon_{\widetilde{x}_0}]$. $\widetilde{f} \in \ker(p_*)$ se $p_*[\widetilde{f}] = [\epsilon_{x_0}]$. Ma

$$p_*[\widetilde{f}] = [p \circ \widetilde{f}] = [\epsilon_{x_0}] \Longleftrightarrow f \sim \epsilon_{x_0} \Longrightarrow \widetilde{f} \sim \epsilon_{\widetilde{x}_0} \Longleftrightarrow [\widetilde{f}] = [\epsilon_{\widetilde{x}_0}].$$

$\square$

Quindi si ha che $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ é un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$, con $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Lemma 1.6. *Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Se $\widetilde{f}$ é un arco in $\widetilde{X}$ che collega i punti $\widetilde{x}_0$ e $\widetilde{x}_1$ e $f = p \circ \widetilde{f}$ collega i punti $p(\widetilde{x}_0)$ e $p(\widetilde{x}_1)$ allora*

$$p_* \circ \varphi_{\widetilde{f}} = \varphi_f \circ p_*$$

dove φ_f é l'isomorfismo del Teorema 1.2.

DIMOSTRAZIONE: Preso $\widetilde{\alpha} \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ si ha

$$p_*(\varphi_{\widetilde{f}}([\widetilde{\alpha}]) = p_*[i(\widetilde{f}) * \widetilde{\alpha} * \widetilde{f}] = [p \circ \big(i(\widetilde{f}) * \widetilde{\alpha} * \widetilde{f}\big)] =$$

$$= [p \circ i(\widetilde{f}) * p \circ \widetilde{\alpha} * p \circ \widetilde{f}] = [i(f) * \alpha * f] = \varphi_f([\alpha]) = \varphi_f \circ p_*([\widetilde{\alpha}])$$

□

Proposizione 1.9. *Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Per ogni coppia $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_1$ esiste un arco f in X da $p(\widetilde{x}_0)$ a $p(\widetilde{x}_1)$ tale che*

$$\varphi_f \, p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1).$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $\widetilde{f}$ l'arco che collega $\widetilde{x}_0$ e $\widetilde{x}_1$ in $\widetilde{X}$. Per il Teorema 1.2 sappiamo che $\varphi_{\widetilde{f}}$ é un isomorfismo quindi $\varphi_{\widetilde{f}} \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$. Applicando il monomorfismo p_* si ha

$$p_* \varphi_{\widetilde{f}} \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1).$$

Per il lemma precedente (Lemma 1.6) $p_* \circ \varphi_{\widetilde{f}} = \varphi_f \circ p_*$ dalla quale si ottiene

$$\varphi_f \, p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1).$$

□

Teorema 1.6. *Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Se $x_0 \in X$, l'insieme*

$$\big\{p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) | \, \widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\big\}$$

é una classe di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.

DIMOSTRAZIONE: Applicando la proposizione precedente (Proposizione 1.9) nel caso in cui $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1) = x_0$ si ottiene un arco chiuso f di base x_0 e quindi un elemento di $\pi_1(X, x_0)$ per il quale vale la relazione

$$p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) = [f]^{-1} \big(p_* \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\big) [f].$$

Quindi $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ e $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ sono sottogruppi coniugati di $\pi_1(X, x_0)$. Sia ora H un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ coniugato ad uno dei sottogruppi $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, cioé

$$H = [f]^{-1} p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)[f]$$

con $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Dobbiamo dimostrare che esiste $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}$ tale che $H = p_*\,\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$. Sia $\widetilde{f}$ il sollevamento di f con punto iniziale in $\widetilde{x}_0$, dove f é un rappresentante della classe $[f]$. Per la Proposizione 1.9 si ha

$$p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{f}(1)) = \varphi_f\, p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = H$$

e quindi, ponendo $\widetilde{x}_1 = \widetilde{f}(1)$, H appartiene all'insieme dato. □

Definizione 1.17. *Un rivestimento $p : \widetilde{X} \to X$ é detto regolare (o Galoisiano) se $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ é un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$, con $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$.*

Definizione 1.18. *Uno spazio topologico X é localmente connesso per archi se per ogni $x \in X$ e per ogni U contenente x esiste un aperto $V \subset U$ contenente x connesso per archi.*

Teorema 1.7 (condizione necessaria e sufficiente affinché esista un sollevamento)**.** *Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento e $f : Y \to X$ una funzione continua. Se Y é connesso e localmente connesso per archi allora esiste un unico sollevamento $\widetilde{f}$ di f tale che $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$ se e solo se*

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0). \tag{2}$$

Dimostrazione:

- Condizione necessaria. Se esiste un sollevamento di f allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

  induce il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

cioé $p_*\widetilde{f}_*\pi_1(Y, y_0) = f_*\pi_1(Y, y_0)$.

Ma $\widetilde{f}_*\pi_1(Y, y_0) < \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \Longrightarrow p_*\widetilde{f}_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$. Quindi la condizione (2) é necessaria.

- Condizione sufficiente. Definiamo $\widetilde{f}$ utilizzando solo il fatto che Y é connesso per archi. Fissiamo dei punti base y_0 , x_0 e $\widetilde{x_0}$. Dato $y \in Y$ possiamo trovare un arco che congiunge y_0 e y. Se componiamo con f (che é continua) otteniamo un cammino in X, cioé

$$\begin{cases} f \circ \phi(0) = x_0 \\ f \circ \phi(1) = \text{punto finale del cammino } f \circ \phi. \end{cases}$$

Per il teorema di sollevamento degli archi (Teorema 1.4) esiste un unico sollevamento $\widetilde{f \circ \phi}$ di $f \circ \phi$ che inizia in $\widetilde{x_0}$. Poniamo

$$\widetilde{f}(y) \stackrel{def}{=} \widetilde{f \circ \phi}(1)$$

Verichiamo che é ben definita, cioé preso un altro cammino ψ che congiunge y_0 e y si deve avere $\widetilde{f \circ \phi}(1) = \widetilde{f \circ \psi}(1)$. Si ha che $\phi * i(\psi)$ é un laccio chiuso di base y_0 e quindi $f(\phi * i(\psi)) = f \circ \phi * f(i(\psi))$ é un laccio chiuso di base x_0. Consideriamo $[f \circ \phi * f(i(\psi))] \in \pi_1(X, x_0)$, cioé come elemento del gruppo fondamentale. D'altra parte $[f \circ \phi * f(i(\psi))] \in f_*\pi_1(Y, y_0)$ (infatti $\phi * i(\psi) \in \pi_1(Y, y_0)$ e quindi $f \circ (\phi * i(\psi)) \in f_*\pi_1(Y, y_0)$). Per ipotesi $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ quindi esiste $[\alpha] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ tale che

$$[f \circ \phi * f(i(\psi))] = p_*([\alpha]) = [p \circ \alpha].$$

Perció

$$f \circ \phi * f(i(\psi)) = f \circ \phi * i(f(\psi)) \sim p \circ \alpha \Longrightarrow f \circ \phi \sim p \circ \alpha * f \circ \psi.$$

Si ha $(f \circ \phi)(0) = x_0$ e $(p \circ \alpha * f \circ \psi)(0) = (p \circ \alpha)(0) = p(\widetilde{x_0}) = x_0$, cioé $f \circ \phi$ e $p \circ \alpha * f \circ \psi$ hanno lo stesso punto iniziale e quindi, per il Corollario 1.4, i loro sollevamenti hanno lo stesso punto finale:

$$\widetilde{f \circ \phi}(1) = p \circ \widetilde{\alpha * f} \circ \psi(1) = \alpha * \widetilde{f \circ \psi}(1) = \widetilde{f \circ \psi}(1) = \widetilde{f}(y)$$

dove $\widetilde{f \circ \psi}$ é il sollevamento di $f \circ \psi$ che inizia in $\widetilde{x_0}$. Quindi $\widetilde{f}$ é ben definita. Dimostriamo che é continua utilizzando il fatto che Y é localmente connesso per archi. Sia $y \in Y$ e U un aperto contenente $\widetilde{f}(y)$. Per dimostrare che $\widetilde{f}$ é continua dobbiamo trovare un aperto

V contenente y tale che $\widetilde{f}(V) \subset U$. Abbiamo che $p(U)$ é aperto in X perché p é aperta in quanto rivestimento (e quindi omeomorfismo locale) e contiene $f(y)$. Sia U' un aperto banalizzante per p contenente $f(y)$ e sia $U' \subset p(U)$. Quindi

$$p^{-1}(U') = \bigcup_{j \in J} V_j \qquad \text{con } p_{|V_j} : V_j \to U \text{ omeomorfismo } \forall j \in J.$$

Perció esiste V_k tale che $\widetilde{f}(y) \in V_k$. Allora $p(U \cap V_k)$ é un aperto contenente $f(y)$ contenuto in U' e $f^{-1}(p(U \cap V_k))$ é un aperto contenente y in Y. Sia $V \subset f^{-1}(p(U \cap V_k))$ un aperto connesso per archi (esiste perché per ipotesi Y é localmente connesso per archi).
Si ha $f(V) \subset p(U \cap V_k))$. Se dimostriamo che $\widetilde{f}(V) \subset U \cap V_k \subset U$ abbiamo terminato.
Sia $y' \in V$. Essendo V connesso per archi esiste un cammino ϕ che porta y in y'. Ma Y é connesso per archi quindi esiste anche un cammino ψ che porta y_0 in y, quindi il cammino $\psi * \phi$ porta y_0 in y'.
Per come abbiamo definito $\widetilde{f}$ si ha:

$$\widetilde{f}(y') = \widetilde{f(\psi * \phi)}(1) = (\widetilde{f \circ \psi * f \circ \phi})(1) =$$

$$= (\widetilde{f \circ \psi} * L_{\widetilde{f}(y)}(f \circ \phi))(1) = (L_{\widetilde{f}(y)}(f \circ \phi))(1) \overset{not}{=} \beta(1).$$

Per dimostrare che $\beta(1) \in U \cap V_k$ mostriamo che $\beta(I)$ é interamente contenuto in $U \cap V_k$.
Si ha $\beta(0) = \widetilde{f}(y)$ (infatti é il punto iniziale di $L_{\widetilde{f}(y)}(f \circ \phi)$). Dato che β é il sollevamento di $f \circ \phi$ si ha

$$p(\beta(I)) = (f \circ \phi)(I) = f(\phi(I)) \subset f(V) \subset p(U \cap V_k) \tag{3}$$

Se dimostriamo che p é iniettiva possiamo semplificare e abbiamo terminato. Si ha

$$\beta(I) \subset p^{-1}(f \circ \phi(I)) \subset p^{-1}(f(V)) \subset$$

$$\subset p^{-1}(p(U \cap V_k)) \subset p^{-1}(U') = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Ma I é connesso quindi $\beta(I)$ é connesso ed é perció contenuto in uno dei V_j. Dato che $\beta(0) = \widetilde{f}(y) \in V_k$ si ha proprio $\beta(I) \subset V_k$. Ora $p_{|V_k}$ é un omeomorfismo quindi é iniettiva e dalla (3) si ha la tesi. $\square$

1.4 Topologia dei compatto-aperti

Sia $S(K,V) = \{f \in C(X,Y) | f(K) \subset V\}$ con $K \in X$ compatto e $V \in Y$ aperto, cioé l'insieme delle funzioni che mandano un compatto fissato di X in un aperto fissato di Y e sia

$$S = \{S(K,V), K \subset X \text{ compatto e } V \subset Y \text{ aperto}\}$$

una famiglia di sottoinsiemi di $C(X,Y)$.

Definizione 1.19. *Diremo che $U \subset C(X,Y)$ é aperto se e solo se*

- $U = \emptyset$ *oppure*
- $U = C(X,Y)$ *oppure*
- $\forall\, f \in U$, $\exists\, S_1, \ldots, S_n \in S$ *tali che* $f \in S_1 \cap \ldots S_n \subset U$ *(o equivalentemente se U é unione di intersezioni finite di elementi di S).*

Per verificare che é effettivamente una topologia bisogna controllare che le intersezioni finite e le unioni arbitrarie siano aperti della topologia (infatti $\emptyset$ e $C(X,Y) \in \mathscr{T}$).

- Siano U_1 e U_2 due aperti di $C(X,Y)$. Allora

  $$f \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow f \in U_1 \text{ e } f \in U_2$$

  cioé esistono

  $$S_1^1, \ldots, S_{k_1}^1 \quad \text{tali che} \quad f \in S_1^1 \cap \cdots \cap S_{k_1}^1 \subset U_1$$

  e

  $$S_1^2, \ldots, S_{k_2}^2 \quad \text{tali che} \quad f \in S_1^2 \cap \cdots \cap S_{k_2}^2 \subset U_2.$$

  Quindi

  $$f \in S_1^1 \cap \cdots \cap S_{k_1}^1 \cap S_1^2 \cap \cdots \cap S_{k_2}^2 \subset U_1 \cap U_2.$$

- Consideriamo $\bigcup_{j\in J} U_j$ con U_j aperti in $C(X,Y)$ e $f \in \bigcup_{j\in J} U_j$. Allora $f \in U_{j_1}$, cioé esistono $S_1, \ldots, S_n \in S$ tali che

  $$f \in S_1 \cap \ldots S_n \subset U_{j_1} \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Lemma 1.7. *Se X é uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e $C(X,Y)$ é dotato della topologia dei compatto-aperti, allora la mappa di valutazione*

$$\begin{aligned} ev : X \times C(X,Y) &\to Y \\ (x,f) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

é continua.

DIMOSTRAZIONE: Sia $(x,f) \in X \times C(X,Y)$ e sia V un aperto di Y tale che $ev(x,f) = f(x) \in V$. Dobbiamo dimostrare che esiste un aperto $\widetilde{U} \subset X \times C(X,Y)$ contenente (x,f) tale che

$$ev(\widetilde{U}) \subset V.$$

f é una funzione continua quindi esiste un aperto $U \subset X$ contenente x tale che $f(U) \subset V$. Inoltre X é localmente compatto e di Hausorff quindi esiste un intorno W di x contenuto in U tale che la sua chiusura $\overline{W}$ é un compatto:

$$f(\overline{W}) \subset f(U) \subset V.$$

Consideriamo l'aperto $\widetilde{U} = W \times S(\overline{W}, V \subset X \times C(X,Y)$ dotato della topologia prodotto. Gli $S(\overline{W}, V)$ sono gli aperti di $C(X,Y)$ e rispetto alla topologia dei compatto-aperti si ha che ogni aperto di $C(X,Y)$ puó essere espresso come unione di intersezioni finite di questi. Si ha

$$(x,f) \in \widetilde{U} = W \times S(\overline{W}, V)$$

(infatti $x \in W$ e $f \in S(\overline{W}, V)$ in quanto $f(\overline{W}) \subset V$). Rimane da verificare che $ev(\widetilde{U}) \subset V$. Sia $(x', f') \in \widetilde{U}$. Allora

$$ev(x', f') = f'(x') \in V$$

infatti se $f'(z) \in V$ per $z \in \overline{W}$ allora $f'(z) \in V$ anche per $z \in W$. □

Teorema 1.8 (legge esponenziale)**.** *Siano X,Y,Z spazi topologici con X,Y localmente compatti di Hausdorff. Se dotiamo tutti gli spazi di applicazioni continue della topologia dei compatto-aperti allora l'applicazione*

$$C(X \times Y, Z) \xrightarrow{\Gamma} C(X, C(Y,Z))$$

definita da $\Gamma(f)(x)(y) = f(x,y)$ é un omeomorfismo.

Dimostrazione: Per ogni $f : X \times Y \to Z$ continua, denotiamo

$$\hat{f} = \Gamma(f) : X \to C(Y, Z).$$

La dimostrazione si articola in vari passaggi.

- Se f é continua, allora anche $\hat{f}$ é continua. Bisogna dimostrare che per ogni elemento $W(K, U)$ della prebase di $C(Y, Z)$ e per ogni $x \in X$ tale che $\hat{f}(x) \in W(K, U)$ esiste un aperto $A \subset X$ tale che $x \in A$ e $\hat{f}(a) \subset W(K, U)$. Dire che $\hat{f}(x) \in W(K, U)$ equivale a dire che $f(\{x\} \times K) \subset U$; per il teorema di Wallace esiste un aperto A tale che $x \in A$ e $A \times K \subset f^{-1}(U)$, ossia $\hat{f}(A) \subset W(K, U)$.

- L'applicazione Γ é biunivoca. L'iniettivitá é evidente. Bisogna dimostrare che per ogni $g : X \to C(Y, Z)$ continua, l'applicazione

$$f : X \times Y \to Z, \qquad f(x, y) = g(x)(y),$$

  é continua. Siano $U \subset Z$ un aperto e $(x, y) \in f^{-1}(U)$; l'applicazione $g(x)$ é continua e Y é localmente compatto di Hausdorff. Ne segue che esiste un intorno compatto B di y tale che $g(x)(B) \subset U$ e quindi $g(x) \in W(B, U)$. L'applicazione g é continua e quindi esite un intorno A di x in X tale che $g(A) \subset W(B, U)$ e questo implica che $f(A \times B) \subset U$.

- l'applicazione Γ é un omeomorfismo. Una prebase della topologia dei compatto-aperti su $C(X, C(Y, Z))$ é data dagli aperti $W(H, W(K, U))$, al variare di H e K tra i compatti di X e Y rispettivamente e di U tra gli aperti di Z. Dato che l'applicazione Γ identifica $W(H \times K, U)$ con $W(H, W(K, U))$, ne segue che é continua. Per dimostrare che é un omeomorfismo basta provare che gli aperti $W(H \times K, U)$ formano una prebase della topologia dei compatto-aperti su $C(X \times Y, Z)$. Siano dunque $T \subset X \times Y$ un compatto e $f \in W(T, U)$. Siccome X e Y sono localmente compatti di Hausdorff, per ogni $t \in T$ esistono due compatti $K_t \subset X$ e $H_t \subset Y$ tali che $f(K_t \times H_t) \subset U$ e t é un punto interno di $K_t \times H_t$. Passando a un sottoricroprimento finito troviamo due successioni finite di compatti $K_1, \dots, K_n \subset X$,$H_1, \dots, H_n \subset Y$ tali che

$$T \subset \bigcup_i (K_i \times H_i), \qquad f(K_i \times H_i) \subset U,$$

  e dunque

$$f \in W(K_1 \times H_1, U) \cap \cdots \cap W(K_n \times H_n, U) \subset W(T, U).$$

□

Proposizione 1.10. *Lo spazio topologico $C(X,Y)$ é un funtore controvariante rispetto a X (supposto che sia di Hausdorff) e covariante rispetto a Y (arbitrario) nella categoria degli spazi topologici e delle funzioni continue.*

Teorema 1.9. *Sia $\mathscr{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tali che ogni sottoinsieme compatto di X é l'unione di un numero finito di sottoinsiemi compatti, ognuno dei quali é contenuto in un elemento di $\mathscr{A}$. Allora la topologia dei compatto-aperti su $C(X,Y)$ coincide con la topologia indotta dalla restrizione*

$$C(X,Y) \overset{\rho_A}{\to} C(A,Y)$$

dove A é un elemento di $\mathscr{A}$.

Dimostrazione: La restrizione ρ_A é continua rispetto alla topologia dei compatto-aperti su $C(X,Y)$ e $C(A,Y)$ per la funtorialitá dato che le inclusioni $A \hookrightarrow X$ portano sottoinsiemi compatti in sottoinsiemi compatti (ricordiamo che compatti significa compatti e Hausdorff). Questo significa che la topologia indotta é meno fine della topologia dei compatto-aperti. Viceversa, consideriamo l'insieme aperto $C_{K,V}$ nella topologia dei compatto-aperti di $C(X,Y)$. Per ipotesi il sottoinsieme compatto K é unione finita di sottoinsiemi compatti $K_1, \ldots, K_n$ ognuno dei quali é contenuto in un elemento A_i di A. Allora si ha

$$C_{K,V} = \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{A_i}^{-1}(C_{K_i,V})$$

che prova che $C_{K,V}$ appartiene alla topologia indotta. Dato che $C_{K,V}$ genera la topologia dei compatto-aperti, si ha la tesi. □

1.5 Topologie sul prodotto cartesiano $X \times Y$

Definizione 1.20. *Dati due spazi topologici X e Y definiamo lo spazio topologico $X \times_S Y$ che si ottiene dotando il prodotto cartesiano $X \times Y$ della topologia piú fine che coincide con la topologia prodotto nei sottoinsiemi $\{x\} \times Y$ e $X \times L$, dove $x \in X$ e L é un sottoinsieme compatto di Y.*

Questo equivale a richiedere che un sottoinsieme $A \subseteq X \times_S Y$ sia aperto se e solo se $A \cap (\{x\} \times Y)$ e $A \cap (X \times L)$ sono aperti in $\{x\} \times Y$ e $X \times L$ rispettivamente.

Dalla definizione seguono immediatamente i seguenti risultati.

Proposizione 1.11. *Le proiezioni* $X \times_S Y \xrightarrow{p_X} X$ *e* $X \times_S Y \xrightarrow{p_Y} Y$ *sono continue, aperte e suriettive e le inclusioni* $Y \xrightarrow{j_x} X \times_S Y$ *e* $X \xrightarrow{j_y} X \times_S Y$ *definite come* $j_x(y) = (x, y) = j_y(x)$ *sono embedding topologici.*

Proposizione 1.12. *Un'applicazione* $X \times_S Y \xrightarrow{F} Z$ *é continua se e solo se le applicazioni* $F_x = F(x, \cdot)$ *e* $F_{|X \times L}$ *sono continue per ogni* $x \in X$ *e ogni sottoinsieme compatto* L *di* Y.

Proposizione 1.13. *L'applicazione* $(X \times_S Y) \times_S Z \to X \times_S (Y \times_S Z)$ *é una bigezione continua. Se inoltre* Y *e* Z *sono di Hausdorff allora é un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE: La dimostrazione si puó trovare in [6] e [7]. □

Proposizione 1.14. *Se* Y *é localmente compatto e di Hausdorff allora*

$$X \times Y = X \times_S Y.$$

DIMOSTRAZIONE: La dimostrazione si puó trovare in [6] e [7]. □

Proposizione 1.15. *La mappa di valutazione* $X \times_S C(X, Y) \xrightarrow{E} Y$ *é continua.*

DIMOSTRAZIONE: Per la Proposizione 1.12 si deve dimostrare che E_f e $E_{|C(X,Y) \times B}$ sono continue per ogni $f \in C(X, Y)$ e per ogni $B \subset Y$ compatto. E_f é continua dal momento che $f \in C(X, Y)$. Per dimostrare che lo é anche $E_{|C(X,Y) \times B}$ si consideri per semplicitá X di Hausdorff. Sia $K \subset X$ compatto, $x \in K$, $U \subset Y$ aperto e $(f, x) \in E^{-1}(U)$. Dato che f é continua su K, esiste un intorno M di x contenuto in K tale che $f(M) \subset U$. Quindi $S(M, U) \times M$ é un intorno di (f, x) in $C(X, Y) \times X$ ed é contenuto in $E^{-1}(U)$. Quindi $E_{|C(X,Y) \times B}$ é continua e per la Proposizione 1.12 lo é anche E. □

Sia $\mu : C(X \times_S Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$ e siano $f \in C(X \times_S Y, Z)$ e $x \in X$. La formula

$$\mu(f)(x)(y) = f(x, y) \qquad (y \in Y)$$

definisce un'applicazione $\mu(f)(x) : Y \to Z$. Vale il seguente

Lemma 1.8. $\mu(f)(x)$ *é continua.*

DIMOSTRAZIONE: Questa funzione coincide con la composizione

$$Y \xrightarrow{i} x \times Y \xrightarrow{f'} Z$$

dove $i(y) = (x, y)$, $y \in Y$ e f' é la restrizione di f. Naturalmente i é continua e f' lo é per la Proposizione 1.12. $\square$

Da questo lemma segue che $\mu(f) : X \to C(Y, Z)$ é ben definita.

Lemma 1.9. *L'applicazione $\mu(f)$ é continua.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $g = \mu(f) : X \to C(Y, Z)$ e sia $W = S(B, U)$ una sottobase per la topologia compatto-aperta sullo spazio delle funzioni continue $C(Y, Z)$. Questo significa che dato $B \subseteq Y$ compatto e $U \subseteq Z$ aperto si ha

$$W = \{h \in C(Y, Z) : h(B) \subseteq U\}.$$

Dimostriamo che $g^{-1}(W)$ é aperto in X. Dato che B é compatto la restrizione $f_{|X\times B}$ é continua per la Proposizione 1.12 e quindi $U' = (f_{|X\times B})^{-1}(U)$ é aperto in $X \times B$. Sia $x \in g^{-1}(W)$. Quindi $\{x\} \times B \subseteq U'$. Con una dimostrazione simile a quella della Proposizione 1.15 si mostra che esiste un insieme aperto $V \subseteq X$ tale che $x \in V$ e $V \times B \subseteq U'$. Questo implica che $x \in V \subseteq g^{-1}(W)$ e quindi $g^{-1}(W)$ é aperto. $\square$

Da questo lemma segue che l'applicazione $\mu : C(X \times_S Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$ é ben definita.

Proposizione 1.16. $\mu : C(X \times_S Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$ *é un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE: Per la Proposizione 1.15 la mappa di valutazione

$$E : C(X \times_S Y, Z) \times_S X \times_S Y \to Z$$

é continua e dal Lemma 1.9 segue che le applicazioni

$$\mu' : \mu(E) : C(X \times_S Y, Z) \times_S X \to C(Y, Z)$$

$$\mu'' : \mu(\mu') : C(X \times_S Y, Z) \to C(X, C(Y, Z)$$

sono continue. É banale verificare che $\mu'' = \mu$ e quindi μ é continua. Ancora per il Lemma 1.15 la composizione $h = E(E \times_S 1)$ é continua, dove h porta $C(X, C(Y, Z)) \times_S X \times_S Y$ in $C(Y, Z) \times_S Y \times Z$. Per il Lemma 1.9 l'applicazione

$$\nu = \mu(h) : C(X, C(Y, Z)) \to C(X \times_S Y, Z)$$

é continua. Si verifica banalmente che $\nu = \mu^{-1}$ e quindi μ é un omeomorfismo. $\square$

2 Sollevamento di rivestimenti

Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento e sia

$$p_\sharp : C(Y, \widetilde{X}) \to C(Y, X)$$

l'applicazione definita come $p_\sharp(\widetilde{f}) = p \circ \widetilde{f}$. Ci si propone di verificare le condizioni sotto le quali l'applicazione $p_\sharp$ é un rivestimento. In generale la risposta é negativa dato che non sempre $p_\sharp$ é suriettiva. Per esempio, nel caso in cui $X = Y$ sia uno spazio topologico che ammette un rivestimento contraibile $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$, si ha che l'identitá 1_X ammette controimmagine tramite $p_\sharp$ se e solo se X é contraibile (per il Teorema 1.7). Anche nel caso in cui sia suriettiva, peró, la tesi non é verificata come dimostra il seguente

Esempio 2.1. Consideriamo $X = \mathbb{S}^1$, $Y = \mathbb{N}$ e $p = e$ il rivestimento universale di $\mathbb{S}^1$. Si ha

$$e_\sharp : C(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to C(\mathbb{N}, \mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}.$$

$e_\sharp$ é suriettiva ma non é un rivestimento in quanto ogni sottoinsieme aperto di $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$ contiene un fattore $\mathbb{S}^1$ che non puó essere uniformemente rivestito da $e_\sharp$.

Diremo che Y solleva i rivestimenti se $p_\sharp$ é un rivestimento per ogni p. Se $p_\sharp$ é un rivestimento per un certo rivestimento p diremo che Y solleva p.

2.1 Prodotti e coprodotti

Teorema 2.1 (sollevamento di prodotti). *Se Y e Y' sono entrambi di Hausdorff, uno di essi é localmente compatto e se entrambi sollevano i rivestimenti, allora anche il loro prodotto solleva i rivestimenti.*

Dimostrazione: Assumiamo che Y' sia localmente compatto di Hausdorff e quindi l'applicazione

$$C(Y \times Y', Z) \xrightarrow{\Gamma} C(Y, C(Y', Z))$$

é un omeomorfismo. Se $p : \widetilde{X} \to X$ é un rivestimento allora si puó considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} C(Y \times Y', \widetilde{X}) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "p_\sharp"] & C(Y, C(Y', \widetilde{X})) \arrow[d, "p_{\sharp\sharp}"] \\ C(Y \times Y', X) \arrow[r, "\Gamma"'] & C(Y, C(Y', X)) \end{tikzcd}$$

Dato che Y' solleva i rivestimenti, l'applicazione

$$p_\sharp : C(Y', \widetilde{X}) \to C(Y', X)$$

é un rivestimento, e dato che Y solleva i rivestimenti, l'applicazione $p_{\sharp\sharp}$ é un rivestimento. Ne segue che

$$p_\sharp : C(Y \times Y', \widetilde{X}) \to C(Y \times Y', X)$$

é un rivestimento. Un ragionamento simile puó essere fatto partendo dall'assunzione che Y sia localmente compatto di Hausdorff. $\square$

Sia $Y = \bigsqcup_{i=1}^n Y_i$ il coprodotto di spazi topologici. Esiste un morfismo naturale φ che rende il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & C(Y_j, X) & \\ C(Y, X) \arrow[ur, "\rho^j"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho^k"'] & & \prod_{i=1}^n C(Y_i, X) \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & C(Y_k, X) & \end{tikzcd}$$

commutativo. Le restrizioni $C(Y, X) \overset{\rho^i}{\to} C(Y_i, X)$ sono indotte dalle inclusioni $Y_i \hookrightarrow Y$. Per il Teorema 1.9, dato che ogni sottoinsieme compatto di Y é unione di un numero finito di sottoinsiemi compatti $K_i \subseteq Y_i$, la topologia di $C(Y, X)$ coincide con la topologia indotta dalle restrizioni ρ_i, e perció φ^{-1} é continua. Se φ é un omeomorfismo allora vale il seguente

Teorema 2.2 (sollevamento di coprodotti)**.** *Se per ogni i, Y_i solleva p, allora $Y = \bigsqcup_{i=1}^n Y_i$ solleva p e $p_\sharp$ é essenzialmente il prodotto di rivestimenti $\prod_{i=1}^n p_{\sharp i}$, dove $p_{\sharp i}$ corrisponde a Y_i.*

Teorema 2.3. *Se lo spazio topologico Y é il coprodotto delle sue componenti connesse e solleva il rivestimento universale e di $\mathbb{S}^1$, allora Y ha un numero finito di componenti.*

Dimostrazione: Indichiamo con Y^i le componenti connesse di Y. Esse sono per ipotesi sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi di Y, quindi ogni sottoinsieme compatto di Y é unione di un numero finito di sottoinsiemi compatti $K^i \subseteq Y^i$. Quindi, per il Teorema 1.9, la topologia di $C(Y, X)$ coincide con la topologia indotta dalle restrizioni $\rho^i : C(Y, X) \to C(Y^i, X)$. Il morfismo naturale φ che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & C(Y^j, X) & \\
C(Y, X) \arrow[ur, "\rho^j"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho^k"'] & & \prod_{i=1}^n C(Y^i, X) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & C(Y^k, X) &
\end{tikzcd}$$

é una bigezione continua e, dato che la topologia di $C(Y, X)$ é la topologia indotta dalle restrizioni ρ^i, la sua inversa é continua e quindi é un omeomorfismo. Supponiamo per assurdo che Y abbia un numero infinito di componenti. Il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
C(Y, \mathbb{R}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "e_\sharp"] & \prod_i C(Y^i, \mathbb{R}) \arrow[d, "\prod_i e_\sharp^i"] \\
C(Y, \mathbb{S}^1) \arrow[r, "\varphi"'] & \prod_i C(Y^i, \mathbb{S}^1)
\end{tikzcd}$$

implica che $\prod_i e_\sharp^i$ é un rivestimento. Sia G un aperto banalizzante di $(g_i)_i \in \prod_i C(Y^i, \mathbb{S}^1)$. Se $(\tilde{g}_i)_i \in \left(\prod_i e_\sharp^i\right)^{-1}((g_i)_i)$, allora esiste un sottoinsieme aperto $\tilde{G}$ contenente $(\tilde{g}_i)_i$ che si proietta omeomorficamente su G. $\tilde{G}$ contiene un fattore $C(Y^{i_0}, \mathbb{R}) \times \prod_{i \neq i_0} \tilde{g}_i$ e $e_\sharp^{i_0}$ porta omeomorficamente $C(Y^{i_0}, \mathbb{R})$ su $C(Y^{i_0}, \mathbb{S}^1)$. La restrizione di $e_\sharp^{i_0}$ a $\mathbb{R})$ visto come sottoinsieme di $C(Y^{i_0}, \mathbb{R}$ da' luogo a un omemorfismo su $\mathbb{S}^1$ visto come sottoinsieme di $C(Y^{i_0}, \mathbb{S}^1)$ e questo é assurdo. $\square$

3 Sollevamenti di aperti banalizzanti

Definizione 3.1. *Diremo che lo spazio topologico Y solleva gli aperti banalizzanti ripetto a p se, fissato un punto $y \in Y$, per ogni coppia di sottoinsiemi aperti $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ e $U \subseteq X$ tali che $\tilde{U}$ viene portato omemorficamente su U*

da p, l'insieme $C_{y,\tilde{U}}(Y,\tilde{X}) \overset{not}{=} C_{y,\tilde{U}}$ *si proietta omemorficamente sull'insieme* $C_{y,U}(Y,X) \overset{not}{=} C_{y,U}$ *tramite* $p_\sharp$ *dove*

$$C_{y,U} = \{f \in C(Y,X) : f(y) \in U\}.$$

Gli insiemi $C_{y,U}$ sono aperti della topologia dei compatto-aperti e, se U genera un ricoprimento aperto di X, allora $C_{y,U}$ genera un ricoprimento aperto di $C(Y,X)$. Diremo che Y solleva gli aperti banalizzanti se solleva gli aperti banalizzanti rispetto a p per ogni rivestimento p.

Teorema 3.1. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Se Y solleva gli aperti banalizzanti rispetto a p, allora solleva p.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un aperto $U \in X$ uniformemente rivestito da p. Se $p^{-1}(U) = \bigcup_i \widetilde{U}_i$, dove gli aperti $\widetilde{U}_i$ sono disgiunti e ognuno di essi si proietta omeomorficamente su U tramite p, e poniamo $\tilde{C}_i = C_{y,\tilde{U}_i}$, allora gli aperti $\tilde{C}_i$ sono disgiunti e

$$p_\sharp^{-1} C_{y,U} = \bigcup_i \tilde{C}_i$$

e quindi $C_{y,U}$ é un aperto uniformente rivestito da p. Dato che gli aperti $C_{y,U}$ ricoprono $C(Y,X)$, al variare di U tra gli aperti banalizzanti di X, se ne deduce che $p_\sharp$ é un rivestimento. □

Per l'unicitá del sollevamento (Teorema 1.3) si ha il seguente

Lemma 3.1. *Se p é un rivestimento e Y é connesso, allora l'applicazione $p_\sharp : C_{y,\tilde{U}} \to C_{y,U}$ é iniettiva.*

Una conseguenza del Teorema 1.7 é la seguente

Proposizione 3.1. *Se Y é localmente connesso per archi e semplicemente connesso, o contraibile, l'applicazione $p_\sharp : C_{y,\tilde{U}} \to C_{y,U}$ é biunivoca.*

Nel caso di un rivestimento regolare vale il seguente

Teorema 3.2. *Sia p un rivestimento regolare. Se Y é connesso per archi, Y o X localmente connesso per archi e $p_\sharp : C(Y,\widetilde{X}) \to C(Y,X)$ suriettiva, allora $p_\sharp : C_{y_0,\widetilde{U}} \to C_{y_0,U}$ é biunivoca.*

DIMOSTRAZIONE: Dobbiamo dimostrare che $p_\sharp : C_{y_0,\widetilde{U}} \to C_{y_0,U}$ é suriettiva. Data $f \in C_{y_0,U}$, essa ammette per ipotesi un sollevamento $\widetilde{f}' \in C(Y, \widetilde{X})$. Possiamo assumere che U sia un aperto banalizzante e che $\widetilde{U}$ sia uno degli aperti di $\widetilde{X}$ che si proiettano omeomorficamente su U tramite p. Sia ora $\widetilde{U}'$ un altro di questi aperti e precisamente quello che contiene il punto $\widetilde{x}'_0 = \widetilde{f}'(y_0)$. Si ha

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0).$$

Dato che il rivestimento é regolare e sapendo che cambiando punto base sulla stessa fibra di $x_0 = p(\tilde{x}'_0)$ si ottiene una classe di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$, si ha

$$p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$$

dove $\widetilde{x}_0 = p^{-1}(x_0) \cap \widetilde{U}$. Possiamo allora scrivere

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0). \tag{4}$$

Consideriamo i due casi:

- Y é localmente connesso per archi. Applicando il Teorema 1.7 si ottiene un sollevamento $\widetilde{f}$ di f tale che $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$ e quindi $\widetilde{f} \in C_{y_0,\widetilde{U}}$.
- X é localmente connesso per archi. Possiamo assumere che U sia un aperto banalizzante connesso per archi. Sia $y \in Y$. Consideriamo un arco γ da y_0 a y e definiamo

  $$\widetilde{f}(y) =: \widetilde{(f \circ \gamma)}(1)$$

  cioé il punto finale dell'unico sollevamento di $f \circ \gamma$ che inizia in $\widetilde{x}_0$. Verichiamo che é ben definita, cioé preso un altro cammino ψ che congiunge y_0 e y si ha $\widetilde{f \circ \gamma}(1) = \widetilde{f \circ \psi}(1)$. Si ha che $\gamma * i(\psi)$ é un laccio chiuso di base y_0 e quindi $f(\gamma * i(\psi)) = f \circ \gamma * f(i(\psi))$ é un laccio chiuso di base x_0. Consideriamo $[f \circ \gamma * f(i(\psi))] \in \pi_1(X, x_0)$, cioé come elemento del gruppo fondamentale. D'altra parte $[f \circ \gamma * f(i(\psi))] \in f_*\pi_1(Y, y_0)$ (infatti $\gamma * i(\psi) \in \pi_1(Y, y_0)$ e quindi $f \circ (\gamma * i(\psi)) \in f_*\pi_1(Y, y_0)$). Per ipotesi $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ quindi esiste $[\alpha] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ tale che

  $$[f \circ \gamma * f(i(\psi))] = p_*([\alpha]) = [p \circ \alpha].$$

Perció

$$f \circ \gamma * f(i(\psi)) = f \circ \gamma * i(f(\psi)) \sim p \circ \alpha \Longrightarrow f \circ \gamma \sim p \circ \alpha * f \circ \psi.$$

Si ha $(f \circ \gamma)(0) = x_0$ e $(p \circ \alpha * f \circ \psi)(0) = (p \circ \alpha)(0) = p(\widetilde{x_0}) = x_0$, cioé $f \circ \gamma$ e $p \circ \alpha * f \circ \psi$ hanno lo stesso punto iniziale e quindi, per il teorema di sollevamento dei cammini, i loro sollevamenti hanno lo stesso punto finale:

$$\widetilde{f \circ \gamma}(1) = p \circ \widetilde{\alpha * f} \circ \psi(1) = \alpha * \widetilde{f \circ \psi}(1) = \widetilde{f \circ \psi}(1) = \widetilde{f}(y)$$

dove $\widetilde{f \circ \psi}$ é il sollevamento di $f \circ \psi$ che inizia in $\widetilde{x_0}$. Quindi $\widetilde{f}$ é ben definita. Per dimostrare che $\widetilde{f}$ é continua, consideriamo y_0 e $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$. Dobbiamo dimostrare che dato $\widetilde{U}$ contenente $\tilde{x}_0$, allora $V = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U})$ é un aperto contenente y_0. Sappiamo che $\widetilde{f}'$ é continua quindi $V' = (\widetilde{f}')^{-1}(\widetilde{U}')$ é un intorno aperto di y_0. Basterá quindi dimostrare che $V \subseteq V'$.
Dato che $\widetilde{U}'$ é connesso per archi, preso $y \in V'$ esiste un arco $\widetilde{\varphi}'$ che collega $\widetilde{x}_0'$ e $\widetilde{f}'(y)$ completamente contenuto in $\widetilde{U}'$. Proiettando sull'aperto U tramite p otteniamo un arco φ che collega x_0 e $f(y)$ contenuto nell'aperto banalizzante U. Sia $\widetilde{\gamma}$ il sollevamento di φ con punto iniziale $\widetilde{x}_0$. D'altra parte p ristretto a $\widetilde{U}$ é un omeomorfismo quindi un sollevamento di φ é $p^{-1}_{|\widetilde{U}} \circ \varphi$. Per il Teorema 1.3 i due sollevamenti devono quindi coincidere e dato che, per definizione, si ha $\widetilde{f}(y) = \widetilde{\gamma}(1)$, ne segue che $\widetilde{f}(y) \in \widetilde{U}$ e quindi $y \in V$. □

Grazie a questo teorema si ha il seguente

Corollario 3.1. *Se p é un rivestimento regolare, Y é di Hausdorff e connesso per archi e se Y o X é localmente connesso per archi allora Y solleva p se e solo se solleva gli aperti banalizzanti rispetto a p.*

Dimostrazione: La condizione necessaria segue dal Teorema 3.1. Per dimostrare la condizione sufficiente supponiamo che Y sollevi p. Per il teorema precedente (Teorema 3.2) l'applicazione $p_\sharp : C_{y_0,\widetilde{U}} \to C_{y_0,U}$ é biunivoca. Per la Proposizione 1.10 essa é anche continua. Non resta che da dimostrare che $(p_\sharp)^{-1}$ é continua. Sia $f \in C_{y_0,U}$ e $\widetilde{f} = p_\sharp^{-1}(f) \in C_{y_0,\widetilde{U}}$. Per ipotesi f é contenuta in un aperto $C \subseteq C_{y_0,U}$ uniformemente rivestito da $p_\sharp$, cioé esiste un aperto $\widetilde{C} \subseteq C(Y, \widetilde{X})$ contenente $\widetilde{f}$ che si proietta omeomorficamente su C tramite $p_\sharp$. L'intersezione $\widetilde{C} \cap C_{y_0,\widetilde{U}} = \widetilde{C}'$ é perció un intorno aperto di $\widetilde{f}$ che é omeomorfo all'aperto $C' = p_\sharp(\widetilde{C}')$. Quindi $p_\sharp^{-1} : C_{y_0,U} \to C_{y_0,\widetilde{U}}$ é continua in f. La tesi segue dall'arbitrarietá di f. □

4 Ogni spazio topologico contraibile e di Hausdorff solleva gli aperti banalizzanti

Teorema 4.1. *Ogni spazio topologico contraibile e di Hausdorff solleva gli aperti banalizzanti e quindi solleva i rivestimenti.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ un rivestimento e siano $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{X}$ e $U \subseteq X$ due aperti omeomorfi. Per la Proposizione 3.1 si ha che $p_\sharp : C_{y_0,\tilde{U}} \to C_{y_0,U}$ é continua e biunivoca. Dobbiamo dimostrare che $p_\sharp^{-1}$ é continua e per fare questo dimostreremo che $p_\sharp^{-1} = \Gamma(\widetilde{E})$ dove Γ é l'applicazione esponenziale e $\widetilde{E}$ é il sollevamento della mappa di valutazione

$$C_{y_0,U} \times_S Y \xrightarrow{E} X.$$

La mappa di valutazione E é continua per la Proposizione 1.15. Inoltre Y é contraibile quindi esiste un'omotopia

$$Y \times I \xrightarrow{F} Y$$

tra l'applicazione costante ϵ_{y_0} e l'applicazione identica 1_Y, cioé

$$F(y,0) = \epsilon_{y_0}(y) = y_0 \qquad \text{e} \qquad F(y,1) = 1_Y(y) = y.$$

Consideriamo l'applicazione $(C_{y_0,U} \times_S Y) \times I \xrightarrow{G} X$ definita come

$$G((g,y),t) = (g \circ F)(y,t)$$

e dimostriamo che é un'omotopia tra $u : (g,y) \mapsto g(y_0)$ ed E :

- $G((g,y),0) = (g \circ F)(y,0) = g(y_0) = u(g,y)$;
- $G((g,y),1) = (g \circ F)(y,1) = g(y) = E(g,y)$;
- G é continua. La dimostrazione viene fatta in quattro parti:
  - Y é di Hausdorff quindi l'applicazione

$$\begin{aligned} C_{y_0,U} &\to C(Y \times I, X) \\ g &\mapsto g \circ F \end{aligned}$$

    é continua per la Proposizione 1.10.

– L'applicazione

$$\begin{aligned} C_{y_0,U} \times_S Y &\to C(Y \times I, X) \times_S Y \\ (g, y) &\mapsto (g \circ F, y) \end{aligned}$$

é continua. Per la Proposizione 1.12 basta considerare le applicazioni

$$y \mapsto (g \circ F, y) \qquad \text{e} \qquad C_{y_0,U} \times_S L \to C(Y \times I, X) \times_S L$$

dove L é un sottoinsieme compatto di Y. La prima é continua per la Proposizione 1.11. Per la seconda, grazie alla Proposizione 1.14, si possono considerare i prodotti ordinari

$$C_{y_0,U} \times L \qquad \text{e} \qquad C(Y \times I, X) \times L$$

(infatti L é compatto e quindi localmente compatto).

– Per le Proposizioni 1.13 e 1.14 si hanno le identificazioni

$$(C(Y \times I, X) \times_S Y) \times I = (C(Y \times I, X) \times_S Y) \times_S I \cong$$

$$\cong (C(Y \times I, X) \times_S (Y \times_S I) = (C(Y \times I, X) \times_S (Y \times I).$$

– La mappa di valutazione da $C(Y \times I, X) \times_S (Y \times I)$ a X é continua per la Proposizione 1.15.

Quindi G é effettivamente un'omotopia tra u ed E. Dato che u prende valori in U, ponendo $\widetilde{u} = p^{-1} \circ u$, si ottiene un sollevamento

$$C_{y_0,U} \times_S Y \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{U}.$$

Per il Teorema di sollevamento delle omotopie (Teorema 1.5), G ammette un sollevamento

$$(C_{y_0,U} \times_S Y) \times I \xrightarrow{\widetilde{G}} \widetilde{X}$$

tale che $\widetilde{G}((\cdot, \cdot), 0) = \widetilde{u}$.

Si ha che $\alpha_g = G((g, y_0), \cdot)$ é un laccio basato in $g(y_0)$ (infatti $G((g, y_0), 0) = G((g, y_0), 1) = g(y_0)$) e l'applicazione

$$H(s, t) = (g \circ F)(F(y_0, s), t)$$

é un'omotopia tra $\epsilon_{g(y_0)}$ e α_g. Dato che il laccio α_g é omotopo al laccio costante, ammette un sollevamento e, per il Teorema 1.3 (unicitá del sollevamento), si ha

$$\widetilde{G}((g, y_0), 1) = \widetilde{G}((g, y_0), 0) = \widetilde{u}(g, y_0) \in \widetilde{U}.$$

L'applicazione $\widetilde{E} = \widetilde{G}((\cdot,\cdot),1) \in C(C_{y_0,U} \times_S Y, \widetilde{X})$ é un sollevamento di E tale che $\widetilde{E}(g, y_0) \in \widetilde{U}$. Se consideriamo l'applicazione

$$C(C_{y_0,U} \times_S Y, \widetilde{X}) \xrightarrow{\Gamma} C\big(C_{y_0,U}, C(Y, \widetilde{X})\big)$$

si ha $\Gamma(\widetilde{E}) \in C(C_{y_0,U}, C_{y_0,\widetilde{U}})$ e

$$\big(p_\sharp \circ \Gamma(\widetilde{E})\big)(g) = p \circ \big(\Gamma(\widetilde{E})(g)\big) = p \circ \widetilde{E}(g,\cdot) = E(g,\cdot) = g,$$

cioé $p_\sharp^{-1} = \Gamma(\widetilde{E})$ e, per la Proposizone 1.16, si ha che $p_\sharp^{-1}$ é continua. □

Bibliografia

[1] F. Apéry. *Lifting Covering Maps*. Topology and its Applications 114, 2001 (pagg. 295-310).

[2] C. Kosniowski. *Introduzione alla Topologia Algebrica*. Zanichelli, 1988.

[3] M. Manetti. *Topologia*. Springer, 2007.

[4] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An introduction*. Springer-Verlag, 1977.

[5] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

[6] R. Brown. *Ten Topologies for* $X \times Y$. Quart. J. Math. Oxford (2) 14, 1963 (pagg. 303-319).

[7] R. Brown. *Function Spaces and Product Topologies*. Quart. J. Math. Oxford (2) 15, 1964 (pagg. 238-250).