# Forme differenziali ed applicazioni

Carlo Collari

Relatore: Prof.Andrea Loi

Lo scopo di questa tesi è la presentazione della risoluzione dei 94 esercizi proposti nel libro di Manfredo P. Do Carmo intitolato *Differential forms and applications* (vedi [**DoCDF**] in bibliografia). La tesi è suddivisa in sei capitoli, ciascuno corrispondente ad un capitolo del libro. Per rendere il materiale più autocontenuto possibile all'inizio di ogni capitolo vengono richiamati le definizioni e gli enunciati necessari allo svolgimento degli esercizi stessi.

# Indice

CAPITOLO 1

# Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$.

In questo capitolo introdurremo la nozione di forma differenziale in $\mathbb{R}^n$, la nozione di prodotto esterno ed altre operazioni utili. A partire da queste svilupperemo poi la teoria delle forme differenziali sulle varietà differenziabili. Introduciamo anzitutto le nozioni fondamentali della teoria.

## 1.1. Definizioni e teoremi sulle forme differenziali in $\mathbb{R}^n$.

### 1.1.1. Definizione di forma differenziale.

Definition 1.1. Sia $V$ un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale, con $\mathbb{K}$ un campo. Si dice k-forma, o forma di grado k, su $V$, una qualsiasi funzione:

$$\varphi : \prod_{i=1}^{k} V \rightarrow \mathbb{K} : (v_1, ..., v_k) \mapsto \varphi(v_1, ..., v_k),$$

dove con $\prod_{i=1}^{n} V$ si indica il prodotto di $V$ per se stesso $n$-volte. Una k-forma è detta k-lineare se è lineare in ciascuno dei suoi argomenti, mentre è detta alternata, se e solo se dato $i \in \{1, ..., k-1\}$, si ha:

$$\varphi(v_1, ..., v_i, v_{i+1}, ..., v_k) = -\varphi(v_1, ..., v_{i+1}, v_i, ..., v_k),$$

ovvero scambiando due argomenti consecutivi[1] la forma cambia segno[2]. L'insieme delle forme k-lineari ed alternate su $V$ è denotato $\Lambda^k(V)$. Un elemento di questo insieme è detto forma esteriore di grado k.

[1]Si noti che questo è equivalente a dire che una permutazione pari degli indici degli argomenti lascia invariato il risultato, mentre una dispari ne cambia il segno.
[2]Il cambio di segno è inteso come passaggio all'inverso additivo nel campo $\mathbb{K}$.

Vediamo ora un'altra importante definizione riguardante gli spazi vettoriali.

DEFINITION 1.2. Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, il duale di $V$, è l'insieme $V^*$ delle forme lineari, ovvero le 1-forme lineari, su $V$. Introducendo su $V^*$ le seguenti operazioni:

$$+ : V^* \times V^* \to V^* : (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi + \psi),$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V^* \to V^* : (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda\varphi,$$

con $(\varphi + \psi) : V \to \mathbb{K} : v \mapsto \varphi(v) + \psi(v)$, e $\lambda\varphi : V \to \mathbb{K} : v \mapsto \lambda\varphi(v)$. Allora la quaterna $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale della stessa dimensione di $V$.[3] Infine data una base $\{e_i\}$ di $V$ e una base $\{\varphi_j\}$ di $V^*$, diremo che una è la duale dell'altra se e solo se $\varphi_j(e_i) = \delta_i^j$, per ogni $i$ e per ogni $j$.

Consideriamo delle forme $\varphi$ e $\psi$, di grado rispettivamente $k$ e $h$, su $\mathbb{R}^n$, costruiremo ora un'operazione, detta prodotto esterno, che ci permetterà di ottenere da queste due una forma $\xi$ di grado $h + k$, ma per fare questo abbiamo bisogno di qualche definizione e di un teorema molto importante. Iniziamo con il definire il concetto di prodotto esterno di 1-forme.

DEFINITION 1.3. Sia $V$ un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale e siano $\varphi_i$ $k$ forme di grado 1 su $V$. Definiamo il prodotto esterno delle $\varphi_i$, come la $k$ forma definita da:

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i[v_1, ..., v_k] = \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k[v_1, ..., v_k] = Det \begin{pmatrix} \varphi_1[v_1] & \dots & \varphi_1[v_k] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k[v_1] & \dots & \varphi_k[v_k] \end{pmatrix},$$

[3]Ovvio è il fatto che $V^*$ con le due operazioni definite rispetti gli assiomi di spazio vettoriale. Consideriamo una base $\mathfrak{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ in $V$. Definiamo $\varphi_1, ..., \varphi_n$ come :

$$\varphi_i : V \to \mathbb{K} : v = (v_1, ..., v_n) \mapsto v_i,$$

dove $v_1, ..., v_n$ sono le componenti di $v$ in $\mathfrak{B}$. Ora abbiamo che $\varphi_i(e_j) = \delta_i^j$, le $\varphi_i$ sono lineari e linearmente indipendenti. In quanto

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + ... + a_n\varphi_n = 0,$$

calcolato in un elemento $e_i$ di $\mathfrak{B}$, ci dà: $a_i = 0$. Dunque è un insieme libero. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\psi : V \to \mathbb{K} : v \mapsto \psi(v),$$

siano $a_i = \psi(e_i)$ allora $\psi(\sum_i v_i e_i) = \sum_i v_i \psi(e_i) = \sum_i a_i v_i = \sum_i a_i \varphi_i(v)$, dunque è un'insieme di generatori. Questo dimostra l'asserzione.

notiamo che se le $\varphi_i$ sono lineari allora il loro prodotto esterno è k-lineare[4], inoltre è alternata. Infine definiamo il prodotto esterno di 1 forme in maniera tale che sia associativo.

DEFINITION 1.4. Sia $p \in \mathbb{R}^n$, definiamo lo spazio tangente in $p$ a $\mathbb{R}^n$ come l'insieme dei vettori $v \in \mathbb{R}^n$, applicati in $p$, ovvero il vettore $v$ applicato in $p$ è $v_p$ dato da $v - p$. Lo spazio tangente ad $\mathbb{R}^n$ in un punto $p$ verrà indicato con $\mathbb{R}^n_p$. La base canonica di $\mathbb{R}^n_p$ è $\{e_{1p}, ..., e_{np}\}$, questa, qualora non vi sia troppa ambiguità, verrà denotata semplicemente con $\{e_1, ..., e_n\}$.

Prima di procedere oltre, possiamo stabilire un legame tra i vettori e le derivate direzionali. Questo legame sarà poi utilizzato in tutto il seguito.

DEFINITION 1.5. Una derivazione $D_p$ in $p$ è un'applicazione che è definita dall'insieme delle funzioni differenziabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, che denoteremo $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$, e per ogni funzione $f$ associ $D_p[f] \in \mathbb{R}$. e che sia tale che

$$D_p[\alpha f + \beta g] = \alpha D_p[f] + \beta D_p[g], \tag{1.1.1}$$

$$D_p[f \cdot g] = D_p[f] \cdot g_{|_p} + f_{|_p} \cdot D_p[g], \tag{1.1.2}$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La proprietà (1.1.1) è detta linearità, mentre la (1.1.2) è detta regola del prodotto di Leibniz[5]. L'insieme delle derivazioni su $\mathbb{R}^n_p$ verrà indicato con $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$.

---

[4]Per la proprietà del determinante:

$$Det\begin{pmatrix} a_{11}+c_1 & \dots & a_{1n}+c_n \\ a_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + Det\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ a_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

[5]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Matematico e filosofo tedesco. Fu uno dei fondatori dell'analisi matematica.

LEMMA 1.6. *Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenziabile e sia $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$; allora esistono $n$ funzioni $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, anch'esse differenziabili, tali che:*

$$g = \left[\sum_i (x_i - p_i) g_i\right] + g(p).$$

*Inoltre $g_i(p) = \partial_i g(p)$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, come:

$$f(s) = g(st_1 + (1-s)p_1, ..., st_n - (1-s)p_n),$$

con $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Poiché $g$ è differenziabile allora $f$ è derivabile. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo:

$$f(t) = \int_0^t f'(s) ds,$$

ma:

$$f'(s) = \sum_i (t_i - p_i) \partial_i g(st_1 + (1-s)p_1, ..., st_n - (1-s)p_n),$$

allora si ha:

$$f(\tau) = \int_0^\tau \left[\sum_i (t_i - p_i) \partial_i g(st_1 + (1-s)p_1, ..., st_n - (1-s)p_n)\right] ds =$$

$$= \sum_i (t_i - p_i) \int_0^\tau \partial_i g(st_1 + (1-s)p_1, ..., st_n - (1-s)p_n) ds.$$

D'altro canto

$$f(1) = g(t) - g(p),$$

da cui:

$$g(t) - g(p) = \sum_i (t_i - p_i) \int_0^1 \partial_i g(st_1 + (1-s)p_1, ..., st_n - (1-s)p_n) ds,$$

posto $g_i(t) = \int_0^1 \partial_i g(st_1 + (1-s)p_1, ..., st_n - (1-s)p_n) ds$, abbiamo la decomposizione cercata, prima di continuare facciamo notare che $g_i(p) = \int_0^1 \partial_i g(p_1, ..., p_n) ds = \partial_i g(p) \int_0^1 ds = \partial_i g(p)$. $\square$

THEOREM 1.7. *Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali tra $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{R}^n_O$. Inoltre questo è tale che*

$$e_i \leftrightarrow \partial_i,$$

*ove con $\partial_i$ viene indicato l'operatore $\frac{\partial}{\partial x_i}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{B} = \{e_i\}_{0 \leq i \leq n}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n_O$. Sia inoltre $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, per dimostrare che esiste un isomorfismo di spazi vettoriali è sufficiente dimostrare che $\{\partial_i\}$ è una base di $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Iniziamo con il dimostrare che questo è uno spazio vettoriale. Ovviamente se $\lambda \in \mathbb{R}$, e $D \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ abbiamo che $\lambda D : \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} : f \mapsto \lambda \cdot D[f]$ appartiene a $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Vale inoltre $1 \cdot D = D$. Definiamo $+$ come:

$$D + D'[f] = D[f] + D'[f],$$

$D, D' \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$; Il fatto che per la somma e per il prodotto per uno scalare valgano tutte le proprietà degli spazi vettoriali discende dal fatto che, se calcolate in una singola funzione, le derivazioni diventano elementi del campo e su di loro valgono quelle proprietà, e, poiché valgono indipendentemente dalla scelta della funzione, allora valgono in generale per le derivazioni. Dimostriamo che $\{\partial_i\}$ è un insieme libero, se esistessero $a_i \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_i a_i \partial_i = 0$, allora, dato $j \in \{1, ..., n\}$, vale:

$$0 = \sum_i a_i \partial_i [x_j] = a_j.$$

con $x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v = (v_1, ..., v_n) \mapsto v_j$. Consideriamo $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \alpha$, la funzione costante $\alpha$, utilizzando le due proprietà delle derivazioni, otteniamo:

$$D[\alpha] = 0,$$

per ogni $D \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Dunque poniamo $a_j = D[x_j]$, e, grazie al lemma 1.6, otteniamo:

$$D[f] = D[\sum_i (x_i - p_i) f_i + f(p)] = \sum_i D[(x_i - p_i) f_i] + D[f(p)] =$$

dato che la derivazione calcolata su una funzione costante è nulla,

$$= \sum_i D[(x_i - p_i) f_i] = \sum_i [D[x_i] f_i(p) + (p_i - p_i) D[f_i]] = \sum_i D[x_i] f_i(p) = \sum_i a_i \partial_i [f].$$

□

Per cui possiamo identificare derivazioni e vettori di $\mathbb{R}^n$, questo, per quanto non strettamente necessario, ci dà l'idea per generalizzare il concetto di vettore tangente ad una varietà differenziabile qualsiasi; ma questo lo vedremo più avanti. Per ciascun punto $p$ di $\mathbb{R}^n$, abbiamo che $\mathbb{R}^n_p$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $n$. Possiamo dunque considerarne il duale $(\mathbb{R}^n_p)^*$, otteniamo il seguente lemma:

LEMMA 1.8. *Una base di $\Lambda^1(\mathbb{R}^n_p)^*$, è l'insieme $\{(dx_i)_p\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$, dove*

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (a_1, ..., a_i, ..., a_n) \mapsto a_i,$$

*e inoltre questa è la base "duale"*[6] *della base canonica di $\mathbb{R}^n_p$. Notiamo che le applicazioni $dx_i$ sono lineari.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo che $dx_i[v_p] = v_i$; da cui $dx_i[e_j] = \delta_i^j$ e la linearità. Iniziamo con il dimostrare che sono indipendenti, se esistessero $a_j \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_j a_j dx_j = 0$, applicando questo ad $e_i$, otteniamo:

$$0 = \sum_j a_j dx_j [e_i] = a_i,$$

dunque sono linearmente indipendenti. Ora siano $a_j = f(e_j)$ , con $f \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$. Definiamo

$$g = \sum_j a_j dx_j,$$

notiamo $g \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$, inoltre per ogni $e_i$ vale che $g[e_i] = f[e_i]$ da cui $g = f$. □

DEFINITION 1.9. Un campo di forme lineari, o di forme esterne di grado 1, è una funzione che ad ogni punto $p$ associa un elemento $\omega(p)$ di $\Lambda^1(\mathbb{R}^n_p)^*$.

[6]Nel senso che $(dx_i)_p[e_j] = \delta_i^j$.

In virtù del teorema 1.7 e della definizione precedente, un qualsiasi campo di forme esterne di grado 1 può esser espresso come:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) dx_i,$$

dove osserviamo la convenzione che, qualora sia sufficientemente chiaro dal contesto, $(dx_i)_p$ verrà denotato con $dx_i$. Nel caso si presenti una situazione di ambiguità, o comunque si cambi la notazione, verrà detto esplicitamente. Come abbiamo fatto notare prima, le applicazioni $dx_i$ sono lineari, dunque il prodotto esterno delle $dx_{i_k}$, sarà bilineare ed alternato, dunque abbiamo che $\bigwedge_{j=1}^{h} dx_{i_j} \in \Lambda^h(\mathbb{R}^n_p)^*$. Più precisamente vale il seguente:

PROPOSITION 1.10. *L'insieme:*

$$\{(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_1 < ... < i_k,\ i_j \in \{1, ..., n\}\},$$

*è una base di* $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo che

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}[e_{j_1}, ..., e_{j_k}] = \begin{cases} 0 & se\ (i_1, ..., i_k) \neq (j_1, ..., j_k) \\ 1 & altrimenti \end{cases},$$

inoltre come già fatto osservare questa è k-lineare ed alternata. Ora dimostriamo l'indipendenza dell'insieme $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_1 < ... < i_k,\ i_j \in \{1, ..., n\}\}$, supponiamo che esistano $a_{i_1,...,i_k} \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1...i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0,$$

calcolato in $[e_{j_1}, ..., e_{j_k}]$ ci da:

$$a_{j_1...j_k} = 0.$$

Dimostriamo che sono un insieme di generatori. Sia $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$, poniamo $a_{i_1 \dots i_k} = f[e_{i_1}, ..., e_{i_k}]$. Ora posta

$$g = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$

abbiamo che $g \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$, inoltre che per ogni $[e_{j_1}, ..., e_{j_k}]$, abbiamo $g[e_{j_1}, ..., e_{j_k}] = f[e_{j_1}, ..., e_{j_k}]$,da cui

$$f = g.$$

□

Possiamo ora definire una forma differenziale di grado k su $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION 1.11. Una forma esterna di grado $k$ su $\mathbb{R}^n$, è un'applicazione che ad ogni punto $p$ associa un elemento $\omega(p)$ di $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$; per quanto visto nella proposizione 1.10, possiamo scrivere dunque $\omega(p)$ come:

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$

La forma esterna è detta differenziale di grado $k$, se e solo se le $a_{i_1 \dots i_k}$ sono funzioni differenziabili di $p$.

**1.1.2. Operazioni sulle forme differenziali in $\mathbb{R}^n$.** Definiamo ora le operazioni sulle forme differenziali in $\mathbb{R}^n$. Queste sono diverse, le principali sono l'operazione di somma, il prodotto esterno, la stella di Hodge[7] e il cambio di variabili. A partire da questo definiremo delle altre operazioni come il rotore, il gradiente, il laplaciano e la divergenza, questo verrà fatto perlopiù nella parte relativa agli esercizi, per quanto alcune di queste definizioni verranno riportate in questa sottosezione. Ma vediamo anzitutto quelle principali.

[7]William Vallance Douglas Hodge FRS (17 Giugno 1903 – 7 Luglio 1975), matematico scozzese, occupatosi in particolare di geometria.

DEFINITION 1.12. Siano $\omega$ e $\varphi$ due forme esterne di grado $k$, definiamo la somma di $\omega$e $\varphi$ come la forma esterna di grado $k$, data da:

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I,$$

dove si denota con $I$ la $k-$upla $(i_1, ..., i_k)$, con $i_1 < ... < i_k$, denotando $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ ed indicando

$$\varphi = \sum_I b_I dx_I, \quad \omega = \sum_J a_J dx_J;$$

da notare che se le due sono forme differenziali allora anche la loro somma lo è; in quanto la somma di due funzioni differenziabili è una funzione differenziabile.

DEFINITION 1.13. Date

$$\varphi = \sum_J a_J dx_J, \quad \omega = \sum_I b_I dx_I$$

una $k$ ed una $h$, rispettivamente, forme esterne, definiamo il loro prodotto esterno come l'operazione, definita da:

$$\varphi \wedge \omega = \sum_{I,J} a_J b_I dx_J \wedge dx_I,$$

dunque il risultato del prodotto esterno di $\varphi$ e $\omega$ è una $k + h$ forma esterna. Se le due sono forme differenziali allora anche il risultato lo è, e questo perchè il prodotto di due funzioni differenziabili è ancora differenziabile e la somma di funzioni differenziabili è ancora una differenziabile.

Diamo ora qualche proprietà:

PROPOSITION 1.14. *Siano $\varphi, \omega$ e $\theta$, rispettivamente, una $h$, una $k$ ed una $r$ forme differenziali. Allora si ha:*

(1) *$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$.*

(2) *$(\omega \wedge \varphi)$=$(-1)^{kh}(\varphi \wedge \omega)$.*

(3) *Se r=h, allora $\omega\wedge(\varphi + \theta)$=$\omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\omega = \sum_I a_I dx_I$, $\varphi = \sum_J a_J dx_J$ e $\theta = \sum_K a_K dx_K$.

(1) Nel caso $\omega = dx_I$ ,$\varphi = dx_J$ e $\theta = dx_K$, allora questo è associativo poiché vale l'associatività per le 1 forme. Nel caso generale:

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \sum_{J,I,K} (a_I b_J) c_K (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K =$$

$$= \sum_{J,I,K} a_I (b_J c_K) dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta).$$

(2) Vediamo nel caso $\omega = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ e $\varphi = dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_k}$, in questo caso:

$$\omega \wedge \varphi = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_h} =$$

$$= (-1) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_h} =$$

$$= (-1)^h dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_h} \wedge dx_{i_k} =$$

$$= (-1)^{h(k-1)} dx_{i_1} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_h} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k} =$$

$$= (-1)^{kh} \varphi \wedge \omega.$$

Nel caso generale:

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} b_J a_I dx_I \wedge dx_J =$$

$$= (-1)^{kh} \sum_{I,J} b_J a_I dx_J \wedge dx_I = (-1)^{kh} \varphi \wedge \omega.$$

(3) $\omega\wedge(\varphi+\theta) = \sum_{I,K} a_I(b_K+c_K) dx_I \wedge dx_K = \sum_{I,K} (a_I b_K + a_I c_K) dx_I \wedge dx_K = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$.

□

Un'altra operazione molto importante è il cambiamento di coordinate, questo può esser espresso tramite un'operatore $^*$, vediamone la definizione.

DEFINITION 1.15. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile. Allora $f$ induce una mappa che prende delle forme esterne di grado $k$ di $\mathbb{R}^m$, e fornisce delle forme esterne di grado $k$ in $\mathbb{R}^n$, nella maniera seguente. Data una $k$ forma esterna $\omega$, in $\mathbb{R}^m$, definiamo $f^*\omega$ la $k$ forma di $\mathbb{R}^n$ definita da:

$$(f^*\omega)_p[v_1, ..., v_k] = \omega_{f(p)}[df_p[v_1], ..., df_p[v_k]],$$

dove $df_p[v] = D_f(p) \cdot v$, è detto differenziale di $f$ in $p$ e dove $D_f(p)$ è il vettore delle derivate parziali di $f$ calcolato in $p$. Quest'operazione è detta cambiamento di coordinate.

Vediamone qualche proprietà relativa anche alle operazioni definite precedentemente.

PROPOSITION 1.16. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Allora si ha:*

(1) *$f^*(\omega \wedge \varphi) = f^*\omega \wedge f^*\varphi$, dove $\omega, \varphi$ sono due forme esterne qualsiasi in $\mathbb{R}^m$.*
(2) *Data una funzione differenziabile $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ ed una forma esterna di $\mathbb{R}^m$, vale:$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e $\varphi = \sum_J a_J dx_J$ .

(1) calcoliamo $f^*\omega$ ed $f^*\varphi$, questa divengono:

$$(f^*\omega)_p[v_1, ..., v_k] = \sum_I a_I(f(p))dx_I[df_p[v_1], ..., df_p[v_k]],$$

equivalentemente:

$$(f^*\varphi)_p[v_1, ..., v_h] = \sum_J b_J(f(p))dx_J[df_p[v_1], ..., df_p[v_h]],$$

da cui:

$$(f^*\omega \wedge f^*\varphi)_p[v_1, ..., v_{h+k}] = \sum_{I,J} (a_I b_J)(f(p))[df_p[v_1], ..., df_p[v_{h+k}]] = f^*(\omega \wedge \varphi).$$

(2) Calcoliamo $(f \circ g)^*\omega$, questo è dato da:

$$\{(f \circ g)^*\omega\}_p[v_1, ..., v_k] = \sum_I a_I(f(g(p)))dx_I[d(f \circ g)_p[v_1], ..., d(f \circ g)[v_k]] =$$

ora $d(f \circ g)_p[v] = \sum_j \partial_j (f \circ g)_{|_p} v_j = \sum_{i,j} \partial_j f_{|_{g(p)}} \partial_j g_{i|_p} v_i = df_{g(p)}[dg_p[v]]$, il che implica:

$$= \sum_I f^*(a_I dx_I)_{g(p)}[dg_p[v_1], ..., dg_p[v_k]] = g^*(f^*\omega)_p[v_1, ..., v_k].$$

$\square$

Nel seguito indicheremo come 0-forme differenziali di $\mathbb{R}^n$, le funzioni $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenziabili. Proseguiamo con la trattazione definendo l'operatore di differenziazione esterna.

Definition 1.17. Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una 0-forma differenziale, definiamo il differenziale esterno di $g$, indicato con $dg$, come la 1-forma:

$$dg = \sum_i \partial_i g dx_i,$$

facciamo anzitutto notare che questa coincide con il differenziale utilizzato nella definizione di $^*$. Estendiamo questa definizione alle $k$ forme differenziali; data una forma differenziale $\omega = \sum_I a_I dx_I$, definiamo il suo differenziale esterno come:

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Vediamo infine le proprietà della differenziazione esterna.

Proposition 1.18. *Siano $\omega_1$ e $\omega_2$ una s-forma ed una k-forme, rispettivamente; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile.Allora valgono le seguenti:*

(1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

(2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^s \omega_1 \wedge d\omega_2$.

(3) $d(d\omega_1) = d^2\omega_1 = 0$.

(4) $d(f^*\omega_1) = f^* d\omega_1$.

Dimostrazione. Siano $\omega_i = \sum_{I_i} a^i_{I_i} dx_{I_i}$, inoltre facciamo notare che la prima proprietà vale solo nel caso $s = k$, procediamo con la dimostrazione:

(1) Consideriamo il caso in cui $\omega_1$ e $\omega_2$ siano due 0 forme, allora:

$$d(\omega_1 + \omega_2) = \sum_i \partial_i(\omega_1 + \omega_2)dx_i = \sum_i \partial_i \omega_1 dx_i + \sum_i \partial_i \omega_2 dx_i =$$

$$= d\omega_1 + d\omega_2.$$

Passiamo al caso generale:

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\left(\sum_I (a^1_I + a^2_I)dx_I\right) = \sum_I d(a^1_I + a^2_I) \wedge dx_I =$$

$$= \sum_I da^1_I \wedge dx_I + \sum_I da^2_I \wedge dx_I = d\omega_1 + d\omega_2.$$

(2) Poniamo $I = I_1$ e $J = I_2$.

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_{I,J} d(a^1_I a^2_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} \left(\sum_j \partial_j (a^1_I a^2_J) dx_j\right) \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$$= \sum_{I,J} \sum_j \left(\partial_j a^1_I a^2_J + \partial_j a^2_J a^1_I\right) dx_j \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} \sum_j \left(\partial_j a^1_I a^2_J\right) dx_j \wedge dx_I \wedge dx_J +$$

$$+(-1)^s \sum_{I,J} \sum_j \left(\partial_j a^2_J a^1_I\right) dx_I \wedge dx_j \wedge dx_J = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^s \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

(3) Sia $\omega = \sum_I a_I dx_I$, una k forma.

$$d(d\omega) = d\left(\sum_I da_I \wedge dx_I\right) = d\left(\sum_I \sum_i \partial_i a_I dx_i \wedge dx_I\right) =$$

$$= \sum_I \sum_{i,j} \partial_{ij} a_I dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i \neq j} \partial_{ij} a_I dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I +$$

$$+\sum_I \sum_i \partial_i^2 a_I dx_i \wedge dx_i \wedge dx_I =$$

utilizzando l'esercizio 1.4, otteniamo che $dx_i \wedge dx_i = 0$, dunque:

$$= \sum_I \sum_{i \neq j} \partial_{ij} a_I dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i<j} (\partial_{ij} a_I - \partial_{ji} a_I) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I,$$

per il teorema di Schwartz abbiamo $\partial_{ij} = \partial_{ji}$, da cui l'asserto.

(4) Sia $\omega$ come nel punto precedente e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile. Iniziamo nel caso k=0.

$$(f^* d\omega)_p[v_1] = \sum_i (\partial_i \omega)(f(p)) dx_i[df_p[v_1]] = \sum_{i,j} (\partial_i \omega)(f(p)) \partial_j f(p) v_j =$$

$$= \sum_i \partial_i (\omega \circ f)(p) dx_i[v_1] = d(f^* \omega)_p[v_1].$$

Nel caso generale:

$$f^*(d\omega) = f^* \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I f^* da_I \wedge f^* dx_I =$$

$$= \sum_I d(f^* a_I) \wedge f^* dx_I = d(f^* \omega).$$

□

Definition 1.19. Data $\omega$ una k forma di $\mathbb{R}^n$, definiamo: $*\omega$ ponendo $*\,(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}) = \varepsilon^{(i_1,...,i_k,j_1,...,j_{n-k})} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}}$ dove abbiamo che $i_1 < ... < i_k$, e $j_1 < ... < j_{n-k}$ tali che $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k}) \in \mathfrak{S}_n$, e la estendiamo per linearità. Dove con $\mathfrak{S}_n$ viene indicato il gruppo simmetrico di ordine $n$, ovvero il gruppo delle permutazioni su $n$ elementi[8]. Questa operazione è detta stella di Hodge. Inoltre abbiamo la seguente utile proprietà:

Lemma 1.20. *Data una k forma differenziale $\omega$ in $\mathbb{R}^m$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, vale:*

$$f^*(*\omega) = *(f^*\omega).$$

[8]Questo è l'insieme delle bijezioni da $\{1, ..., n\}$ in se stesso, che dotato dell'operazione di composizione costituisce un gruppo non abeliano di cardinale $n!$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\omega = \sum_I a_I dx_I$, allora $*(\omega) = \sum_I a_I \varepsilon^{J_I} dx_{J_I}$, dove denotiamo con $J_I = (j_1, ..., j_{m-k})$ tale che $j_1 < ... < j_{m-k}$ tali che $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{m-k}) \in \mathfrak{S}_m$,con $I = (i_1, ..., i_m)$. Dunque:

$$f^* *(\omega) = f^* \left( \sum_I a_I \varepsilon^{J_I} dx_{J_I} \right) = \sum_I \varepsilon^{J_I} f^* a_I \varepsilon^{J_I} f^* dx_{J_I} = \sum_I \varepsilon^{J_I} (f^* a_I) dy_{J_I} = *(f^* \omega).$$

$\square$

Concluse le operazioni, dobbiamo definire un'utile isomorfismo che esiste tra $\mathbb{R}^n_p$ e il suo duale $(\mathbb{R}^n_p)^*$, questo è detto isomorfismo canonico.

### 1.1.3. L'isomorfismo canonico.

DEFINITION 1.21. Definiamo L'Isomorfismo canonico, come l'applicazione indotta dal prodotto scalare canonico[9], $\prec \cdot, \cdot \succ$, definita da:

$$\psi : \mathbb{R}^n_p \to (\mathbb{R}^n_p)^* : v_p \mapsto \prec v, \cdot \succ .$$

L'Isomorfismo canonico prende un vettore $v$ di $\mathbb{R}^n_p$ e gli associa una 1 forma esterna $\omega$ data da $\omega(u) = \prec v, u \succ$. Se al posto di un vettore utilizzassimo un campo di vettori allora otterremmo una corrispondenza biunivoca tra campi di vettori in $\mathbb{R}^n$ e 1 forme differenziali in $\mathbb{R}^n$. Ovviamente è $\mathbb{R}$ lineare, infatti $\prec av + bw, \cdot \succ = a \prec v, \cdot \succ + b \prec w, \cdot \succ$. Come detto nel seguente:

LEMMA 1.22. *L'isomorfismo canonico $\psi$ è un isomorfismo, inoltre trasforma campi di vettori in 1-forme differenziali.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo lineare resta solo da mostrare che è biunivoca, fatto questo abbiamo che è un isomorfismo. Il fatto che porti campi di vettori in 1-

[9]Definito da $\prec \vec{v}, \vec{w} \succ = \sum_{i=1}^n v_i w_i$.

forme è ovvio, dato un campo di vettori $X = (x_1, ..., x_n)$,

$$\psi(X)_P[v] = \sum_i x_i(P)v_i = \sum_i x_i(P)dx_i[v].$$

Per quel che riguarda la biunivocità abbiamo che se esistessero due campi di vettori, $X = (x_1, ..., x_n)$ e $Y = (y_1, ..., y_n)$, tali che $\psi(X) = \psi(Y)$, allora, per ogni vettore $v$ vale:

$$\psi(X)[v] = \psi(Y)[v],$$

posto $v = e_i$, otteniamo:

$$x_i = y_i.$$

Resta da verificane la suriettività, data una 1 forma $\omega = \sum_i a_i dx_i$, posto $X = (a_1, ..., a_n)$ abbiamo che:

$$\psi(X)_p[v] = \sum_i a_i(p)v_i = \sum_i a_i(p)dx_i[v] = \omega_p[v].$$

Questo prova il lemma. $\square$

Dato un campo di vettori $v$ indicheremo la sua immagine, tramite l'isomorfismo canonico, con $\prec v \succ$.

## 1.2. Risoluzione degli esercizi.

Passiamo ora alla risoluzione degli esercizi del primo capitolo. Durante lo svolgimento di questi si è tentato di utilizzare unicamente le nozioni richiamate precedentemente. Qualora venassero utilizzati teoremi differenti o proprietà particolari esse saranno teoremi o proprietà di base delle funzioni o delle derivate. Si è tentato di rispettare fedelmente il testo degli esercizi come scritto nel Do Carmo, quindi potrebbero esser presenti definizioni di concetti date precedentemente.

Exercise. 1.1

Si provi che una forma bilineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è alternata se e solo se $\varphi(v, v) = 0$.

**Svolgimento:**

Se $\varphi$ è alternata abbiamo $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$ dunque $\varphi(v, v) = -\varphi(v, v) \implies \varphi(v, v) = 0$ . $\square$ Viceversa se

$$\varphi(v, v) = 0 \implies 0 = \varphi(v_1 + v_2, v_1 + v_2) =$$

$$= \varphi(v_1, v_1) + \varphi(v_1, v_2) + \varphi(v_2, v_1) + \varphi(v_2, v_2) =$$

$$\varphi(v_1, v_2) + \varphi(v_2, v_1) \implies \varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)\ .\ \square$$

EXERCISE. 1.2

Si provi che, date $i_1 < i_2 < ... < i_k$ e $j_1 < j_2 < ... < j_k$ , si ha che

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & se\ i_t = j_t\ \forall t \in 1, ..., k \\ 0 & in\ tutti\ gli\ altri\ casi \end{cases}$$

**Svolgimento:**

Per definizione di prodotto esterno abbiamo che

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \psi_k(v_1, ..., v_k) = det \begin{pmatrix} \psi_1(v_1) & ... & \psi_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_k(v_1) & ... & \psi_k(v_k) \end{pmatrix} (\star).$$

Inoltre per definizione di $dx_t$ abbiamo che $dx_t(e_h) = \delta_t^h$.

Supponiamo che $i_1 \neq j_1$, se $\exists i_t = j_1$allora, poiché $j_1$ è il più piccolo tra i $j_t$, per ogni t abbiamo $i_1 \neq j_t$ dunque $dx_{i_1}(e_{j_t}) = 0\,\forall t$ dunque $\bigwedge_{t=1}^{k} dx_{i_t}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 0$.

Se invece $\nexists t :\ i_t = j_1$ allora $dx_{i_t}(e_{j_1}) = 0\,\forall t$, il che vuol dire

$$\bigwedge_{t=1}^{k} dx_{i_t}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 0.$$

Supponiamo che fino a h-1 valga $i_t = j_t \; t \in \{1, ..., h-1\}$. Supponiamo inoltre che $i_h \neq j_h$ se $\exists i_t = j_h$allora, poiché $j_h$ è il più piccolo tra i $j_t$ con $t \geq h$, per ogni t abbiamo $i_h \neq j_t \; con \; t \geq h$ dunque $dx_{i_h}(e_{j_t}) = 0 \; \forall t$ dunque

$$\bigwedge_{t=1}^{k} dx_{i_t}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 1(\bigwedge_{t=h}^{k} dx_{i_t}(e_{j_h}, ..., e_{j_k})) = 0 \; ^2$$

.

Se invece $\nexists t : i_t = j_1$ allora $dx_{i_t}(e_{j_h}) = 0 \forall t \geq h$, il che vuol dire $\bigwedge_{t=1}^{k} dx_{i_t}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 1(\bigwedge_{t=h}^{k} dx_{i_t}(e_{j_h}, ..., e_{j_k})) = 0.$[10] Dunque se $i_t \neq j_t$abbiamo che $\bigwedge_{t=1}^{k} dx_{i_t}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 0$. Se $i_t = j_t \forall t$ allora, poiché $dx_t(e_h) = \delta_t^h$ , $\bigwedge_{t=1}^{k} dx_{i_t}(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) = det(I^k) = 1$. $\square$

Exercise. 1.3

Siano $\varphi$ e $\omega$, rispettivamente, una k forma differenziale ed una s forma differenziale. In funzione della base canonica possono esser scritte

$$\varphi = \sum_I a_I dx_I, \qquad I = (i_1, ..., i_k) \qquad i_1 < ... < i_k$$

$$\omega = \sum_J b_J dx_J \qquad J = (j_1, ..., j_s) \qquad j_1 < ... < j_s$$

Per definizione poniamo :

$$\varphi \wedge \omega = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J. \qquad (\star\star)$$

Si verifichi che $\wedge$così definita coincide con $\wedge$definita nella definizione nel caso di delle 1-forme, ovvero la definizione 1.3.

[10] La matrice che si ha se $i_t = j_t \; t \leq h-1$ è la seguente
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & dx_{ih}(e_{j_h}) & ... & dx_{i_h}(e_{j_k}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & dx_{i_k}(e_{j_h}) & ... & dx_{i_k}(e_{j_k}) \end{pmatrix}$$

**Svolgimento:**

Indicheremo con $\overline{\wedge}$ L'operazione definita da $(\star\star)$. Mostriamo prima nel caso di due uno forme. Siano dunque $\varphi$e $\omega$ due 1-forme.

$$\varphi \,\overline{\wedge}\, \omega[v_1, v_2] = a_1 b_2 dx_1 \wedge dx_2[v_1, v_2] + a_2 b_1 dx_2 \wedge dx_1[v_1, v_2]$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 \wedge dx_2[v_1, v_2] == Det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} Det(dx_i[v_j])$$

$$= Det \begin{pmatrix} \varphi[v_1] & \varphi[v_2] \\ \omega[v_1] & \omega[v_2] \end{pmatrix} = \varphi \wedge \omega[v_1, v_2]$$

Mostriamo l'associatività di $\overline{\wedge}$. Siano $\phi, \varphi$ et $\omega$ tre forme differenziali.

$$(\phi \,\overline{\wedge}\, \varphi) \,\overline{\wedge}\, \omega = (\sum_{I,K} c_K a_I dx_K \wedge dx_I) \,\overline{\wedge}\, \omega = \sum_{K,I,J} [(c_K a_I) b_J](dx_K \wedge dx_I) \wedge dx_J =$$

$$= \sum_{K,I,J} [c_K (a_I b_J)] dx_K \wedge (dx_I \wedge dx_J) = \phi \,\overline{\wedge}\, (\varphi \,\overline{\wedge}\, \omega).$$

In generale, supponiamo che valga per il prodotto di (k-1) 1-forme e prendiamo k 1-forme esterne: $\varphi_1, ..., \varphi_k$. Allora

$$\overline{\bigwedge}_{i=1}^{k} \varphi_i = (\overline{\bigwedge}_{i=1}^{k-1} \varphi_i) \,\overline{\wedge}\, \varphi_k = (\bigwedge_{i=1}^{k-1} \varphi_i) \,\overline{\wedge}\, \varphi_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(i_1, \ldots, i_{k-1}) \in \mathfrak{S}_{k-1}} [\varepsilon(i_1, ..., i_{k-1}) a_{i_1}^1 \cdots a_{i_{k-1}}^{k-1} a_i^k] dx_{i_1, \ldots, i_{k-1}} \wedge dx_i =$$

$$= \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathfrak{S}_k} [\varepsilon(i_1, ..., i_{k-1}) a_{i_1}^1 \cdots a_{i_k}^k] dx_{i_1, \ldots, i_k} = \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i.$$

Exercise. 1.4

Sia $\varphi$una k-forma differenziale, con k dispari. Si mostri che $\varphi \wedge \varphi = 0$.

**Svolgimento:**

Iniziamo con il caso delle 1-forme,

$$dx_i \wedge dx_i[v_1, v_2] = det \begin{pmatrix} dx_i[v_1] & dx_i[v_2] \\ dx_i[v_1] & dx_i[v_2] \end{pmatrix} = 0.$$

Dal quale deduciamo, per l'associatività, $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0$ se $\exists j \neq h \; tc \; i_j = i_h$. Sia $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ una 1-forma,

$$\varphi \wedge \varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i,j \leq k} a_i a_j dx_i \wedge dx_j =$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_i a_j - a_j a_i) dx_i \wedge dx_j + \sum_{i=1}^{k} a_i^2 dx_i \wedge dx_i =$$

$$\overset{dx_i \wedge dx_i = 0}{=} \sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_i a_j - a_j a_i) dx_i \wedge dx_j = 0$$

. Sia $\varphi$una k forma,

$$\varphi \wedge \varphi = \sum_{I,J \in \mathfrak{S}_n^k} a_I a_J dx_I dx_J = \sum_{\substack{I,J \in \mathfrak{S}_n^k \\ I \cap J = \emptyset}} a_I a_J dx_I dx_J$$

Consideriamo $a_I a_J dx_I \wedge dx_J$, oltre a questa nella somma sarà presente $a_J a_I dx_J \wedge dx_I = (-1)^{card(I) card(J)} a_I a_J dx_I \wedge dx_J = (-1)^{k^2} a_I a_J dx_I \wedge dx_J$ per via dell'alternanza, e come k è dispari otteniamo $a_J a_I dx_J \wedge dx_I = -a_I a_J dx_I \wedge dx_J$ dunque le coppie si elidono a vicenda e questo implica $\varphi \wedge \varphi = 0$.

Exercise. 1.5

Siano $\varphi, \psi$ e $\theta$ le seguenti forme in $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi = xdx - ydy,$$

$$\psi = z(dx \wedge dy) + x(dy \wedge dz),$$

$$\theta = zdy.$$

Si calcolino : $\varphi \wedge \psi$, $\theta \wedge \varphi \wedge \psi$, $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$.

**Svolgimento:**

$$\varphi\wedge\psi = xz(dx\wedge dy\wedge dx)+x^2(dx\wedge dy\wedge dz)-yz(dy\wedge dx\wedge xy)-yx(dy\wedge dy\wedge dz) = x^2 dx\wedge dy\wedge dz.$$

$$\theta \wedge (\varphi \wedge \psi) = zx^2 dy \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

$$d\varphi = dx \wedge dx - dy \wedge dy = 0.\ d\psi = 2dx \wedge dy \wedge dz.\ d\theta = -dy \wedge dz.$$

Exercise. 1.6

Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile. Supponiamo che m $<$ n e sia $\varphi$ una k-forma differenziabile in $\mathbb{R}^n$, con k $>$ m. Si mostri che $f^*\varphi = 0$.

**Svolgimento:**

$f^*\varphi[e_{i_1}, ..., e_{i_k}] = \sum_I a_I dx_I[df[e_{i_1}], ..., df[e_{i_k}]]$, come m<n,k, allora abbiamo che $\exists t \neq h :\ e_{i_h} = e_{i_t}$. Dunque

$$f^*\varphi[e_{i_1}, ..., e_{i_h}, ..., e_{i_t}, ..., e_{i_k}] = (-1)^{(t-h)} f{*}\varphi[e_{i_1}, ..., e_{i_t}, e_{i_h}, ..., e_{i_{t-1}}, e_{i_{t+1}}, ..., e_{i_k}] =$$

$$= (-1)^{2(t-h)-1} f^*\varphi[e_{i_1}, ..., e_{i_t}, ..., e_{i_h}, ..., e_{i_k}] = -f^*\varphi[e_{i_1}, ..., e_{i_h}, ..., e_{i_t}, ..., e_{i_k}]$$

dunque $f^*\varphi[e_{i_1}, ..., e_{i_h}, ..., e_{i_t}, ..., e_{i_k}] = 0$. Consideriamo ora dei vettori di $\mathbb{R}^m$ $v_1, ..., v_k$ tali che $v_j = \sum_{i=1}^m a^i_j e_i$.

$$f^*\varphi[v_1, ..., v_k] = f^*\varphi[\sum_{i=1}^m a^i_1 e_i, ..., \sum_{i=1}^m a^i_k e_i] = \sum_{i_1=1}^m ... \sum_{i_k=1}^m a^{i_1}_1 ... a^{i_k}_k f^*\varphi[e_{i_1}, ..., e_{i_k}] = 0$$

.

Exercise. 1.7

Sia $\omega$ la 2-forma in $\mathbb{R}^{2n}$ data da:

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + ... + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

Si calcoli $\bigwedge_{i=1}^n \omega$.

**Svolgimento:**

Iniziamo con il calcolare

$$\omega \wedge \omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_5 \wedge dx_6 + ...$$

$$... + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_6 + ...$$

$$...+dx_3\wedge dx_4\wedge dx_{2n-1}\wedge dx_{2n}...+dx_{2n-1}\wedge dx_{2n}\wedge dx_1\wedge dx_2+dx_{2n-1}\wedge dx_{2n}\wedge dx_3\wedge dx_4+...$$

$$... + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} \wedge dx_{2n-3} \wedge dx_{2n-4} = 2\sum_{i<j} dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}.$$

Ora calcoliamo

$$\omega \wedge \omega \wedge \omega = 6 \sum_{i<j<k} dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} \wedge dx_{2k-1} \wedge dx_{2k}.$$

Ora se facessimo il prodotto esterno un'altra volta, per ogni $0 < t \leq n$, otteniamo che

$$(dx_{2t-1}\wedge dx_t)\wedge\omega\wedge\omega\wedge\omega = (dx_{2t-1}\wedge dx_t)\wedge 6 \sum_{i<j<k} dx_{2i-1}\wedge dx_{2i}\wedge dx_{2j-1}\wedge dx_{2j}\wedge dx_{2k-1}\wedge dx_{2k}$$

in questa somma spariscono tutti i termini che già contenevano $dx_{2t-1}$, e rimangono solo quelli della forma

$$dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} \wedge dx_{2k-1} \wedge dx_{2k} \wedge dx_{2t-1} \wedge dx_t$$

con $i, j, k \neq t$. Considerando che per qualsiasi permutazione degli indici $i, j, k, t$ il segno rimane lo stesso, di questi termini nel prodotto esterno $\omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega$, per $i, k, j, t$ fissati, ce ne saranno quattro, uno generato dal prodotto

$$dx_{2t-1} \wedge dx_t \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

, uno dal prodotto

$$dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

, uno dal prodotto

$$dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

e l'ultimo dal prodotto

$$dx_{2k-1} \wedge dx_{2k} \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega$$

dunque raggruppando tutto e ordinando i,j,k,t ( tramite permutazioni ) in ordine crescente otteniamo

$$\omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega = 3! \sum_{i<j<k<t} 4dx_{2i-1} \wedge dx_{2i} \wedge dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} \wedge dx_{2k-1} \wedge dx_{2k} \wedge dx_{2t-1} \wedge dx_t.$$

Iterando il ragionamento otteniamo che $\bigwedge_{i=1}^{n} \omega = n! dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$.

Exercise. 1.8

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile definita da:

$$f(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n),$$

e sia $\omega = dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$. Si mostri che $f^*\omega = Det(df)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$.

**Svolgimento:**

$$f^*\omega[v_1, ..., v_n] = \omega[df[v_1], ..., df[v_n]] = Det(dy_i[df[v_j]]) = Det(df_i[v_j]) =$$

$$= Det(df \cdot (v_j^i)) = Det(df \cdot (dx_i[v_j])) = Det(df)Det(dx_i[v_j]) =$$

$$= Det(df)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n[v_1, ..., v_n].$$

Exercise. 1.9

Sia $\nu$ la n-forma in $\mathbb{R}^n$ definita da:

$$\nu[e_1, ..., e_n] = 1$$

Si mostri:

a) $\nu[v_1, ..., v_n] = vol[v_1, ..., v_n] = det(v_j^i)$ dove $v_j^i$ è l'i-esima componente di $v_j$

b) $\nu = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$

**Svolgimento:**

Poiché $\nu$ è un n forma allora sarà della forma $adx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, dunque $\nu[e_{i_1}, ..., e_{i_h}, ..., e_{i_k}, ..., e_{i_n}] = 0$ se $i_h = i_k$.

$$\nu[v_1, ..., v_k] = \nu[\sum_{i_1} a_{i_1} e_{i_1}, ..., \sum_{i_n} a_{i_n} e_{i_n}] =$$

$$= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \nu[e_{i_1}, ..., e_{i_n}] = \sum_{(i_1,...,i_n) \in \mathfrak{S}_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \nu[e_{i_1}, ..., e_{i_n}] =$$

$$= \sum_{(i_1,...,i_n) \in \mathfrak{S}_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \varepsilon^{(i_1,...,i_n)} \nu[e_1, ..., e_n] = \sum_{(i_1,...,i_n) \in \mathfrak{S}_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \varepsilon^{(i_1,...,i_n)} =$$

$$= Det(v_j^i) = Det(dx_i[v_j]) = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n[v_1, ..., v_n]$$

.

EXERCISE. 1.10

Data $\omega$une k forma di $\mathbb{R}^n$, definiamo:

$*\omega$ ponendo $*(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}) = \varepsilon^{(i_1,...,i_k,j_1,...,j_{n-k})} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}}$dove abbiamo che $i_1 < ... < i_k$, et $j_1 < ... < j_{n-k}$ tali che $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k}) \in \mathfrak{S}_n$, e la estendiamo per linearità.

Si calcoli $*\omega$ nei seguenti casi:

(1) Con $n = 3$ e $\omega = a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3$
(2) $n = 2$ e $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$
(3) $\omega = *\varphi$

**Svolgimento:**

1.

$$*\omega = a_{12}*(dx_1 \wedge dx_2) + a_{13}*(dx_2 \wedge dx_3) + a_{23}*(dx_2 \wedge dx_3) = a_{12}dx_3 - a_{13}dx_2 + a_{23}dx_1$$

2.

$$*\omega = a_1 dx_2 - a_2 dx_1$$

3.

$$*(*\varphi) = *(\sum_I a_I * dx_I) = \sum_I a_I * (\varepsilon^{(I\ J)} dx_{J(I)}) = \sum_I a_I \varepsilon^{(I\ J)} \varepsilon^{(J\ I)} dx_I =$$

$$= \sum_I (-1)^{k(n-k)} a_I dx_I = (-1)^{k(n-k)} \varphi.$$

EXERCISE. 1.11

Un campo di vettori differenziabile $v$ in $\mathbb{R}^n$ può essere considerato come un'applicazione differenziabile $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : p \mapsto v(p)$. Definiamo la funzione $div(v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come segue:

$$div(v) = \nabla \cdot v = Trac(dv_p)$$

(1) $div(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, ponendo $v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) e_i$.

(2) Sia $\omega$ la 1 forma associata a $v$ tramite l'isomorfismo canonico indotto da $\prec \cdot, \cdot \succ$, il prodotto scalare canonico, e sia $\nu$ il volume di un elemento di $\mathbb{R}^n$. Allora la divergenza può essere introdotta come:

$$v \mapsto \omega \mapsto *\omega \mapsto d(*\omega) = (div(v))\nu = (\nabla \cdot v)\nu.$$

**Svolgimento:**

(1) $dv_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (p)$ Dunque $div(v)[p] = Trac(dv_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(p)$.

(2) Sia $dx = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$. $\omega = \prec v, dx \succ = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, sia $I(i) = (1, ..., i-1, i+1, ..., n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$*\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i dx_{I(i)}$$

$$d(*\omega) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j) \wedge dx_{I(i)} = \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_{I(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\delta_j^i\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}dx = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)dx = (div(v))\nu.$$

Exercise. 1.12

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Definiamo il campo di vettori gradiente di $f$, come $\nabla f$ tale che

$$\prec \nabla f(p), u_p \succ = df_p[u_p] \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Si noti che $\nabla f$ è il campo di vettori corrispondente al $df$ tramite l'isomorfismo canonico.

(1) $\nabla f(p) = (\partial_1 f(p), ..., \partial_n f(p))$
(2) Se $p \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\nabla f(p) \neq 0$, allora il gradiente di $f$ è perpendicolare a $\mathcal{L}_{f(p)}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, f(x) = f(p)\}$.
(3) La mappa $df_p$ ristretta alla sfera unitaria con centro p, raggiunge il massimo in $\nabla f_p / |\nabla f_p|$.

**Svolgimento:**

1.$df_p[e_i] = \partial_i f(p)$ da cui $\nabla f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f)$.

2. Definiamo $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto (f(x) - f(p))$, come $f \in C^\infty$ abbiamo che $g \in C^\infty$, $g(p) = 0$ e, per il punto precedente abbiamo $\nabla g_p = \nabla f_p \neq 0$. (Supponiamo per semplicità $\partial_n f_p \neq 0$.) allora possiamo applicare il teorema di Dini.

Dunque sia $(p_1, ..., p_{n-1}, p_n)$, esiste un intorno di $(p_1, ..., p_{n-1})$, diciamolo $\mathcal{U}$, ed un unica $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto h(x)$ tale che $\forall x \in \mathcal{U}$ on a $g(x, h(x)) = 0$ et $h(p_1, ..., p_{n-1}) = p_n$. Abbiamo inoltre che come $g \in C^\infty$ anche $h$ è $C^\infty$.

Ed infine

$$\partial_i h(x) = -(\partial_n f(x, h(x)))^{-1}\partial_i f(x, h(x)).$$

Possiamo parametrizzare dunque $\mathcal{L}_{f(p)}f$ , in un intorno di $p$, tramite $\sigma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (x, h(x))$. Un vettore tangente in quest'intorno di $p$, può essere scritto come $v = \sum v_i \partial_i \sigma$,

$$\partial_i \sigma = (\delta_1^i, ..., \delta_{n-1}^i, -(\partial_n f(x, h(x)))^{-1}\partial_i f(x, h(x))),$$

dunque:

$$\prec v, \nabla\, f \succ = v_i \partial_i f - v_i (\partial_n f)^{-1}\partial_i f \partial_n f = 0$$

dunque per tutti i punti di $\mathcal{L}_{f(p)}f$ tali che il gradiente li calcolato non sia nullo abbiamo la perpendicolarità, nel caso il gradiente sia nullo allora è ovviamente perpendicolare a qualsiasi vettore.

3. L'applicazione $df_p[v]$ fornisce il modulo della proiezione di v su $\nabla\, f_p$, per il modulo del gradiente, ovviamente questa quantità è massima qualora la proiezione sia esattamente tutto il vettore v, dunque se il vettore è parallelo al gradiente ( ed equiverso), e trattandosi di un vettore unitario, ciò vuol dire che v= $\nabla\, f_p/|\nabla\, f_p|$.

Exercise. 1.13

Data una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiamo il Laplaciano di $f$, denotato $\Delta_2 f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e definito da

$$\Delta_2 f = div(\nabla\,(f)) = \nabla \cdot (\nabla\, f).$$

Si mostri che:

(1) $\Delta_2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}$,
(2) $\Delta_2(fg) = f\Delta_2 g + g\Delta_2 f + 2 \prec \nabla\, f, \nabla\, g \succ$
(3) $d(*(df)) = (\Delta_2 f)\nu$

**Svolgimento:**

(1) $\Delta_2 f = div(\nabla\,(f)) = div(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}) = \sum \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}$.

(2) $\Delta_2 fg = \sum \frac{\partial^2 (fg)}{(\partial x_i)^2} = \sum \left( g\frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} + 2\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial^2 g}{(\partial x_i)^2} \right) = \sum g\frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} + \sum 2\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum f\frac{\partial^2 g}{(\partial x_i)^2} =$

$$\sum g\frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} + \sum 2\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum f\frac{\partial^2 g}{(\partial x_i)^2} =$$

$$= g\sum \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} + 2\sum \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\sum \frac{\partial^2 g}{(\partial x_i)^2} = f\Delta_2 g + g\Delta_2 f + 2 \prec \nabla\, f, \nabla\, g \succ$$

(3) Sia $I(i) = (1, ..., i-1, i+1, ..., n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$d(*(df)) = d(*(\sum \partial_i f dx_i) = d(\sum (-1)^{i-1}\partial_i f dx_{I(i)}) = \sum_i (-1)^{i-1}(\sum_j \partial_{ij} f dx_j \wedge dx_{I(i)}) =$$

$$= \sum_i (-1)^{i-1}\partial_i^2 f dx_i \wedge dx_{I(i)} = \sum (-1)^{2(i-1)}\partial_i^2 f dx = \Delta_2 f \nu$$

EXERCISE. 1.14

Sia $v$ un campo di vettori su $\mathbb{R}^n$. Il rotore di $v$ è la n-2 forma definita da:

$$v \mapsto \omega \mapsto d\omega \mapsto *d\omega = \nabla \times\; v = rot(v)$$

dove $v \mapsto \omega$ è l'isomorfismo canonico. Si mostri che:

(1) $\nabla \times\; (\nabla\, v) = 0$

(2) Sia $n = 3$, la 1 forma costituita dal rotore corrisponde ad un campo di vettori $v$, denotato anch'esso $\nabla \times\; v$, dato da:

$$\nabla \times\; v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2)e_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3)e_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)e_3 \text{ posto } v = \sum v_i e_i$$

(3) Sia $n = 3$, allora $div(\nabla \times\; v) = 0$.

**Svolgimento:**

(1) $\nabla\times\ (\nabla\ v)=\nabla\times\ (\sum\partial_i ve_i)$.

$$\sum\partial_i ve_i\mapsto\sum\partial_i vdx_i\mapsto d(\sum\partial_i vdx_i)$$

$$=\sum_i\sum_j\partial_{ij}vdx_i\wedge dx_j\mapsto\nabla\times\ (\sum\partial_i ve_i)=*(\sum_i\sum_j\partial_{ij}vdx_i\wedge dx_j)=$$

$$==\sum_i\sum_j(-1)^{i+j+1}\partial_{ij}vdx_{I(i,j)}=\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}(\partial_{ij}v-\partial_{ji}v)dx_{I(i,j)}=0$$

(2) Sia $v=\sum_{i=1}^3 v_ie_i$,

$$v\mapsto\sum_i v^idx_i\mapsto\sum_{i,j}\partial_iv^jdx_i\wedge dx_j=\sum_i\sum_{j<i}(\partial_jv^i-\partial_iv^j)dx_j\wedge dx_i=$$

$$=(\partial_1v^2-\partial_2v^1)dx_1\wedge dx_2+(\partial_1v^3-\partial_3v^1)dx_1\wedge dx_3+$$

$$+(\partial_2v^3-\partial_3v^2)dx_2\wedge dx_3\mapsto*(\sum_i\sum_{j<i}(\partial_jv^i-\partial_iv^j)dx_j\wedge dx_i)=$$

$$=(\partial_2v_3-\partial_3v_2)dx_1+(\partial_3v_1-\partial_1v_3)dx_2+(\partial_1v_2-\partial_2v_1)dx_3.$$

Il campo di vettori associato risulta dunque: $\nabla\times\ v=(\partial_2v_3-\partial_3v_2)e_1+(\partial_3v_1-\partial_1v_3)e_2+(\partial_1v_2-\partial_2v_1)e_3$.

(3) Dalle formule per la divergenza calcolate nell'esercizio 1.11 e dal punto precedente otteniamo:

$$div(\nabla\times\ v)=\partial_{12}v^3-\partial_{13}v^2+\partial_{23}v^1-\partial_{21}v^3+\partial_{31}v^2-\partial_{32}v^1=0.$$

EXERCISE. 1.15

Un elemento $\varphi\in\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ è detto decomponibile se e solo se $\varphi=\bigwedge_{i=1}^k\varphi_i$, dove $\varphi_i, i\in\{1,...,k\}$, sono elementi linearmente indipendenti di $\Lambda^1(\mathbb{R}^n_p)^*\simeq(\mathbb{R}^n_p)^*$. Si provi che:

(1) Se $\varphi_i=\sum_i a^i_j\beta_j$, con $\beta_j\in(\mathbb{R}^n_p)*$ e $Det(a^i_j)=1$, allora $\bigwedge_{i=1}^k\varphi_i=\bigwedge_{i=1}^k\beta_i$. Dunque esiste più di una rappresentazione per una forma decomponibile.

(2) $\bigwedge_{i=1}^k\varphi_i=\bigwedge_{i=1}^k\beta_i=\varphi$, se ci sono due rappresentazioni di una stessa forma decomponibile, allora $\varphi_i=\sum_i a^i_j\beta_j$ con $Det(a^i_j)=1$.

(3) Se $\varphi$ è decomponibile, sia $\varphi = \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i$ una sua decomposizione, siano $v_i$ i vettori associati alle $\varphi_i$ tramite l'isomorfismo canonico. Allora $\mathcal{L}(v_1, ..., v_k)$, che non dipende dalla rappresentazione, è di dimensione $k$. Lo chiameremo il sottospazio associato a $\varphi$.

(4) Siano $\varphi, \varphi_i, v_i$ come sopra, il volume generato da $v_1, ..., v_k$ non cambia con la rappresentazione. Sarà chiamato il volume associato a $\varphi$.

(5) Se $\varphi$ è decomponibile, definiamo $*\varphi$ come l'elemento di $\Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n_p)*$ tale che :

- Il sottospazio associato a $*\varphi$ è ortogonale al sottospazio associato a $\varphi$.
- Il volume associato a $*\varphi$ è lo stesso associato a $\varphi$.
- $\varphi \wedge *\varphi$ è positivo se calcolato in una base positiva di $\mathbb{R}^n_p$.

Si provi che $*\varphi$ è ben definita.

(6) Siano $v_1, v_2$ due vettori di $\mathbb{R}^3$ e siano $\varphi_1$ e $\varphi_2$, le 1 forme associate a $v_1$ e $v_2$. Definiamo il prodotto vettoriale come la forma associata a $*(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Si descriva geometricamente il vettore $v_1 \times v_2$ associato a $*(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

(7) Una k forma $\omega$ di $\mathbb{R}^n$ è decomponibile se e solo se $\omega(p)$ è decomponibile per ogni $p$. Tutte le k forme in $\mathbb{R}^n$ sono combinazione lineare delle k forme decomponibili $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$. Si mostri che la definizione data sopra per $*$ coincide con quella dell'esercizio 1.10(, quella data dalla definizione 1.19).

**Svolgimento:**

(1) Siano $\varphi_i = \sum_j a^i_j \beta_j$, con $\beta_j \in (\mathbb{R}^n_p)^*$.

$$\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i = \bigwedge_{i=1}^k \sum_j a^i_j \beta_j = \sum_{i_1,...,i_k} \varepsilon^{(i_1,...,i_t)} (\prod_t a^{i_t}_j) \bigwedge_{i=1}^k \beta_j = Det(a^t_j) \bigwedge_{i=1}^k \beta_i.$$

come $Det(a^t_j) = 1$, abbiamo $\bigwedge_{j=1}^k \beta_j = \bigwedge_{j=1}^k \varphi_j$.

(2) L'insieme $\{\beta_1, ..., \beta_k\}$ è un sottoinsieme libero di $(\mathbb{R}^n_p)^*$, dunque può essere esteso ad una base, sia questa $\{\beta_1, ..., \beta_k, \alpha_1, ..., \alpha_{n-k}\}$. Possiamo scrivere $\varphi_i = \sum_j a^i_j \beta_j + \sum_j b^i_j \alpha_j$. Consideriamo $\bigwedge_{j=1}^k \beta_j \wedge \varphi_i = \bigwedge_{j=1}^k \varphi_j \wedge \varphi_i = 0$,

dunque:

$$0 = \bigwedge_{j=1}^{k} \beta_j \wedge (\sum_j a^i_j \beta_j + \sum_j b^i_j \alpha_j) = \bigwedge_{j=1}^{k} \beta_j \wedge \sum_j a^i_j \beta_j + \bigwedge_{i=1}^{k} \beta_j \wedge \sum_j b^i_j \alpha_j =$$

$$= \sum_t \bigwedge_{j=1}^{k} \beta_j \wedge a^i_t \beta_t + \sum_t \bigwedge_{i=1}^{k} \beta_j \wedge b^i_t \alpha_t = \sum_t b^i_t \bigwedge_{i=1}^{k} \beta_j \wedge \alpha_t,$$

come $\{\beta_1, ..., \beta_k, \alpha_1, ..., \alpha_{n-k}\}$ è libero otteniamo $b^i_j = 0$. Dunque $\varphi_i = \sum_j a^i_j \beta_j$. Poi

$$\bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j = \bigwedge_{i=1}^{k} \sum_j a^i_j \beta_j = Det(a^i_j) \bigwedge_{j=1}^{k} \beta_j$$

dunque $Det(a^i_j) = 1$.

(3) Noteremo $\psi$ l'isomorfismo canonico. Supponiamo che $v_1, ..., v_k$ siano linearmente dipendenti, allora $\exists a_1, ..., a_{k-1} \in \mathbb{R}$ tali che siano non tutti nulli e $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} a_j v_j$, applicando $\psi^{-1}$ otteniamo: $\varphi_k = \sum_{j=1}^{k-1} a_j \varphi_j$, assurdo. Dunque sono linearmente indipendenti, il che prova che $dim(\mathcal{L}(v_1, ..., v_k)) = k$. Siano $w_i$ i vettori associati alle $\beta_i$, questi sono linearmente indipendenti per quanto visto prima,

$$v_i = \psi^{-1}(\varphi_i) = \psi^{-1}(\sum_i a^i_j \beta_j) = \sum_j a^i_j \psi^{-1}(\beta_j) = \sum_j a^i_j w_j$$

, abbiamo che l'insieme $\{w_1, ..., w_k\}$ è libero e di generatori per $\mathcal{L}(v_1, ..., v_k)$ , dunque è una base, il che implica $\mathcal{L}(v_1, ..., v_k) = \mathcal{L}(w_1, ..., w_k)$. Dunque non dipende dalla rappresentazione.

(4) Sia $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i$ , una qualsiasi altra rappresentazione , per quanto dimostrato nel punto 2, è e della forma $\bigwedge_{i=1}^{k} \beta_i$, dove i $\beta_i$sono tali che $\varphi_j = \sum_i a^j_i \beta_i$ e $Det(a^i_j) = 1$.

$$\nu(v_1, ..., v_k) = \nu(\sum_i a^1_i w_i, ..., \sum_i a^k_i w_i) = Det(\sum_t a^i_t w^j_t) = Det((w^i_j)(a^t_i)) =$$

$$= Det(a^i_j) Det(w^i_j) = Det(w^i_j) = \nu(w_1, ..., w_k).$$

(5) Dobbiamo dimostrarne l'esistenza e l'unicità. Siano $g_i$ i vettori associati a $\varphi_i$, poniamo $W = \mathcal{L}(v_1, ..., v_k)$ e $v$ il volume di $\varphi$. Consideriamo una base ortonormale di $W^{\perp}$: $g_{k+1}, ..., g_n$, tale che $\{g_1, ..., g_k, g_{k+1}, ..., g_n\}$una base positiva di $\mathbb{R}^n_p$. Definiamo $\varphi_j$, per $k < j \leq n$, come le uno forme associate a $e_j$ tramite l'isomorfismo canonico. Sia $\phi = v \bigwedge_{i=k+1}^{n} \varphi_i$, il sottospazio associato a $\phi$ è ovviamente perpendicolare a quello associato a $\varphi$, per come sono stati scelti i vettori $g_{k+1}, ..., g_n$. Inoltre per l'unicità del sottospazio ortogonale e per il fatto che a ciascuna forma è associato, in maniera biunivoca, un sottospazio otteniamo l'unicità. Rimangono da verificare gli altri due punti.

$$vol(\phi) = \nu(vg_{k+1}, ..., g_n) = v\nu(g_{k+1}, ..., g_n) = v \cdot 1 = v = vol(\varphi).$$

Infine resta da verificare che $\varphi \wedge \phi[g_1, ..., g_n] > 0$. Ci basta verificarlo con $g_1, ..., g_n$ perché è, per costruzione, una base positiva di $\mathbb{R}^n_p$.

$$\varphi \wedge \phi[g_1, ..., g_n] = v\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n[g_1, ..., g_n] = vdet(\varphi_i[g_j]).$$

Come $g_{k+1}, ..., g_n \in W^{\perp}$ allora otteniamo:

$$\varphi_i[g_j] = \prec g_i, g_j \succ = 0, \qquad i \leq k,\ j > k.$$

e allo stesso modo:

$$\varphi_j[g_i] = \prec g_j, g_i \succ = 0, \qquad i \leq k,\ j > k.$$

Inoltre dato che $g_{k+1}, ..., g_n$ sono ortonormali:

$$\varphi_j[g_i] == \prec g_i, g_j \succ = \delta^i_j \qquad i, j > k.$$

Scrivendo la matrice $(\varphi_i[g_j])_{i,j\in\{1,..,n\}}$,otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1[g_1] & \cdots & \varphi_1[g_k] & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_k[g_1] & \cdots & \varphi_k[g_k] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\varphi \wedge \phi[g_1, ..., g_n] = vdet(\varphi_i[g_j])_{i,j\in\{1,..,n\}} = vdet(\varphi_i[g_j])_{i,j\in\{1,..,k\}} = v^2 > 0.$$

Il che prova l'esistenza di $*\varphi = \phi$, e l'unicità.

(6) Per come abbiamo costruito $*(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, sappiamo che $v_3 = v_1 \times v_2$ è un generatore dello spazio ortogonale a $\mathcal{L}(v_1, v_2)$, dunque ortogonale ad entrambi. Inoltre:

$$vol(*(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = \prec v_3, v_3 \succ = ||v_3||^2 = vol(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = det(\prec v_i, v_j \succ)_{i,j\in\{1,2\}}.$$

Infine la terna $v_1, v_2, v_3$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$. E con quest'ultimo commento abbiamo completato la descrizione geometrica fornendo modulo, direzione e verso di $v_3$.

(7) Consideriamo $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$, i vettori associati ai $dx_{i_j}$ sono gli $e_{i_j}$, vettori della base canonica, il sottospazio ortogonale è dunque generato dai restanti vettori della base, $e_{j_1}, ..., e_{j_{n-k}}$. A quest'ultimi sono associate le 1-forme $dx_{j_1}, ..., dx_{j_{n-k}}$. Considerando che

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}}[e_1, ..., e_n] = (-1)^{\varsigma(i_1,...,i_k,j_1,...,j_{n-k})}.$$

E che noi vogliamo

$$(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}) \wedge *(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})[e_1, ..., e_n] > 0.$$

Ponendo

$$*(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}) = (-1)^{\varsigma(i_1,...,i_k,j_1,...,j_{n-k})} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{n-k}},$$

otteniamo che rispetta le tre proprietà richieste e inoltre coincide con la definizione di $*(\cdot)$ data precedentemente.

Exercise. 1.16 ( Lemma di Poincaré per le 1 forme.) Sia

$$\omega(x,y,z) = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

una 1 forma differenziabile di $\mathbb{R}^3$ tale che $d\omega = 0$. Definiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, come

$$f(x,y,z) = \int_0^1 a(tx,ty,tz)x + b(tx,ty,tz)y + c(tx,ty,tz)zdt.$$

Si mostri che $df = \omega$. (Questo significa che la condizione $d\omega = 0$ è sufficiente, in $\mathbb{R}^3$, a determinare l'esistenza di una $f$ tale che $df = \omega$.Il risultato vale in $\mathbb{R}^n$, la scelta di $\mathbb{R}^3$ è solo per comodità di notazione. Inoltre se $\omega$ è definita su un insieme aperto $U$ allora il risultato è valido per un intorno di ciascun $p \in U$. )

**Svolgimento:**

Il fatto che $d\omega = 0$, implica:

$$d\omega = (\partial_1 b - \partial_2 a)dx \wedge dy - (\partial_3 a - \partial_1 c)dx \wedge dz + (\partial_2 c - \partial_3 b)dy \wedge dz = 0.$$

Da cui deduciamo:

$$\partial_1 b = \partial_2 a;\ \partial_3 a = \partial_1 c;\ \partial_2 c = \partial_3 b;$$

Consideriamo la seguente identità:

$$a(x,y,z) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(a(tx,ty,tz))dt =$$

$$= \int_0^1 a(tx,ty,tz)dt + \int_0^1 t(\partial_1 a \cdot x + \partial_2 a \cdot y + \partial_3 a \cdot z)dt. \qquad (a)$$

Lo stesso vale per b e c.

$$\omega = (\int_0^1 a(tx,ty,tz)dt + \int_0^1 t(\partial_1 a \cdot x + \partial_2 a \cdot y + \partial_3 a \cdot z)dt)dx +$$

$$+(\int_0^1 b(tx,ty,tz)dt + \int_0^1 t(\partial_1 b \cdot x + \partial_2 b \cdot y + \partial_3 b \cdot z)dt)dy +$$

$$+(\int_0^1 c(tx,ty,tz)dt + \int_0^1 t(\partial_1 c \cdot x + \partial_2 c \cdot y + \partial_3 c \cdot z)dt)dz =$$

posto $p = (x,y,z)$ e utilizzando $(a)$:

$$= \int_0^1 (a(tp))dtdx + \int_0^1 (b(tp))dtdy + \int_0^1 (c(tp))dtdz +$$

$$+ \int_0^1 t\partial_1(a+b+c)dtdx + \int_0^1 t\partial_2(a+b+c)dtdy + \int_0^1 t\partial_3(a+b+c)dtdz =$$

$$= \int_0^1 (a(tp) + t\partial_1(a+b+c)dtdx + \int_0^1 (b(tp) + t\partial_2(a+b+c)dtdy +$$

$$\int_0^1 (c(tp) + t\partial_3(a+b+c)dtdz = df.$$

EXERCISE. 1.17 Diremo che un campo di vettori $v$, definito su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, è **la derivata locale di un potenziale** o **ammette un potenziale locale** in $U$ se per ogni $p \in U$ esiste un intorno $p \in V \subseteq U$ ed una funzione $g : V \to \mathbb{R}$ (chiamata **potenziale**) tale che $v = \nabla\, g$.

(1) Sia $v$ un campo di vettori come sopra, e sia $\omega$ la forma differenziale associata a $v$ tramite l'isomorfismo canonico. Si mostri che $v$ ha un potenziale locale se e solo se $d\omega = 0$.

(2) Si mostri che $v$ ha un potenziale locale se e solo se $\nabla \times\ v = 0$.

(3) Sia $v$ il campo di vettori ( attrazione elettrica) :

$$v = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z), \quad p \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}.$$

Si mostri che ha come potenziale locale:

$$g = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + c, \quad con\, c \in \mathbb{R}.$$

e che $\Delta_2 g = 0$.

**Svolgimento:**

(1) Sia $v = \sum_i a_i e^i$, quindi abbiamo che $\omega = \sum_i a_i dx_i$. Supponiamo prima di tutto che $d\omega = 0$ in tutto $U$. Sia $p = (x_0, y_0, z_0) \in U$, come $U$ è un aperto allora esiste $V = B_r(p) \subseteq U$. Sia $g = \int_0^1 \sum_i a_i((1-t)p + tq)x_i dt$, questa è una funzione da $V$ in $\mathbb{R}$.

$$\partial_i g = \int_0^1 \sum_j \partial_i (a_j((1-t)p + tq)x_i)dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_j (a_j((1-t)p + tq))\delta_i^j dt + \int_0^1 \sum_j t\partial_i (a_j((1-t)p + tq))dt.$$

Il fatto che $d\omega = 0$ implica che:

$$\partial_i a_j = \partial_j a_i.$$

Utilizzando quest'informazione otteniamo:

$$\partial_i g = \int_0^1 (a_i((1-t)p + tq))dt + \int_0^1 \sum_j t\partial_j (a_i((1-t)p + tq))dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} a_i dt = a_i.$$

Dunque resta dimostrato che $d\omega = 0$ implica l'esistenza di un potenziale. Sia $g$ un potenziale di $v$, allora abbiamo che $\partial_{ij} g = \partial_{ji} g$ per il teorema di Schwartz. $\partial_j v_i = \partial_{ji} g = \partial_{ij} g = \partial_i v_j$, il che vuol dire $d\omega = 0$.

(2) $\nabla \times\ v = *(d\omega)$, dunque questo è nullo se e solo se $d\omega = 0$, dunque se e solo se $v$ ammette potenziale locale.

(3) Per trovare $g$, osserviamo che

$$\partial_i g = v_i = \frac{-x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{3/2}}, \qquad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Integrando in $x_i$ otteniamo:

$$g = \frac{1}{(\sum_i x_i^2)^{1/2}} + h_i,$$

dove $h_i$ non dipende da $x_i$, ma abbiamo che per ogni $i, j$ $h_i = h_j$, derivando otteniamo che $\partial_j h_i = 0$ per tutti i $j$, dunque $h_i = c \in \mathbb{R}$. Resta da mostrare che $\Delta_2 g = 0$.

$$\partial_i^2 g = \frac{-6x_i^2}{2\left(\sum_j x_j^2\right)^{5/2}} + \frac{\left(\sum_j x_j^2\right)}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{5/2}}.$$

$$\Delta_2 g = \sum_i \partial_i^2 g = \sum_{i=1}^{3} \left( \frac{-3x_i^2}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{5/2}} + \frac{\left(\sum_j x_j^2\right)}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{5/2}} \right) = 0.$$

Exercise. 1.18

Una funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è detta **omogenea di grado k** se e solo se $g(tx, ty, tz) = t^k g(x, y, z)$, $t>0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si provi che:

(1) Se $g$ è differenziabile ed omogenea di grado k, allora abbiamo (la relazione di Eulero):

$$x\partial_1 g + y\partial_2 g + z\partial_3 g = kg.$$

(2) Se la forma differenziale

$$\omega = adx + bdy + cdz$$

è tale che $a, b, c$ siano omogenee di grado k e $d\omega = 0$, allora esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $df = \omega$, con

$$f = \frac{ax + by + cz}{k+1} + k. \quad k \in \mathbb{R}.$$

(3) Se la 2 forma differenziale

$$\sigma = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy.$$

è omogenea di grado k e $d\sigma = 0$, allora esiste una 1 forma $\gamma$ tale che $\sigma = d\gamma$, dove

$$\gamma = \frac{(zb - yc)dx + (xc - za)dy + (ya - xb)dz}{k+2}.$$

**Svolgimento:**

(1) Come $g$ è omogenea abbiamo che

$$g(tx, ty, tz) = t^k g(x, y, z).$$

Derivando entrambi i membri per $t$ otteniamo:

$$kt^{k-1}g(x, y, z) = \frac{d}{dt}g(tx, ty, tz) = x\partial_1 g(tx, ty, tz) + y\partial_2 g(tx, ty, tz) + z\partial_3 g(tx, ty, tz).$$

Questa vale per tutti i $t$ positivi dunque anche per $t = 1$, il che implica:

$$x\partial_1 g + y\partial_2 g + z\partial_3 g = kg.$$

(2) Il fatto che $d\omega = 0$ implica:

$$\partial_1 b = \partial_2 a;\ \partial_3 a = \partial_1 c;\ \partial_2 c = \partial_3 b; \quad (0)$$

Supponiamo che esista una tale $f$ otteniamo:

$$df = \partial_1 f dx + \partial_2 f dy + \partial_3 f dz.$$

Che implica:

$$\begin{cases} \partial_1 f = & a \quad (1) \\ \partial_2 f = & b \quad (2) \\ \partial_3 f = & c \quad (3) \end{cases}$$

Sfruttando il fatto che $a$ è omogenea di grado k e la (1) otteniamo:

$$\partial_1 f = a = \frac{1}{k}(x\partial_1 a + y\partial_2 a + z\partial_3 a).$$

Sfruttando la (0) :

$$\partial_1 f = \frac{1}{k}(x\partial_1 a + y\partial_2 a + z\partial_3 a) = \frac{1}{k}(x\partial_1 a + y\partial_1 b + z\partial_1 c) =$$

$$= \frac{1}{k}(x\partial_1 a + a + y\partial_1 b + z\partial_1 c) - \frac{a}{k} = \frac{1}{k}(x\partial_1 a + a + y\partial_1 b + z\partial_1 c) - \frac{\partial_1 f}{k}.$$

Che implica:

$$(k+1)\partial_1 f = \partial_1(xa) + \partial_1(yb) + \partial_1(zc).$$

Da cui:

$$(k+1)f = (xa + yb + zc) + H(y,z).$$

Ripetendo il ragionamento con $b$ e $c$ otteniamo:

$$(k+1)f = (xa + yb + zc) + T(x,z)$$

$$(k+1)f = (xa + yb + zc) + G(y,x).$$

Da cui si deduce che $H = G = T \in \mathbb{R}$.

(3) Iniziamo con considerare il fatto che $d\sigma = 0$, questo vuol dire:

$$0 = d\sigma = (\partial_1 a - \partial_2 b + \partial_3 c)dx \wedge dy \wedge dz.$$

da cui

$$\partial_1 a + \partial_2 b + \partial_3 c = 0. \quad (0)$$

Supponiamo che esista $\gamma = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$ tale che $d\gamma = \omega$.

$$d\gamma = (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)dx \wedge dy + (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2)dy \wedge dz + (\partial_1 a_3 - \partial_3 a_1)dx \wedge dz.$$

Da cui:

$$\begin{cases} \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 & = c \quad (1) \\ \partial_2 a_3 - \partial_3 a_2 & = -a \quad (2) \\ \partial_1 a_3 - \partial_3 a_1 & = -b \quad (3) \end{cases} \tag{1.2.1}$$

da (1), sfruttando il fatto che $a$ è omogenea, otteniamo:

$$ka = x\partial_1 a + y\partial_2 a + z\partial_3 a = -2a + 2a + x\partial_1 a + y\partial_2 a + z\partial_3 a.$$

$$\Updownarrow$$

$$(k+2)a = x\partial_1 a + \partial_2(ya) + \partial_3(za),$$

in maniera simile si deduce che:

$$(k+2)b = y\partial_2 b + \partial_1(xb) + \partial_3(zb),$$

$$(k+2)c = z\partial_3 c + \partial_1(xc) + \partial_2(yc).$$

Posti:

$$a_1 = \frac{(zb-yc)}{k+2}, \quad a_2 = \frac{(xc-za)}{k+2}, \quad a_3 = \frac{(ya-xb)}{k+2},$$

mostriamo che essi sono una soluzione del sistema di equazioni differenziali (1.2.1) e questo concluderà l'esercizio.

$$\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 = \frac{1}{k+2}\left(\partial_1(xc) - \partial_1(za) - \partial_2(zb) + \partial_2(yc)\right) =$$

$$= \frac{1}{k+2}\left(\partial_1(xc) + \partial_2(yc) - z(\partial_1 a + \partial_2 b)\right) = \frac{1}{k+2}\left(\partial_1(xc) + \partial_2(yc) + z\partial_3 c\right) =$$

$$= \frac{k+2}{k+2}c = c.$$

In maniera simile si verificano le altre due equazioni:

$$\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2 = \frac{1}{k+2}\left(\partial_2(ya) - \partial_2(xb) + \partial_3(za) - \partial_3(xc)\right) =$$

$$= \frac{1}{k+2}\left(\partial_2(ya) + \partial_3(za) + x(-\partial_2 b - \partial_3 c)\right) = \frac{k+2}{k+2}a = a.$$

$$\partial_1 a_3 - \partial_3 a_1 = \frac{1}{k+2}\left(\partial_1(ya) - \partial_1(xb) - \partial_3(zb) + \partial_2(yc)\right) =$$

$$= -\frac{1}{k+2}\left(\partial_1(xb) + \partial_3(zb) - y(\partial_1 a + \partial_2 c)\right) = -\frac{k+2}{k+2}b = -b.$$

CAPITOLO 2

# Integrali di linea.

Lo scopo delle forme differenziali è quello di essere integrate. Lo sviluppo generale di questo argomento avverrà più avanti nella trattazione, dopo aver discusso sul "habitat" delle forme differenziali. In questo capitolo vedremo un caso particolare, ovvero l'integrazione di forme differenziali di grado uno lungo una curva. Questo caso, per quanto assai restrittivo, ci permette di introdurre il caso generale. Passiamo ora a definire gli strumenti che utilizzeremo durante lo svolgimento degli esercizi. Lungo questo capitolo, qualora non sia specificato o non sia ambiguo, per questioni di praticità, visto che opereremo unicamente con uno forme, omettiamo il grado delle forme differenziali sottintendendo che questo sia uno.

## 2.1. Definizioni e teoremi sull'integrazione di forme lungo una curva.

### 2.1.1. Curve ed integrali su curve in $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION 2.1. Una curva in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tale che sia continua. Una curva è detta differenziabile a tratti, o a pezzi, se e solo se $\gamma(t)$ è differenziabile in $[a,b]$ eccetto, al più un numero finito di punti, ove è differenziabile a destra ed a sinistra. Definiamo la traccia di $\gamma(t)$ come l'insieme $\gamma = \gamma([a,b])$. Diremo, infine, che $\gamma$ è parametrizzata con la lunghezza d'arco, o ascissa curvilinea, $s$ se e solo se $||\gamma'||(s) = 1$.

DEFINITION 2.2. Un cambio di parametri , per una curva $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{R}^n$, è un'applicazione differenziabile che sia anche un omeomorfismo[1], $c : [a',b'] \to [a,b]$.

[1]Continua con inversa continua.

Diremmo che questo preserva l'orientazione, o che è positivo, se e solo se questa è crescente, in caso contrario si dirà che inverte l'orientazione, o che è negativo.

Supponiamo di avere una uno forma differenziale $\omega$ definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$, e consideriamo una curva definita sullo stesso. Vorremmo definire l'integrale di $\omega$ lungo la curva.

DEFINITION 2.3. Data una uno forma differenziale $\omega$ su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ed una curva $\gamma$, differenziabile a tratti, definita in $U$, definiamo l'integrale di $\omega$ lungo $\gamma$ come:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j\in J} \int_{t_j}^{t_{j+1}} c_j^* \omega.$$

Dove $\{t_j\}_{j\in J}$ è l'insieme dei punti dove $c$ non è differenziabile, tali che $t_j < t_{j+1}$, e $c_j = c_{|_{[t_j, t_{j+1}]}}$. [2]

In questa definizione vi è però una cosa da verificare; infatti, per quanto tutto sembri chiaro e ben definito, dobbiamo esser certi che l'integrale di una forma differenziale, lungo la stessa curva percorsa nel medesimo verso, sia lo stesso; in altri termini, che l'integrale non cambi con un cambi di parametri positivo. Questo ci è dato dal seguente:

LEMMA 2.4. *Sia $\gamma(t)$ una curva contenuta in un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $\omega$ una forma differenziale su $U$ ed infine, sia $\varphi$ un cambio di parametri. Allora abbiamo che:*

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(\varphi(t))} \omega,$$

*se $\varphi$è un cambio di parametri positivo, qualora fosse negativo abbiamo:*

$$\int_{\gamma(t)} \omega = -\int_{\gamma(\varphi(t))} \omega.$$

[2]Per esser chiari se $c = (x_1(t), ..., x_n(t))$ e $\omega = \sum_i a_i dx_i$; allora $c_j^*\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x_1(t), ..., x_n(t)) \frac{dx_i}{dt} dt$.

Dimostrazione. Sia $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ e $\omega = \sum_i a_i dx_i$; dato un cambio di parametri $\varphi : [c, d] \to [a, b]$, tale che sia una riparametrizzazione negativa, abbiamo che:

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(x_1(t), ..., x_n(t)) \frac{dx_i}{dt} dt =$$

$$= \int_d^c \sum_{i=1}^n a_i(x_1(\varphi(\tau)), ..., x_n(\varphi(\tau))) \frac{dx_i}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau = -\int_{\gamma(\varphi(t))} \omega.$$

nel caso di riparametrizzazione positiva si procede in maniera analoga, con l'unica differenza che nel terzo passaggio $\int_d^c$ è sostituito da $\int_c^d$ e dunque nell'ultimo passaggio non vi sarà il segno meno. □

Nel seguito denoteremo $\gamma$ la traccia della curva $\gamma(t)$ e $-\gamma$ la traccia della curva percorsa in senso opposto. Dopo questa piccola finestra sulla notazione, andiamo ora a definire una forma differenziale esatta e di forma differenziale chiusa, ed a trovare delle condizioni necessarie e sufficienti perché una forma differenziale lo sia.

### 2.1.2. Forme differenziali chiuse ed esatte.

Definition 2.5. Sia $\omega$ una forma differenziale definita su $U$. Questa è detta esatta in un aperto $V \subseteq U$, se e solo se esiste una funzione differenziabile, $f : V \to \mathbb{R}$, tale che $\omega = df$ in $V$. Mentre è detta chiusa se e solo se $d\omega = 0$.

D'ora in avanti $\omega = \sum_i a_i dx_i$ sarà una forma differenziale definita in un aperto $U$ di $\mathbb{R}^n$. Vediamo delle condizioni necessarie e sufficienti perché una forma differenziale sia esatta.

Proposition 2.6. *Data $\omega$, le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(1) *$\omega$ è esatta in un aperto connesso $V \subseteq U$.*
(2) *$\int_\gamma \omega$ dipende unicamente dai punti iniziali e finali di $\gamma \subseteq V$.*
(3) *l'integrale lungo una curva chiusa $\gamma \subseteq V$, denotato $\oint_\gamma \omega$, è nullo.*

Dimostrazione. Se $\omega$ è esatta in un aperto connesso $V$, allora in $V$ vale $\omega = df$, da cui, data una curva $\gamma : [a, b] \to V$, otteniamo:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = \int_a^b \gamma^* df = \int_a^b d(\gamma^* f) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

dunque (1) $\implies$ (2). Supponiamo che valga (2). Una curva chiusa $\gamma$ può essere scritta come unione di due curve, $\delta$ e $\beta$, una che va da $\gamma(a)$ ad un certo $\gamma(c)$ e l'altra che va da $\gamma(c)$verso $\gamma(a)$, risp. Dunque $-\beta$ va da $\gamma(a)$ a $\gamma(c)$, per ipotesi:

$$\int_\delta \omega = \int_{-\beta} \omega = -\int_\beta \omega,$$

da cui, per la linearità dell'integrale:

$$\oint_\gamma \omega = \int_\delta \omega + \int_\beta \omega = 0.$$

Quindi (2) $\implies$ (3). Per concludere è sufficiente mostrare che (3) $\implies$ (1). Che (3) $\implies$ (2) è ovvio per quanto detto precedentemente, quindi è sufficiente dimostrare che (2) $\implies$ (1) e la proposizione è dimostrata. Fissiamo un punto $p \in V$, per ogni punto $x \in V$, poiché $V$ è un aperto connesso in $\mathbb{R}^n$[3], esiste una curva $\gamma^x$ che unisce $p$ a $x$, poiché l'integrale di $\omega$ dipende unicamente dai punti iniziali e finali della curva, resta ben definita:

$$f(x) = \int_{\gamma^x} \omega,$$

per concludere la dimostrazione è sufficiente mostrare che $\partial_i f = a_i$, in quanto $df = \sum_i \partial_i f dx_i$. Consideriamo la curva

$$c_i(t) = x + te_i, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

con $\varepsilon$ abbastanza piccolo per permettere a $(x + te_i) \in V$, dunque:

$$\partial_i f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{f(x + te_i) - f(x)\} =$$

[3] E dunque, connesso per archi. Questo fatto non verrà dimostrato.

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{ \int_{\gamma^x \cup c_i} \omega - \int_{\gamma^x} \omega \} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{ \int_{c_i} \omega \} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{ \int_0^t a_i(s) ds \} = a_i(c_i(0)) = a_i(x).$$

□

Abbiamo inoltre un teorema che lega l'essere esatta di una forma con il fatto di esser chiusa.

THEOREM 2.7. *Data $\omega$ una forma differenziale su un aperto $U$, si ha che questa è chiusa se e solo se è localmente esatta; ovvero che per ogni $p \in U$ esiste un intorno $V$ ed una funzione differenziabile $f : V \to \mathbb{R}$, tale che in $V$ si abbia $df = \omega$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\omega$ è localmente esatta per ogni punto $p$ esiste un intorno $V$, tale che esista $f : V \to \mathbb{R}$ per cui vale:

$$df_q = \omega_q,$$

per ogni $q$ in $V$. Dunque $d\omega_p = d(df_p) = d^2 f_p = 0$, e questo vale per ogni $p$ quindi è chiusa. Viceversa supponiamo che $\omega$ sia chiusa; allora consideriamo un punto $p$ di $U$, essendo quest'ultimo aperto, esiste un $\varepsilon$ tale che $V = B_\varepsilon(p) \subseteq U$. Per la 2.6, abbiamo che l'integrale di $\omega$ lungo una qualsiasi curva aperta non dipende che dai punti iniziali e finali della curva. Consideriamo ora un punto $x \in V$, definiamo la curva seguente:

$$\gamma_x : [0,1] \to V : t \mapsto tx + (1-t)p,$$

fatto ciò definiamo:

$$f : V \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\gamma_x} \omega.$$

Posta $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, allora vale:

$$\partial_i f(x) = \partial_i \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^n a_j(\gamma_x(t))(x_j - p_j) + a_i \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^n \partial_i a_j(\gamma_x(t)) t(x_j - p_j) + a_i \right] dt =$$

facciamo notare che la condizione $d\omega = 0$ implica la condizione $\partial_i a_j = \partial_j a_i$, detto questo proseguiamo ottenendo:

$$= \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^n \partial_j a_i(\gamma_x(t)) t(x_j - p_j) + a_i \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} a_i(\gamma_x(t)) t + a_i(\gamma_x(t)) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( a_i(\gamma_x(t)) t \right) dt = 1 \cdot a_i(x) - 0 \cdot a_i(p) = a_i(x).$$

Questo prova il teorema. □

Grazie a questo teorema possiamo definire l'integrale di una forma differenziale esatta lungo una curva che sia semplicemente continua a tratti;

Definition 2.8. Sia $\omega$ una forma differenziale esatta, sia $f$ tale che $df = \omega$. Data una curva $\gamma(t)$, continua a tratti, siano $\{t_j\}_{j \in J}$ i punti di discontinuità, definiamo:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j \in J} [f(t_{j+1}) - f(t_j)].$$

Vorremmo ora vedere quale è il rapporto tra gli integrali di una forma differenziale lungo due curve che siano una la "deformazione continua" dell'altra. Ma prima di tutto definiamo in maniera rigorosa quest'ultimo concetto.

Definition 2.9. Due curve continue, $\gamma_1, \gamma_2 : [a_1, a_2] \to U \subseteq \mathbb{R}^n$, che hanno stessi punti iniziali e finali, ovvero $\gamma_1(a_i) = \gamma_2(a_i)$, si dicono omotope se e solo se esiste una mappa continua

$$H : [a_1, a_2] \times [0,1] \to U : (s,t) \mapsto H(s,t) = H_t(s), \tag{2.1.1}$$

tale che

$$H_{i+1}(s) = \gamma_i(s) \tag{2.1.2}$$

e che

$$H_t(a_i) = \gamma_1(a_i), \tag{2.1.3}$$

con $i \in \{1, 2\}$. Per ogni $t$ abbiamo una curva continua che va dal punto iniziale di $\gamma_1$ a quello finale di $\gamma_1$. Qualora lasciassimo cadere la condizione (2.1.3) e, inoltre, lasciassimo variare i punti iniziali e finali delle curve, diremo che le curve sono liberamente omotope.

**2.1.3. Integrali di forme differenziali chiuse.** Si dimostra che l'integrale di una forma differenziale chiusa è invariante per omotopie. Ovvero:

THEOREM 2.10. *Sia $\omega$ una forma differenziale chiusa definita su un'insieme aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Siano inoltre $\gamma_1, \gamma_2$ due curve omotope e continue in $U$. Allora*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo con il richiamare il teorema 2.7, ovvero $\omega$ chiusa implica $\omega$ localmente esatta. Sia $H : R = [0, 1] \times [a, b] \to U$ l'omotopia tra $\gamma_1$ e $\gamma_2$, sia inoltre $\{B_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di $H(R)$ di bolle tali che $\omega$sia esatta in ciascuna di esse; dunque $\{W_i = H^{-1}(B_i)\}_{i \in I}$ risulta essere un ricoprimento di $R$. Poiché $R$ è compatto allora possiamo estrane un sotto ricoprimento $\{W_i\}_{i \in J \subseteq I}$ finito. Inoltre esiste un numero $d$, tale che per ogni sottoinsieme $X$ di $R$ tale che sia contenuto nella bolla di raggio $d$, esisterà un $i_X \in J$ tale che $X \subseteq W_{i_X}$. Dividiamo $R$ in tanti rettangoli, tuttavia un numero finito di essi, con lati paralleli agli assi, tali che il loro diametro sia inferiore a $d$; questo è equivalente a trovare una suddivisione $\{t_i\}_{i \in H}$ di $[0, 1]$ e una $\{s_j\}_{j \in K}$ di $[a, b]$. Chiamiamo $R_{i,j}$ il rettangolo avente per estremi $(s_i, t_j)$, $(s_i, t_{j+1})$, $(s_{i+1}, t_j)$ e $(s_{i+1}, t_{j+1})$ denotiamo inoltre:

$$\alpha_{j,i} : [0, 1] \to R : t \mapsto (t \cdot s_j + (1 - t)s_j, t_i),$$

$$\beta_{j,i} : [0, 1] \to R : t \mapsto (s_j, t \cdot t_{i+1} + (1 - t)t_i).$$

Poiché $\omega$ è localmente esatta, allora $\int_{\partial R_{i,j}} \omega = 0$, da cui:

$$0 = \sum_{i,j} \int_{\partial R_{i,j}} \omega = \sum_{i,j} \left[ \int_{\alpha_{i,j}} \omega - \int_{\alpha_{i,j+1}} \omega + \int_{\beta_{i,j}} \omega - \int_{\beta_{i+1,j}} \omega \right],$$

notiamo che i lati degli $R_{i,j}$ che stanno all'interno di $R$ vengono percorsi due volte e in senso opposto dun que si elidono a due a due e, detta $\alpha_0$ il segmento che va da $(0, a)$ a $(0, b)$, $\alpha_1$ il segmento che va da $(1, b)$ a $(1, a)$, $\beta_0$ il segmento che va da $(0, a)$ a $(1, a)$ ed infine $\beta_1$ il segmento che unisce $(1, b)$ con $(0, b)$, ciò che resta è:

$$\int_{\alpha_0} \omega + \int_{\beta_0} \omega - \int_{\alpha_1} \omega - \int_{\beta_1} \omega = 0,$$

poiché le curve $H(a, t) = \beta_0$ e $H(b, t) = \beta_1$ sono ridotte a dei punti, allora:

$$\int_{\beta_j} \omega = 0, \quad j \in \{0, 1\}$$

da cui:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\alpha_1} \omega = \int_{\alpha_2} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

□

Più in generale otteniamo la seguente:

PROPOSITION 2.11. *Sia $\omega$ una forma differenziale chiusa definita su un'insieme aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Siano inoltre $\gamma_1, \gamma_2$ due curve liberamente omotope e continue in $U$. Allora*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega;$$

*In particolare se la curva $\gamma_1$ è omotopa ad un punto:*

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è identica a quella precedente, solo che anzi che aversi:

$$\int_{\beta_j} \omega = 0, \quad j \in \{0, 1\}$$

si ha semplicemente che

$$\int_{\beta_1} \omega = \int_{\beta_0} \omega,$$

da cui resta provato il teorema. □

DEFINITION 2.12. Sia $U$ un sottoinsieme aperto di $X$, spazio topologico. Diremo che questo è connesso se e solo se non esistono due aperti[4], diversi dal vuoto e da $U$, tali che la loro unione sia $U$ e la loro intersezione sia il vuoto. Invece diremo che questo è connesso per archi se e solo se esistono dati due punti qualsiasi esiste una curva che li unisce e che sia totalmente contenuto nell'insieme. Infine Diremo che $U$ è semplicemente connesso se date due curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ omotope in $\mathbb{R}^n$, contenute in $U$, esiste un'omotopia $H_t(s)$ tale che $\forall t$ abbiamo $H_t \subseteq U$.

Abbiamo inoltre il seguente:

PROPOSITION 2.13. *Abbiamo le seguenti catene di implicazioni:*

$U$ *semplicemente connesso* $\implies$ $U$ *connesso per archi* $\implies$ _$U$ *connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Tornando alle forme differenziali, abbiamo il seguente risultato, la cui dimostrazione fa utilizzo dei risultati precedenti sull'integrazione di forme differenziali.

THEOREM 2.14. *Una forma differenziale chiusa su un aperto semplicemente connesso è esatta.*

DIMOSTRAZIONE. In un aperto semplicemente connesso, ogni curva chiusa $\gamma$ è omotopa ad un punto da cui, per il teorema2.11, $\oint_\gamma \omega = 0$. Per la 2.6 e per la 2.13, si ha che $\omega$ è esatta. □

Un'altra applicazione dell'invarianza per omotopie dell'integrale, è quella alle funzioni olomorfe. Diamo anzitutto qualche definizione preliminare.

[4]Vedi il capitolo 3.

DEFINITION 2.15. Data una funzione $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenziabile. Diremo che $p \in U$ è uno zero per $F$ se e solo se $F(p) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Sia $p$ uno zero per $F$, diremo che questo è isolato se e solo se esiste un intorno $V$ di $p$ tale che $\forall x \in V \setminus \{p\}$ vale $F(x) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Uno zero è detto semplice se e solo se $dF_p$ è non singolare. Dato uno zero semplice, $p$, di $F$ questo è detto positivo, o negativo, a seconda che $Det(dF_p) > 0$, o $Det(dF_p) < 0$, rispettivamente.

Facciamo notare che per il teorema di inversione locale, citato più avanti[5], allora uno zero semplice è isolato.

DEFINITION 2.16. Sia $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$, un'applicazione differenziabile e $D \subseteq U$ un disco tale che nel cerchio $\partial D$, bordo di $D$, non siano contenuti zeri di $F$. Considerata la forma differenziale:

$$\theta = -\frac{gdf - fdg}{f^2 + g^2},$$

definita per tutti i punti che non siano zeri di $F$, detto numero di avvolgimento, definiamo l'indice di $F$ in $D$ come:

$$n(F; D) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \theta.$$

Abbiamo la seguente:

PROPOSITION 2.17. *Sia $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$, un'applicazione differenziabile e $D \subseteq U$ un disco tale che nel cerchio $\partial D$, bordo di $D$, non siano contenuti zeri di $F$. Allora abbiamo che:*

$$n(F; D) \in \mathbb{Z},$$

*e inoltre*

$$n(F; D) \neq 0 \implies \exists q \in D : \ F(q) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

[5] Vedi Teorema 3.19.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che non esista un tale $q$, allora, detto $p$ il centro del disco, consideriamo una funzione $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ data da:

$$H(s,t) = F((1-t)\gamma(s) + tp),$$

con $\gamma$ una parametrizzazione del bordo di $D$. Questa è un'omotopia libera tra il punto $F(p)$ e $F \circ \gamma$, dunque:

$$n(F; D) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \theta = \frac{1}{2\pi} \int_{F \circ \gamma} \omega = 0,$$

assurdo. □

PROPOSITION 2.18. *Siano* $F_1, F_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$, *un'applicazione differenziabile e* $D \subseteq U$ *un disco tale che nel cerchio* $C = \partial D$, *bordo di* $D$, *non siano contenuti zeri di* $F_1$ *o di* $F_2$. *E inoltre esista una mappa continua* $H : C \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, *con* $H(q, 0) = F_1(q)$ *e* $H(q, 1) = F_2(q)$, *infine* $H(q, t) \neq 0$, *allora:*

$$n(F_1; D) = n(F_2; D).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dalla precedente e dal fatto che le curve $F_1 \circ C$ e $F_2 \circ C$ sono liberamente omotope, tramite

$$K(s,t) = H(C(s), t).$$

□

Una delle più interessanti applicazioni dell'indice è attribuita a Kronecker, ed è quella illustrata nel teorema 2.20, ma prima di vederla diamo il seguente lemma che, oltre ad esser necessario per la dimostrazione del teorema, potrebbe rivelarsi utile nel seguito.

LEMMA 2.19. *Sia* $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$, *un'applicazione differenziabile e* $D \subseteq U$ *un disco tale che nel cerchio* $\partial D$, *bordo di* $D$, *non siano* *contenuti zeri di $F$. Supponendo che $F$ abbia un unico zero semplice in $p \in D$, allora*

$$n(F;D) = \mp 1,$$

*a seconda che $Det(dF_p) < 0$ o $Det(dF_p) > 0$.*

Dimostrazione. Senza ledere alla generalità possiamo porre $p = 0_{\mathbb{R}^2}$. Sviluppando secondo Taylor in un intorno di $p$ la funzione $F$, fino al primo ordine, possiamo scrivere:

$$F(q) = dF_p \cdot q + R(q)|q|,$$

con $R \stackrel{q \to 0}{\longrightarrow} 0$ . Consideriamo l'applicazione:

$$H(q,t) = dF_p \cdot q + (1-t)R(q)|q|,$$

con $q \in U$ e $t \in [0,1]$. Iniziamo con il mostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $q \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ tale che $|q| < \varepsilon$, si abbia, per ogni $t$, $H(q,t) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Posto $C = \frac{1}{|dF_p^{-1}|}$,[6] per ogni $q$ si ha:

$$|q| = |dF_p^{-1} dF_p q| \leq |dF_p^{-1}||dF_p q| = \frac{1}{C}|dF_p q|,$$

da cui si ottiene: $|dF_p q| \geq C|q|$. Sia $\varepsilon$ tale che $\forall q \in D_\varepsilon(p)$ valga $|R(q)| \leq \frac{C}{2}$, questo esiste poiché $R \stackrel{q \to 0}{\longrightarrow} 0$, allora se $q \neq p$, si ha:

$$|H(q,t)| = |dF_p q + (1-t)R(q)|q|| \geq$$

$$\geq |dF_p q| - (1-t)|R(q)||q| \geq C|q| - \frac{C}{2}|q| > 0.$$

Allora $H(C(s),t)$ è una omotopia libera tra $F \circ C$ e $dF_p \circ C$, dunque $n(F,D) = n(dF_p, D)$. Poiché $dF_p$ è biunivoca allora l'immagine di un cerchio fa al più un giro attorno all'origine; più rigorosamente:

$$n(T,D) = \pm 1.$$

[6]Dove, data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, con $|A|$ si indica la norma indotta dalla norma $||\cdot||$, data da:

$$|A| = \sup_{||x||=1} ||Ax||.$$

□

THEOREM 2.20. *Siano $F$ e $D$ come nel lemma 2.19. Supponendo che $F$ abbia solo zeri semplici in $D$, abbiamo:*

$$n(F;D) = P - N,$$

*dove $P$ è il numero di zeri positivi di $F$ e $N$ è il numero di zeri negativi della stessa.*

DIMOSTRAZIONE. Dividiamo $D$ in più domini tali che i lati in comune di questi siano percorsi nei due sensi e che ciascuno di questi contenga al più uno zero. Diciamo i bordi di questi domini $\gamma_i$ , abbiamo che:

$$\int_{\partial D} \theta = \sum_i \int_{\gamma_i} \theta = \sum_i (\pm 1) = P - N.$$

□

Concludiamo questa prima sezione del capitolo facendo un piccolo richiamo di notazione che verrà utilizzata nel seguito, a partire dallo svolgimento degli esercizi del presente capitolo. Siano $r \in \mathbb{R}$ e $C \in \mathbb{R}^n$, indicheremo con $B_r^n(C)$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n | \; ||x - C|| < r\}$, salvo specificazioni che saranno ristrette solamente ai singoli esercizi. Qualora si chiara dal contesto sopprimeremo dalla notazione l'indice relativo alla dimensione, al raggio o al centro. Mentre indicheremo con $D_r^n(C)$ la chiusura di $B_r(C)$ . Ed infine con $S_r^{n-1}(C) = D_r^n(C) \backslash B_r^n(C)$, e $S^{n-1} = S_1^{n-1}(0_{\mathbb{R}^n})$. Facciamo infine notare che $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$.

## 2.2. Risoluzione degli esercizi.

EXERCISE. 2.1

Si mostri che $\omega = 2xy^3dx \; + \; 3x^2y^2dy$ è una forma differenziale chiusa e si calcoli $\int_c \omega$. Dove $c$ è l'arco della parabola $y = x^2$ da (0,0) a (x,y).

**Svolgimento:**

Siano $P = 2xy^3, Q = 3x^2y^2$, per mostrare che $\omega$è chiusa basta mostrare che $\partial_x Q = \partial_y P$,

$$\partial_y P = 6xy^2 = \partial_x Q$$

dunque è chiusa. $\square$

$$\int_c \omega = \int_0^x [4t^8 + 3t^6]dt = \frac{4}{9}t^9 + \frac{3}{7}t^7|_0^x = \frac{4}{9}xy^4 + \frac{3}{7}xy^3,$$

dove $y = x^2$.$\square$

EXERCISE. 2.2

(1) Si mostri che se $\omega$ è una uno forma differenziale definita in $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \to U$ una curva differenziabile e $|\omega(\gamma(t))| \leq M$, per tutti i $t \in [a,b]$, allora
$$\left| \int_\gamma \omega \right| \leq ML.$$
Dove $L$ è la lunghezza della curva.

(2) Sia $\omega$ una forma differenziale chiusa in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Supponiamo che sia limitata, ( ciò vuol dire che tali sono i suoi coefficienti,) su un disco centrato nell'origine. Si mostri che $\omega$ è esatta in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

(3) Si mostri che il risultato del punto 2 si può ottenere anche con le seguenti ipotesi:
$$d\omega = 0$$
e
$$\lim_{x^2+y^2 \to 0} \sqrt{x^2+y^2}\,\omega = 0.$$

**Svolgimento:**

(1) Cominciamo con il ricordare che la lunghezza di una curva differenziabile $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è:

$$L_\gamma = \int_\gamma ds = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Ora vediamo che:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Da cui:

$$\left| \int_\gamma \omega \right| \leq \int_a^b |\omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| \, dt = \int_a^b |\omega(\gamma(t))| |\gamma'(t)| \, dt \leq$$

$$\leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = ML.$$

(2) Sia $\omega = \sum_i a_i dx_i$, definiamo

$$f(x) = \int_0^1 (\sum_i a_i(tx) x_i) dt,$$

dove l'integrale presente nella definizione di $f$ è un'integrale improprio; ovvero dobbiamo intendere $f$ definita da:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 (\sum_i a_i(tx) x_i) dt.$$

Quindi dobbiamo dimostrare che $f$ è ben definita; per mostrare questo è sufficiente mostrare che, a $x = (x_1, x_2)$ fissato, vale:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_\varepsilon^1 (\sum_i a_i(tx) x_i) dt \right| \leq M_0 \in \mathbb{R}.$$

Siano $M_i \in \mathbb{R}$ tali che $|a_i| \leq M_i$ in un intorno di $0_{\mathbb{R}^n}$, e sia $M = max_i\{M_i\}$, allora si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_\varepsilon^1 (\sum_i a_i(tx) x_i) dt \right| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \left| (\sum_i a_i(tx) x_i) \right| dt \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \sum_i M_i |x_i| dt \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \left[ M(\sum_i |x_i|) + \varepsilon M(\sum_i |x_i|) \right] \leq$$

$$= M(\sum_i |x_i|) = M_0.$$

Facciamo notare che $f \to 0$ quando $x \to 0$, possiamo dunque porre 0 come valore di $f$ in 0. Dunque $f$ risulta esser ben definita, dobbiamo mostrare che $\partial_i f = a_i$.

$$\partial_i f = \partial_i \int_0^1 (\sum_i a_i(tx)x_i) dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \partial_i \int_\varepsilon^1 (\sum_i a_i(tx)x_i) dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left[ \sum_j \partial_i a_j(tx) t x_j + a_i(tx) \right] dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left( \frac{d}{dt} [a_i(tx)]\, t + a_i(tx) \right) dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left[ \frac{d}{dt} (a_i \cdot t) \right] dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} [a_i(x) \cdot 1 + a_i(\varepsilon x) \cdot \varepsilon] = a_i(x).$$

Dove tra il quarto ed il quinto passaggio si è sfruttato il fatto che $\partial_i a_j = \partial_j a_i$ è conseguente al fatto $d\omega = 0$, e tra il penultimo e l'ultimo il fatto che, poiché $a_i$ è limitata in un intorno di 0, $\lim_{\varepsilon\to 0} a_i(\varepsilon x) \cdot \varepsilon = 0$.

(3) Per mostrare questo punto si utilizza sostanzialmente lo stesso procedimento del punto precedente; l'unica differenza, una volta definita $f$, sta nel dimostrare che $f$ è ben definita e che $\lim_{\varepsilon\to 0} a_i(\varepsilon x) \cdot \varepsilon = 0$. Iniziamo con il rimarcare che $\lim_{||x||_2 \to 0} ||x|| \omega = 0$, implica:

$$\lim_{||x|| \to 0} ||x|| a_i = 0,$$

per ogni $i \in \{1, 2\}$. Inoltre poiché $a_i ||x||$ è una funzione continua in $\mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ed ammette limite per $||x|| \to 0$, allora è limitata da una costante $M$ in un intorno dell'origine. Dato $\varepsilon > 0$, ad $x$ fissato e non nullo vale:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_i(\varepsilon x) \varepsilon ||x|| = \lim_{||y|| = ||\varepsilon x|| \to 0} a_i(y) ||y|| = 0,$$

da cui:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_i(\varepsilon x)\varepsilon = 0,$$

questo ci garantisce, utilizzando lo stesso ragionamento del punto precedente, che qualora $f$ risulti ben definita valga:

$$\partial_i f = a_i.$$

Inoltre abbiamo che $||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$, indicando $||x||_p = \sqrt[p]{\sum_i x_i^p}$, e $||x||_1 = \sum_i |x_i|$, dunque:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\varepsilon^1 (\sum_i a_i(tx)x_i)dt\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left|(\sum_i a_i(tx)x_i)\right| dt \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \sum_i |a_i(tx)|||x||_1 dt \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_i \sqrt{n}\int_\varepsilon^1 |a_i(tx)|||x||_2 dt \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\lim_{\varepsilon\to 0} M - M\varepsilon = \sqrt{n}M.$$

Quindi abbiamo ancora che $f$ è ben definita e questo conclude l'esercizio.

Exercise. 2.3

Si consideri la forma differenziale $\omega$, data da:

$$\omega = \frac{e^x}{x^2+y^2}[(x\, cosy + y\, seny)dy + (x\, seny - y\, cosy)dx],$$

definita in $\mathbb{R}^2\backslash\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

(1) Si mostri che $\omega$ può esser scritta come:

$$\omega = e^x cosy\, \omega_0 + e^x seny\, d[log(r)],$$

dove $\omega_0$ è l'elemento d'angolo in $0_{\mathbb{R}^2}$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$; inoltre si calcoli che $d\omega = 0$.

(2) Si mostri, sfruttando il terzo punto dell'esercizio 2.2.3, che $\omega - \omega_0$ è esatta.

(3) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ con $\gamma$ una curva semplice e chiusa di $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

**Svolgimento:**

(1) Ricordiamo che l'elemento d'angolo $\omega_0$ e dato da

$$\omega_0 = \frac{x\,dy}{x^2+y^2} - \frac{y\,dx}{x^2+y^2},$$

e $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dunque, si ha:

$$\omega = \frac{e^x}{x^2+y^2}(x\,cosy + y\,seny)dy + \frac{e^x}{x^2+y^2}(x\,seny - y\,cosy)dx =$$

$$= \frac{e^x}{x^2+y^2}(x\,cosy\,dy - y\,cosy\,dx) + \frac{e^x}{x^2+y^2}(y\,seny\,dy + x\,seny\,dx) =$$

$$= \frac{e^x}{x^2+y^2}\omega_0\,cosy + \frac{e^x}{x^2+y^2}(y\,dy + x\,dx)\,seny.$$

Ora calcoliamo:

$$d[log(r)] = \frac{1}{r}dr = \frac{1}{r}\left(\partial_1 r dx + \partial_2 r dy\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy\right) = \frac{1}{r^2}\left(xdx + ydy\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(xdx + ydy\right).$$

Da cui deduciamo:

$$\omega = e^x cosy\,\omega_0 + e^x seny\,d[log(r)].$$

adesso dobbiamo calcolare $d\omega$, che ci dà:

$$d\omega = d\left(\frac{e^x}{x^2+y^2}[(x\,cosy + y\,seny)dy + (x\,seny - y\,cosy)dx]\right) =$$

$$= \left\{\partial_1\left[\frac{e^x}{x^2+y^2}(x\,cosy + y\,seny)\right] - \partial_2\left[\frac{e^x}{x^2+y^2}(x\,seny - y\,cosy)dx\right]\right\} dx\wedge dy =$$

$$= e^x[\partial_1^2 log[r]cosy + \partial_{12}log[r]seny + \frac{1}{x^2+y^2}(x\,cosy + y\,seny)]dx\wedge dy +$$

$$+ e^x[-\partial_{12}log[r]seny - \frac{x}{x^2+y^2}cosy + \partial_2^2 log[r]cosy - \frac{y}{x^2+y^2}seny]dx\wedge dy =$$

$$= e^x[\partial_1^2 log[r] + \partial_2^2 log[r]]cosy\,dx\wedge dy.$$

Considerato che:

$$\partial_i^2 log[r] = \partial_i \left[ \frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2} \right] = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_i}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{(-1)^{i+1}[x_1^2 - x_2^2]}{(x_1^2 + x_2^2)},$$

otteniamo $d\omega = 0$.

(2) Innanzitutto abbiamo che $d(\omega - \omega_0) = d\omega - d\omega_0 = 0$. Andiamo a considerare $\omega - \omega_0$, questa è data da:

$$\omega - \omega_0 = \frac{1}{x^2 + y^2} \left[ e^x (x\, cosy + y\, seny) - x \right] dy +$$

$$+ \frac{1}{x^2 + y^2} \left[ e^x (x\, seny - y\, cosy) + y \right] dx = adx + bdy;$$

inoltre si ha che $\lim_{r^2 \to 0} a_i dx_i = 0$ se e solo se $\lim_{r^2 \to 0} a_i = 0$, dunque è sufficiente controllare che tendano a zero, per $r^2$ che tende a zero, i coefficienti $a$ e $b$. Iniziamo con il mostrare che $a$ tende a zero.

$$\lim_{r^2 \to 0} \frac{r}{x^2 + y^2} \left[ e^x (x\, seny - y\, cosy) + y \right] =$$

passando in coordinate polari[7]:

$$= \lim_{r^2 \to 0} \frac{r}{r^2} \left[ e^{rcos\theta} (rcos\theta sen(rsen\theta) - rsen\theta cos(rsen\theta)) - rsen\theta \right] =$$

$$= \lim_{r^2 \to 0} \frac{1}{\cancel{r}} \cancel{r} \left[ e^{rcos\theta} (cos\theta sen(rsen\theta) - sen\theta cos(rsen\theta)) - sen\theta \right] =$$

$$= \lim_{r \to 0} \left[ e^{rcos\theta} sen(\theta - rsen\theta) - sen\theta \right] = sen\theta - sen\theta = 0$$

In maniera identica si mostra che $\lim_{r^2 \to 0} b = 0$. Questo conclude la dimostrazione.

(3) Iniziamo con il far notare che $\oint_\gamma \omega - \omega_0 = 0$, da cui:

$$\oint_\gamma \omega = \oint_\gamma \omega_0 = \int_0^{2\pi} \gamma^* \omega_0 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

[7] il passaggio è dato da:

$$\begin{cases} x = & rcos\theta \\ y = & rsen\theta \end{cases}$$

poiché la curva è semplice, piana e chiusa, e non contiene lo zero.

Exercise. 2.4

Sia $\omega$ una 1-forma definita in un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Supponiamo che l'integrale lungo una curva chiusa $\gamma$ di omega sia un numero razionale. Si provi che $\omega$ è chiusa.

**Svolgimento:**

L'ipotesi può esser sintetizzata come:

$$\oint_\gamma \omega \in \mathbb{Q}.$$

Consideriamo $p \in U$, allora esiste un reale $r$ tale che $V_p = D_r(p) \subseteq U$. Poiché $D_r(p)$ è semplicemente connesso dunque una qualsiasi curva chiusa è omotopa ad un punto, in particolare i bordi dei dischi di raggio $\varepsilon$ e centrati in $p$ sono omotopi tra loro ed a $p$. Esiste dunque una funzione continua $H$ tale che:

$$H : [0, r] \times [0, 2\pi] \to V_p$$

$$(\rho, t) \mapsto (\rho cos(t) + p_1, \rho sen(t) + p_2),$$

questa è continua, dunque altrettanto continua è la funzione che a $\rho \in [0, r]$ assegna $\int_{\partial D_\rho} \omega$, diciamola $\varphi$, inoltre vale:

$$\lim_{\rho \to 0} \varphi(\rho) = 0,$$

ma $\varphi : [0, \rho] \to \mathbb{Q}$, per ipotesi dunque deve aversi necessariamente $\varphi = 0$, quindi l'integrale lungo qualunque circonferenza in $V_p$è nullo. Questo ci permette di concludere che $\omega$è localmente esatta, e di conseguenza chiusa.

Exercise. 2.5

Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ due aperti semplicemente connessi tali che $V \cap U$ sia connesso. Sia $\omega$ una forma esatta sia in $U$ che in $V$. Si mostri che $\omega$ è esatta in $U \cup V$.

**Svolgimento:**

Per concludere l'esercizio è sufficiente provare che l'insieme $U \cup V$ è semplicemente connesso. Infatti dato che la forma $\omega$ è esatta in $U$ e in $V$ allora essa è anche chiusa in $U$ e in $V$, questo implica che è chiusa in $U \cup V$. Sia $\gamma$ una curva chiusa, possiamo supporre che sia semplice senza ledere alla generalità, in $U \cup V$, supponiamo che essa non sia omotopa ad un punto. Essa non può essere interamente contenuta né in $V$, altrimenti sarebbe omotopa ad un punto, né in $U$, per la stessa ragione. Dunque esisteranno $p, q \in \gamma$ tali che $p \in V \setminus U$ e $q \in U \setminus V$, dividiamo $\gamma$ in due curve $\gamma_1 : [a, b] \to U \cup V$ e $\gamma_2 : [a, b] \to U \cup V$, la prima che congiunge $p$ a $q$ e la seconda che congiunge $q$ a $p$. Il fatto che $\gamma$ non sia omotopa ad un punto è equivalente al fatto che $\gamma_1$ e $\gamma_2$, non sono omotope. Inoltre ciascuna di queste due curve ha un punto $q_i$ in $U \cap V$; essendo questo connesso ed aperto esiste un arco che unisce $q_1$ a $q_2$, diciamolo $\delta$. Siano $\gamma_i^{'} : [a, \frac{a+b}{2}] \to U$ e $\gamma_i^{''} : [\frac{a+b}{2}, b] \to V$, rispettivamente, i segmenti di $\gamma_i$ che uniscono $p$ a $q_i$ e $q_i$ a $x$; le curve $\gamma_1^{(i)}$ e $\gamma_2^{(i)}$ sono liberamente omotope in quanto contenute in uno dei due insiemi $U$ e $V$. Sia $H_i$ l'omotopia che porta $\gamma_1^{(i)}$ in $\gamma_2^{(i)}$, possiamo supporre $H_i(s, \frac{a+b}{2}) = \delta$; definiamo:

$$H : [0, 1] \times [a, b] \to U \cup V,$$

come:

$$H(s, t) = H_1(s, t)\mathbb{I}_{[a, \frac{a+b}{2})}(t) + H_2(s, t)\mathbb{I}_{[\frac{a+b}{2}, b]}(t).$$

e questa è un'omotopia tra $\gamma_1$ e $\gamma_2$.

Exercise. 2.6

Gli integrali di linea sono abbastanza utili nello studio di funzioni complesse $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Qui il piano complesso $\mathbb{C}$ verrà identificato con $\mathbb{R}^2$, ponendo $z = x + iy$ uguale a $(x, y)$. Diventa utile introdurre la forma differenziale complessa $dz = dx + idy$e scrivere:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv.$$

Allora la forma differenziale complessa:

$$f(z)dz = (u+iv)dx + (iu-v)dy = (udx - vdy) + i(vdx + udy).$$

Possiamo dunque definire:

$$\int f(z)dz = \int (udx - vdy) + i \int (vdx + udy).$$

Assumendo che $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$, diremo che $f$ è olomorfa se e solo se:

$$\partial_1 u = \partial_2 v, \quad \partial_1 v = -\partial_2 u.$$

Si mostri che:

(1) $f$ è olomorfa se e solo se le parti reali ed immaginarie di $f(z)dz$ sono chiuse.

(2) (Teorema di Cauchy) Se $f$ è olomorfa in un dominio semplicemente connesso $U \subseteq \mathbb{C}$ e $\gamma$ una curva chiusa in $U$, allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

(3) Se $f$è olomorfa, la funzione $f^{'}(z)$, detta derivata di $f$ in $z$, data dall'equazione:

$$df = du - idv = f^{'}(z)dz.$$

è ben definita e $f^{'} = \partial_1 u - i\partial_2 u$.

(4) Se $f$ è olomorfa in $U \subseteq \mathbb{C}$ e $f^{'}(z) \neq 0$, $z \in U$, allora tutti gli zeri di $f$ sono semplici e positivi, inoltre, se $D \subseteq U$ è un disco tale che non ci siano zeri di $f$ sul suo bordo, allora:

$$n[f, D] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{df}{f}.$$

**Svolgimento:**

(1) La parte reale di $f(z)dz$ è data da $(udx - vdy)$, questa forma è chiusa se e solo se:

$$\partial_1(-v) = \partial_2 u \iff \partial_2 u = -\partial_1 v,$$

mentre la parte immaginaria di $f(z)dz$, data da $(udy + vdx)$,è chiusa se e solo se:

$$\partial_1 u = \partial_2 v.$$

questo implica che $f$ è olomorfa se e solo se le parti reale ed immaginaria di $f(z)dz$ sono chiuse.

(2) Poiché $f$ è olomorfa abbiamo, dal punto precedente, che le parti reale ed immaginaria di $f(z)dz$, diciamole $\Re(f)$ e $\Im(f)$ sono chiuse e dunque esatte in $U$, da cui:

$$\oint_\gamma f dz = \oint_\gamma \Re(f) + i \oint_\gamma \Im(f) = 0 + i \cdot 0 = 0.$$

(3) Calcoliamo il $df$, questo è dato da:

$$df = du + idv = \partial_1 u dx + \partial_2 u dy + i[\partial_1 v dx + \partial_2 v dy] =$$

$$= [\partial_1 u + i\partial_1 v]dx + [\partial_2 u + i\partial_2 v]dy = [\partial_1 u - i\partial_2 u]dx + [\partial_2 u + i\partial_1 u]dy =$$

$$= [\partial_1 u - i\partial_2 u]dx + i[\partial_1 u - i\partial_2 u]dy = (\partial_1 u + i(-\partial_2 u))(dx + idy) =$$

$$= f'(z)dz,$$

con $f^{'} = \partial_1 u - i\partial_2 u$, ben definita.

(4) Per avere che gli zeri siano semplici e positivi è sufficiente provare che $Det(df) \neq 0$, ma $Det(df) = (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 > 0$. Inoltre, calcolando $\frac{df}{f}$, si ha:

$$\frac{df}{f} = \frac{du + idv}{u + iv} = \frac{(u - iv)(du + idv)}{u^2 + v^2} =$$
$$= \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2} + i\frac{udv - vdu}{u^2 + v^2} = \frac{1}{2}\frac{2udu + 2vdv}{u^2 + v^2} + i\frac{udv - vdu}{u^2 + v^2} =$$
$$= \frac{1}{2}d(log(u^2 + v^2) + i\frac{udv - vdu}{u^2 + v^2},$$

dunque:

$$\int \frac{df}{f} = \frac{1}{2}\int d(log(u^2 + v^2) + i\int \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2} = 0 + i\int \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2} = i(2\pi)n(f, D).$$

Exercise. 2.7

Si consideri la forma:

$$\omega = \frac{2(x^2 - y^2 - 1)dy - 2xydx}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2},$$

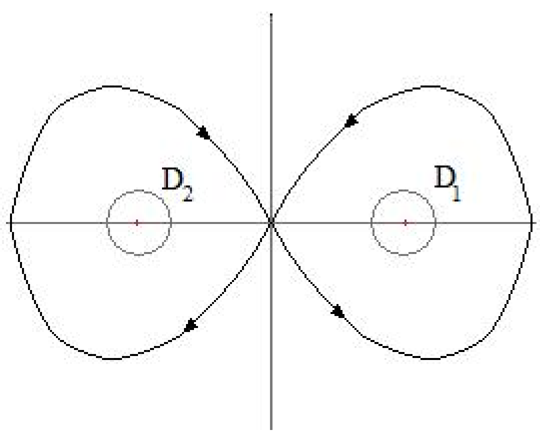
definita in $\mathbb{R}^2 \backslash \{p_1, p_2\}$, con $p_i = ((-1)^{i+1}, 0)$. Siano inoltre $D_1$ e $D_2$ due dischi tali che $p_1 \in D_1$, $p_2 \in D_2$ e $p_1 \notin D_2$, $p_2 \notin D_1$.

(1) Si mostri che:

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D_1} \omega = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D_2} \omega = -1.$$

Con $\partial D_i$ orientato in senso antiorario.

(2) Si concluda, per omotopia che l'integrale di $\omega$ lungo la curva $\gamma$ in figura, con l'orientazione indicata, è $4\pi$.




**Svolgimento:**

(1) Iniziamo a considerare $\omega$, vediamo:

$$\omega = \frac{2(x^2 - y^2 - 1)dy - 2xydx}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2} =$$

$$= \frac{2(x^2 + y^2 - 1)dy - 2y(2xdx + 2ydy)}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2} = \frac{(x^2 + y^2 - 1)d(2y) + 2yd(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + (2y)^2},$$

dunque questo non è altro che il numero di avvolgimento di $F = (x^2 + y^2 - 1, 2y)$, dunque per il teorema di Kronecker abbiamo che:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D_1} \omega = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D_2} \omega = -1.$$

(2) Inoltre possiamo considerare $\gamma$ come divisa in due curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$, una è la parte che sta nel semipiano delle ascisse positive e l'altra nel semipiano delle ascisse negative, abbiamo che:

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega + \oint_{\gamma_2} \omega,$$

inoltre per omotopia abbiamo che:

$$\oint_{\gamma_i} \omega = (-1)^{i+1} \oint_{\partial D_i} \omega = (-1)^{i+1} 2\pi,$$

da cui:

$$\oint_{\gamma} \omega = 4\pi.$$

EXERCISE. 2.8

Si mostri che se $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soddisfa la proprietà: $-F(q) = F(-q)$, per ogni $q \in D \subseteq U$, con $D$un disco tale che $\partial D$ non contenga zeri di $F$ e sia centrato in $0_{\mathbb{R}^2}$; allora $n(F, D)$ è un numero dispari e esiste uno zero di $F$ in $D$.

**Svolgimento:**

Iniziamo con il notare che $F(0_{\mathbb{R}^2}) = -F(0_{\mathbb{R}^2})$ dunque $0_{\mathbb{R}^2}$ è uno zero di $F$. Inoltre supponiamo che $q$ sia uno zero di $F$ allora $-q$ è ancora uno zero di $F$, dunque il numero totale di zeri di $F$, differenti da $0_{\mathbb{R}^2}$ è pari. Dunque sia gli zeri positivi che gli zeri negativi sono in numero pari, oppure gli zeri positivi e gli zeri negativi sono entrambi in numero dispari, escludendo sempre $0_{\mathbb{R}^2}$. In entrambi i casi $N - D$ è pari dunque sia $N - D + 1$ che $N - D + 1$ sono dispari e dunque è dispari $n(F, D)$.

EXERCISE. 2.9

(Integrali di linea di campi di vettori) Sia $v$ un campo di vettori definito in un aperto $U$ di $\mathbb{R}^n$. Alla fine del capitolo 1, nella parte relativa alla teoria, abbiamo associato ad un campo di vettori $v$ una forma differenziale $\omega = \prec v \succ$, data da $\omega(u) = \prec v, u \succ$, per tutti gli $u$ di $\mathbb{R}^n$. Sia $\gamma : [a,b] \to U$ una curva differenziabile a tratti. Definiamo:

$$\int_\gamma v = \int_\gamma \omega = \int_\gamma \prec v \succ,$$

in questo modo possiamo trasferire i risultati del presente capitolo in proprietà di integrali di campi di vettori lungo curve. Per esempio:

(1) Si assuma $n = 3$, che $U$ sia un aperto connesso e che $\nabla \times \ v = 0$(, si veda anche l'esercizio 1.14). Si mostri che esiste una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, tale che $\nabla f = v$(, si veda l'esercizio 1.12,) e che per ogni curva $\gamma$ che congiunge i punti $p_1$ e $p_2$, si abbia:

$$\int_\gamma v = f(p_2) - f(p_1).$$

( Se $v$ fosse un campo di forze allora $f$, o meglio $-f$, è detta energia potenziale di $v$ ed il lavoro fatto da $v$ per portare il corpo da $p_1$ a $p_2$ è la differenza di potenziale tra i due punti.)

(2) Sia la situazione come in (1), se si suppone che $\nabla \cdot v = 0$ allora si ha che $f$ è una funzione armonica, ovvero:

$$\Delta_2 f = 0.$$

**Svolgimento:**

(1) Iniziamo con l'osservare che $\nabla \times \ v = 0$ implica che la forma differenziale associata a $v$, data da $\prec v \succ = \sum_i a_i dx_i$, dove $v = \sum_i a_i e_i$, è tale che $d\omega = 0$, dunque, visto che $U$ è semplicemente connesso, è esatta. Ovvero esiste una funzione $f$ tale che $df = \omega$. Dall'esercizio 1.12 abbiamo che $\nabla f$

è il campo di vettori tale che $\prec \nabla f, u \succ = df[u] = \omega[u] = \prec v, u \succ$, questo per ogni $u$, dunque $\nabla f = v$.

(2) Nel caso $\nabla \cdot v = 0$, allora $\nabla \cdot (\nabla f) = 0$, ovvero:

$$0 = \sum_i \partial_i v_i = \sum_i \partial_i(\partial_i f) = \sum_i \partial_i^2 f = \Delta_2 f.$$

EXERCISE. 2.10

Sia $\omega$ una 1 forma differenziale definita in $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Un **fattore di integrazione locale** in $p$ è una funzione $g : V \to \mathbb{R}$, definita in un intorno $V \subseteq U$ di $p$, tale che la forma $g\omega$sia esatta in $V$. Ovvero tale che esista $f : V \to \mathbb{R}$ tale che $df = g\omega$. Si mostri che se $\omega_p \neq 0$ allora esiste un fattore di integrazione locale.

**Svolgimento:**

Supponiamo che $\omega_p$ sia non nulla, allora esiste un campo di vettori $v$, non nullo in un intorno $V$ di $p$, tale che $\omega[v] = 0$ in $V$. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali dato da:

$$\partial_i f[v](x) = 0 = \omega[v](x),$$

questo ammette soluzione $f$ in un intorno di $p$, possiamo supporre che questo sia esattamente $V$. Dato un campo di vettori $u$, supponiamo che anch'esso sia tale che $\omega[u] = 0$ in $V$, allora $v_i = gu_i$, con $g$ non nulla in tutti i punti di $V$.

CAPITOLO 3

# Varietà differenziabili.

In questo capitolo verrà introdotto uno dei concetti di base della geometria differenziale, quello di varietà differenziabile. Questa non è altro che lo "spazio" dove andremo ad operare e il naturale "habitat" delle forme differenziali. Inizieremo con l'introdurre il concetto di varietà differenziabile e col vederne alcune proprietà, richiamando concetti relativi alla topologia[1], e definendo i concetti di spazio tangente ad una varietà e di forme differenziali su una varietà, inoltre introdurremo alcuni operatori che agiscono sulle suddette forme differenziali, infine vedremo il concetto di orientabilità di una varietà. Una volta chiarito lo scopo del presente capitolo, possiamo iniziare a fornire le definizioni ed i teoremi più importanti. Concludiamo questa piccola introduzione facendo presente che nel presente capitolo, e nei seguenti, la parola varietà verrà utilizzata con il senso di varietà differenziabile.

## 3.1. Definizioni e teoremi sulle varietà differenziabili.

Prima di iniziare a fornire la definizione di varietà differenziabile, facciamo alcuni richiami di topologia[2] necessari nel seguito per definire una varietà topologica, ma anche delle definizioni e dei teoremi che verranno utilizzati durante lo svolgimento degli esercizi.

---

[1] In questo capitolo verranno utilizzati alcuni teoremi, ed alcune definizioni, relativa alla topologia queste sono state tratte dal [**LoiT**]. Questi teoremi potevano facilmente essere inclusi nello svolgimento degli esercizi, vista la facilità con la quale possono venire dimostrati. Questi sono stati tuttavia inclusi per comodità e per rendere fluide alcuni esercizi che altrimenti avrebbero potuto esser decisamente più lunghe e macchinose.

[2] I seguenti teoremi e le seguenti definizioni, sino alla definizione di varietà differenziabile, sono state tratte dal [**LoiT**].

### 3.1.1. Richiami di topologia.

DEFINITION 3.1. Sia $X$ un'insieme, una topologia su $X$ è un'insieme $\tau \subseteq \wp(X)$[3] tale che:

(1) $\emptyset, X \in \tau$
(2) Data una famiglia qualunque di indici $I$, e la famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, si ha $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
(3) Data una famiglia finita di indici $I$, ed una famiglia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, allora $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$.

La coppia $(X, \tau)$ è detta spazio topologico, questa verrà denotata $X$ qualora non sorgano ambiguità o sia espressamente detto. Mentre $X$ è detto supporto per la topologia $\tau$. Gli elementi del supporto vengono detti punti mentre gli elementi di $\tau$ sono detti aperti. Un insieme $C$ è detto chiuso in $(X, \tau)$ se e solo se $X \backslash C \in \tau$. Infine dato un sottoinsieme di uno spazio topologico $X$, diciamolo $A$, l'insieme $\tau_{ind.} = \{B \subseteq X |\, B = O \cap A,\, O \in \tau\}$ è una topologia su $A$ ed è detta topologia indotta su $A$ da $X$.

Vediamo ora un altro concetto fondamentale, quello di base per una topologia. Insieme a questo vedremo anche il concetto di base locale e i concetti di spazio di Hausdorff[4] e di spazio numerabile.

DEFINITION 3.2. Sia $(X, \tau)$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme di $\tau$, denotiamolo $\mathfrak{B}$, è detto base per $\tau$, se e solo se ogni aperto di $X$ può essere scritto come unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Dato un punto $x$, l'insieme $\mathfrak{B}_x$, è una base locale in $x$ se e solo se per ogni aperto $A$, che contiene $x$, esiste $B \in \mathfrak{B}_x$ tale che: $x \in B \subseteq A$. Lo spazio topologico è detto di Hausdorff, o $T_2$, se dati due punti distinti $x$ e $y$, esistono

[3] $\wp(X)$ indica l'insieme delle parti di $X$, ovvero l'insieme $\{A |\, A \subseteq X\}$.
[4] Felix Hausdorff (8 novembre 1868 – 26 gennaio 1942) è stato un matematico tedesco. Tra i fondatori della moderna topologia, contribuì anche in molti altri ambiti della matematica tra cui: la teoria degli insiemi, teoria della misura e analisi funzionale.

due aperti $A$ e $B$, tali che $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Infine uno spazio topologico è detto numerabile, o $N_2$, qualora per ogni punto esista una base numerabile.

Definiti questi concetti è utile vedere alcune proprietà e definizioni riguardanti gli spazi topologici ed, in particolare, le funzioni tra di essi.

DEFINITION 3.3. Siano X, Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. $f$ è detta continua se e solo se dato un aperto $U \subseteq Y$ allora $f^{-1}(U)$ è un aperto. Se $f$ suriettiva allora $f$ è un'identificazione se e solo se $U$ è aperto in Y se e solo se $f^{-1}(U)$ è un aperto di X. $f$ è chiusa (aperta) se l'immagine di un chiuso(aperto) è un chiuso (aperto). Infine $f$ è un omeomorfismo se è continua con inversa continua. Indicheremo con $\cong$ la presenza di un omeomorfismo.

In particolare, vista la definizione precedente, un omeomorfismo è un'identificazione. Inoltre ne discende il seguente:

LEMMA 3.4. *Se $f$ è continua e chiusa ( o continua ed aperta) e suriettiva allora è un'identificazione.*

DIMOSTRAZIONE. Discende direttamente dalle definizioni. □

DEFINITION 3.5. Siano X,Y due spazi topologici, diremo che Y è dotato della topologia quoziente di X ( tramite $f$ ) o che è lo spazio quoziente di X tramite $f$, se e solo se esiste un'identificazione $f : X \to Y$.

PROPOSITION 3.6. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due identificazioni. $g \circ f : X \to Z$ è un'identificazione.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $U$ aperto di Z, questo è vero se e solo se $g^{-1}(U)$ è un aperto di Y e questo è vero se e solo se $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U)$ è un aperto di X. □

Dalla osservazione precedente e dalla proposizione appena vista otteniamo il seguente corollario. Questo, pur essendo un'ovvietà, ci sarà utile nel seguito e per tale ragione ne rimarchiamo l'esistenza.

COROLLARY 3.7. *La composizione di un omeomorfismo ed un'identificazione è un'identificazione.*

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza ovvia dei due lemmi precedenti. □

Ora dimostriamo alcune proprietà importanti degli spazi quoziente.

THEOREM 3.8. *( proprietà universale del quoziente) Sia $f : X \to Y$ un'identificazione. Sia $Z$ uno spazio topologico. $g : Y \to Z$ è continua se e solo se $g \circ f$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Se $g$ è continua, dato un aperto $U$ si $Z$ si ha che $g^{-1}(U)$ è un aperto di $Y$. Ma questo è vero se e solo se $f^{-1}(g^{-1}(U))$ è un aperto, dunque se e solo se $f \circ g$ è continua. □

THEOREM 3.9. *( Caratterizzazione delle identificazioni) Siano $X, Y$ due spazi topologici e $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Questa è un'identificazione se e solo se dato $Z$, uno spazio topologico, $g : Y \to Z$ è continua se e solo se $g \circ f$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f$ è un'identificazione allora per il Teorema 1, vale l'enunciato. Sia $f$ tale da rispettare la proprietà universale del quoziente. Sia $Z = Y$ e $g = \iota_Y$ allora, dato che $g$ è continua, $g \circ f : X \to Y$ è continua. Ma $g \circ f = \iota_Y \circ f = f$ dunque $f$ è continua su $Y$,inoltre $f$ è continua anche su $Y$ dotato della topologia quoziente per definizione stessa della topologia quoziente. Da cui si ottiene che $\iota'_Y : (Y, \tau) \to (Y, \tau_Q)$, dove $\tau$ è la topologia su $Y$ rispetto alla quale $f$ rispetta la proprietà universale del quoziente e $\tau_Q$ è la topologia quoziente rispetto ad $f$, é continua ( in quanto sia $f : X \to (Y, \tau)$ che $\iota'_Y \circ f = f : X \to (Y, \tau_Q)$ sono continue), Per la stessa ragione è continua $\iota''_Y : (Y, \tau_Q) \to (Y, \tau)$, e dato che sono una l'inversa dell'altra, otteniamo che $\tau \cong \tau_Q$. Dunque $f$ è un'identificazione. □

COROLLARY 3.10. *(Passaggio al quoziente) Sia $f : X \to Y$ un'identificazione, sia $g : X \to Z$ continua e costante sulle fibre di $f$ , ciò significa che $f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y)$. $\exists!\, \tilde{g} : Y \to Z$ continua tale che $g = \tilde{g} \circ f$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $\tilde{g}(x) := g(f^{-1}(x))$ dove $f^{-1}$ è un'inversa destra di $f$. $\tilde{g}$ non dipende dall'inversa destra di $f$ utilizzata in quanto $g$ è costante sulle fibre di $f$. Infatti se $y, y'$ sono due contro-immagini di $x$, $f(y) = f(y') \implies g(y) = g(y')$ e da questo seguono esistenza ed unicità. Inoltre $\tilde{g} \circ f = g \circ f^{-1} \circ f = g$. La continuità segue dalla proprietà universale del quoziente. □

Ed ora per terminare identifichiamo in maniera unica gli spazi quoziente.

COROLLARY 3.11. *( Unicità del quoziente) Siano $f : X \to Y$ ed $g : X \to Z$ due identificazioni tali che siano l'una costante sulle fibre dell'altra. Allora esiste un unico omeomorfismo $\varphi : Y \to Z$ tale che $\varphi \circ f = g$.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Dopo i richiami di topologia, passiamo a definire il concetto di varietà differenziabile.

### 3.1.2. Varietà differenziabili e funzioni su varietà.

DEFINITION 3.12. Una varietà differenziabile n dimensionale, o n varietà, è la coppia $(\mathcal{M}, \mathfrak{A})$; dove $\mathcal{M}$ è un insieme, e $\mathfrak{A}$ è una famiglia di coppie:

$$\mathfrak{A} = \{(f_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A},$$

dove $f_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}$, sono applicazioni infettive, da un aperto $U_\alpha$ di $\mathbb{R}^n$[5] in $\mathcal{M}$, tali che:

[5] Dove l'$n$ è la dimensione della varietà.

(1) $\bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha(U_\alpha) = \mathcal{M}$, ovvero tali che le immagini delle $f_\alpha$ siano un ricoprimento di $\mathcal{M}$.

(2) Per ogni coppia $\alpha, \beta \in A$ tale che $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ si abbia che, $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ siano aperti di $\mathbb{R}^n$ e le applicazioni $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ e $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ siano differenziabili.

(3) La famiglia $\mathfrak{A}$ sia una famiglia massimale che rispetti le 1) e le 2).

(4) La topologia su $\mathcal{M}$ data dalle $f_\alpha$[6] è $T_2$ e $N_2$.

La coppia $(f_\alpha, U_\alpha)$ , con $p \in f_\alpha(U_\alpha)$, è detta parametrizzazione, o sistema di coordinate, di $\mathcal{M}$ in $p$; L'insieme $f_\alpha(U_\alpha)$ è detto intorno coordinato di $p$, ed infine la famiglia $\mathfrak{A}$ è detta struttura differenziabile su $\mathcal{M}$.

La terza condizione della definizione precedente è del tutto tecnica. In realtà la possiamo sempre supporre, infatti una volta trovata una struttura $\mathfrak{B} = \{(g_\beta, V_\beta)\}$ che rispetti le prime due proprietà, per ottenere una struttura differenziabile è sufficiente, e necessario, aggiungere tutte le coppie $(f_\alpha, U_\alpha)$, che insieme agli elementi di $\mathfrak{B}$ rispettino la 2) della definizione precedente. La massimalità verrà dunque supposta qualora sia necessaria o utile. Infine una piccola parentesi nella notazione, qualora si abbia una varietà differenziabile $\mathcal{M}$, di dimensione $n$, questa verrà denotata $\mathcal{M}^n$,in altri termini: in generale indicheremo la dimensione di una varietà come indice in alto a destra.

Definition 3.13. Siano $\mathcal{N}^n$ e $\mathcal{M}^m$ due varietà differenziabili. Una applicazione $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ è detta differenziabile, in un punto $p \in \mathcal{N}$, se e solo se data una parametrizzazione in $p$, diciamola $f$, ed una in $\varphi(p)$, diciamola $g$, abbiamo che $g^{-1} \circ \varphi \circ f$ è differenziabile, come applicazione da $\mathbb{R}^n$in $\mathbb{R}^m$, in $f^{-1}(p)$. Infine $\varphi$è differenziabile in un aperto $U$ di $\mathcal{N}$ se e solo se è differenziabile in tutti i punti di $U$.

[6] Un aperto $A$ su $\mathcal{M}$ è tale se e solo se per ogni $\alpha$, tale che $A \cap f_\alpha(U_\alpha) \neq \emptyset$, vale che $f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha))$ è un aperto.

Facciamo notare che un'applicazione differenziabile non dipende dalla parametrizzazione in $p$, o in $\varphi(p)$, scelta in quanto il cambiamento di sistema di coordinate è differenziabile per definizione di varietà. Definite le applicazioni differenziabili tra varietà , possiamo vedere un caso particolare di applicazione da $\mathbb{R}$ su una varietà $\mathcal{M}$, ovvero un curva su $\mathcal{M}$.

DEFINITION 3.14. Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile una curva continua è un'applicazione $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, che va da un intervallo di $\mathbb{R}$ in $\mathcal{M}$, continua. La curva è detta differenziabile a tratti se $\gamma$ è differenziabile eccetto in un numero finito di punti $\{t_k\}$, dove resta continua e differenziabile a destra ed a sinistra, in $t_k$, l'applicazione $\varphi_k^{-1} \circ \gamma$, con $\varphi_k$ una parametrizzazione in un intorno di $\gamma(t_k)$, per ogni $k$.

Definito il concetto di curva su una varietà differenziabile possiamo introdurre il concetto di vettore tangente ad una varietà e di spazio tangente.

DEFINITION 3.15. Sia $\mathcal{M}^n$ una varietà differenziabile; indichiamo con $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ , l'insieme di tutte le funzioni differenziabili da $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}$. Sia inoltre $p \in \mathcal{M}$, data una curva $\alpha : (-a, a) \to \mathcal{M}$ differenziabile, un vettore tangente a $\mathcal{M}$ in $p$ è l'applicazione

$$\alpha'(0) : \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R},$$

data da $\alpha'(0)[\varphi] = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)_{|0}$, dove si suppone che $\alpha(0) = p$. L'insieme dei vettori tangenti in $p$ verrà indicato con $T_p(\mathcal{M})$, ed è detto spazio tangente ad $\mathcal{M}$ in $p$.

Dunque un vettore tangente ad una varietà in un punto $p$ non è nient'altro che un vettore tangente da una curva, passante per $p$, in $p$. Per ciò che riguarda l'insieme dei vettori tangenti in un punto ad una varietà, abbiamo il seguente:

THEOREM 3.16. *Data una varietà differenziabile $\mathcal{M}^n$ ed un punto $p$ di $\mathcal{M}$, abbiamo che $T_p(\mathcal{M})$ è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale di dimensione $n$. Inoltre una base di questo è* *data da $\{\partial_{i_{|0}}\}_{1\leq i\leq n}$, dove con $\partial_i$ viene indicata il vettore tangente a*

$$\gamma(t) = f_\alpha(x_1^p, ..., x_{i-1}^p, x_i^p + t, x_{i+1}^p, ..., x_n^p),$$

*dove con $f_\alpha$ è indicata una parametrizzazione in $p$,$p = f(x_1^p, ..., x_{i-1}^p, x_i^p, x_{i+1}^p, ..., x_n^p)$ e $t$ varia in maniera tale che $(x_1^p, ..., x_{i-1}^p, x_i^p + t, x_{i+1}^p, ..., x_n^p) \in U_\alpha$. L'insieme $\{\partial_{i_{|0}}\}_{1\leq i\leq n}$, è detto base associata alla parametrizzazione $f_\alpha$.*

Dimostrazione. Sia $T_f$ lo spazio generato da $\{\partial_i\}_p$, è sufficiente dimostrare che $T_f = T_p(\mathcal{M})$. Evidente è il fatto che $T_f \subseteq T_p(\mathcal{M})$. Consideriamo $v = \beta'(0) \in T_p(\mathcal{M})$, posti:

$$f_\alpha^{-1} \circ \beta(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)),$$

$$\varphi \circ f(q) = \varphi(x_1, ..., x_n);$$

abbiamo $\varphi \circ \beta = (\varphi \circ f) \circ (f^{-1} \circ \beta)$, e dunque:

$$v_p[\varphi] = \beta'(0)[\varphi] = \sum_i x_i^{'}(0)\partial_i[\varphi].$$

Questo prova l'asserto. □

Grazie alla nozione di spazio tangente possiamo ora definire quella di differenziale di un'applicazione $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

Definition 3.17. Siano $\mathcal{N}^n$ e $\mathcal{M}^m$ due varietà differenziabili e $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ un'applicazione differenziabile. Per ogni $p \in \mathcal{N}$, il differenziale di $\varphi$ in $p$ è l'applicazione lineare $d\varphi_p : T_p(\mathcal{N}) \to T_{\varphi(p)}(\mathcal{M})$ che a ciascun vettore $v \in T_p(\mathcal{N})$ associa il vettore $d\varphi_p[v] \in T_p(\mathcal{M})$, definito nel modo seguente: data una curva $\alpha$ su $\mathcal{N}$ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$; allora $d\varphi_p[v] = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)'_{|0}$.

Per far si che la definizione abbia senso, è necessario mostrare che la definizione di differenziale non dipende dalla curva $\alpha$ scelta ed il fatto che il differenziale è lineare. Questo può esser facilmente provato considerando una parametrizzazione in un intorno di $p$ e riducendo il tutto al caso di una applicazione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, dove le proprietà possono esser facilmente provate.[7] Inoltre andrebbe verificato che la definizione è compatibile con quella data, nel caso di applicazioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, nel primo capitolo. Ma queste esulano dalla nostra trattazione e dunque verrano assunte come dati di fatto.

DEFINITION 3.18. Siano $\mathcal{N}^n$ e $\mathcal{M}^m$ due varietà differenziabili e $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ un'applicazione. Questa è detta diffeomorfismo se e solo se è differenziabile, biunivoca e con inversa differenziabile. Mentre $\varphi$ è detta diffeomorfismo locale in $p \in \mathcal{N}$, se e solo se esiste un intorno di $p$, diciamolo $U$, ed uno di $\varphi(p)$, diciamolo $V$, tale che $\varphi : U \to V$ sia un diffeomorfismo. Indicheremo con $\simeq$ la presenza di un diffeomorfismo e con $\simeq_L$ quella di un diffeomorfismo locale.

THEOREM 3.19. *(di inversione locale)Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $p \in U$, tali che:*

(1) *$f$ sia differenziabile in $p$.*
(2) *$Det(df_p) \neq 0$.*

*Allora esiste un intorno $V_p$ di $p$ tale che $f_{|V_p}$ sia un diffeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Trattandosi di un teorema locale, il 3.19, si estende immediatamente alle varietà differenziabili, nel seguente:

THEOREM 3.20. *(di inversione locale su varietà)Siano $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ due varietà differenziabili, sia $f : U \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ e $p \in U$, tali che:*

(1) *$f$ sia differenziabile in $p$.*
(2) *$df_p$ sia iniettiva.*

*Allora esiste un intorno $V_p$ di $p$ tale che $f_{|V_p}$ sia un diffeomorfismo.*

[7] Per una dimostrazione nel caso $n = 2$ e $m = 3$, si veda il paragrafo 2.4 del [**DoCDG**].

DIMOSTRAZIONE. Discende direttamente dal fatto che il cambio di coordinate è un diffeomorfismo e dal teorema di inversione locale. □

Enunciamo un ulteriore risultato sui diffeomorfismi senza però fornirne la dimostrazione.

THEOREM 3.21. *Siano $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ due varietà differenziabili lisce di dimensione $n \leq 3$, allora esse sono diffeomorfe se e solo se esse sono omeomorfe.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Infine, per chiudere questa parte della prima sezione, definiamo altri due tipi di funzioni tra varietà: l'immersione e l' embedding. Introducendo nel contempo il concetto di sottovarietà. Ma passiamo alle definizioni:

DEFINITION 3.22. Siano $\mathcal{N}^n$ e $\mathcal{M}^m$ due varietà differenziabili. Una applicazione differenziabile $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ è detta immersione se e solo se, per ogni $p \in \mathcal{N}$, abbiamo che $d\varphi_p : T_p(\mathcal{N}) \to T_p(\mathcal{M})$ è iniettiva. Se, oltre ad essere un immersione, $\varphi$ è tale da essere un omeomorfismo tra $\mathcal{N}$ e $\varphi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}$, quest'ultimo dotato della topologia indotta de $\mathcal{M}$[8], allora diremo che $\varphi$è un embedding. Infine, se $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ e l'inclusione $i : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{M}$ è un embedding, allora $\mathcal{L}$ è detta sottovarietà di $\mathcal{M}$.

Concluso con le definizioni ed i teoremi base riguardanti varietà e funzioni tra varietà, introduciamo ora il concetto di forma differenziale su una varietà ed il concetto di campo di vettori, introducendo alcuni operatori che legano i due.

**3.1.3. Forme differenziali e campi di vettori su varietà.** Ora estenderemo al caso di varietà differenziabili la nozione di forma differenziale vista nel capitolo 1.

[8]Un insieme è aperto se e solo se è un aperto di $\mathcal{M}$ intersecato con $\varphi(\mathcal{N})$.

DEFINITION 3.23. Sia $\mathcal{M}^m$ una varietà differenziabile. una forma esterna di grado $k$ , $\omega$,in $\mathcal{M}$ è un'applicazione che ad ogni punto $p$ di $\mathcal{M}$, assegna un elemento dello spazio , $\Lambda^k(T_p(\mathcal{M}))^*$ delle forme alternate e lineari dello spazio tangente $T_p(\mathcal{M})$. Data una forma esterna di grado $k$ su $\mathcal{M}$, diciamola $\omega$, ed una parametrizzazione $f_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{M}$, attorno ad un punto $p$, definiamo la rappresentazione di $\omega$ in questa parametrizzazione come la forma esterna di grado $k$, $\omega_\alpha$, in $U_\alpha$ data da:

$$\omega_\alpha[v_1, ..., v_k] = \omega[df_\alpha[v_1], ..., df_\alpha[v_k]],$$

con $v_i \in \mathbb{R}^m$.

REMARK 3.24. Si può dimostrare che una rappresentazione di una certa forma differenziale $\omega$, in un dato aperto $V \subseteq f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta)$, dipende dalla parametrizzazione, nella maniera seguente:

$$\omega_\alpha = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta,$$

Inoltre ad ogni sistema di rappresentazioni, su un ricoprimento di $\mathcal{M}$, viene univocamente associata una forma esterna.

Grazie a questa osservazione possiamo definire finalmente il concetto di forma differenziale su una varietà.

DEFINITION 3.25. Una forma differenziale di ordine $k$ su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ è una forma esterna di grado $k$ su $\mathcal{M}$, tale che, una volta scelto un ricoprimento[9] $\mathfrak{R}$ di $\mathcal{M}$ tratto dalla struttura differenziale, la sua rappresentazione sia, su ciascun sistema di coordinate di $\mathfrak{R}$, una forma differenziale. Analogamente possiamo definire una forma differenziale definita su un aperto $U$ di $\mathcal{M}$, sostituendo al posto di $\mathcal{M}$, $U \subseteq \mathcal{M}$ nella parte precedente della definizione.

[9] In generale un ricoprimento di un insieme $X$ è una famiglia di insiemi $\{U_i\}_{i\in I}$, tale che $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. In questo paragrafo viene utilizzato in senso improprio, e va ad indicare un sottoinsieme di una struttura differenziabile tale che rispetti le proprietà 1,2,4 della definizione 3.12, ma non necessariamente la 3.

Qui possiamo notare l'importanza dell'osservazione 3.24, infatti, il fatto che la rappresentazione non dipenda dalla parametrizzazione che per un passaggio di coordinate differenziabile, ci assicura che se una forma ha una rappresentazione differenziale in un dato ricoprimento, estratto dalla struttura differenziale di $\mathcal{M}$, allora lo è in tutti i possibili ricoprimenti che possiamo estrarre. Dunque restano ben definite le forme differenziali su una varietà. Tutte le operazioni definite precedentemente sulle forme differenziali in $\mathbb{R}^n$ possono venir estese al caso di una varietà differenziabile tramite la loro rappresentazione, ovvero:

Definition 3.26. Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile. Sia $\mathfrak{O}$ un'operatore, tra quelli definiti nel primo capitolo, che agisce su $n$ forme differenziali in $\mathbb{R}^m$, e ad esse associa una forma differenziale in $\mathbb{R}^m$. Allora definiamo $\mathfrak{O}$ su $\mathcal{M}$, come l'operatore che date $\omega_1, ..., \omega_n$ forme differenziali su $\mathcal{M}$, ad esse associa la forma differenziale su $\mathcal{M}$ che, per ciascuna parametrizzazione $f_\alpha$, ha rappresentazione:

$$\mathfrak{O}[\omega_1, ..., \omega_n]_\alpha = \mathfrak{O}[\omega_1^\alpha, ..., \omega_n^\alpha],$$

dove con $\omega_i^\alpha$ si indica la rappresentazione di $\omega_i$ nella parametrizzazione $f_\alpha$.

Questa resta ben definita per l'osservazione 3.24 e per le proprietà delle operazioni definite nel primo capitolo[10], d'ora in avanti quando parleremo delle operazioni definite nel capitolo uno sottintenderemo il fatto che si parlerà delle stesse ma generalizzate al contesto di una generica varietà differenziabile. Per chiarire bene le modalità con la quale si è operata tale generalizzazione, vediamone un esempio: il differenziale esterno.

Example. Sia $\mathcal{M}^n$ una varietà differenziabile e $\omega$ una forma differenziale definita su $\mathcal{M}$. Il differenziale esterno di $\omega$, indicato con $d\omega$ è quella forma differenziale la

[10] In generale infatti per queste vale:

$$f^*\mathfrak{O}[\omega_1, ..., \omega_h] = \mathfrak{O}[f^*\omega_1, ..., f^*\omega_h].$$

cui rappresentazione locale è $d(\omega_\alpha)$. Poiché:

$$d\omega_\alpha = d(\omega_\alpha) = d[(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta] = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* d(\omega_\beta),$$

$d\omega$ resta dunque ben definito.

Vediamo ora un concetto strettamente legato a quello di forma differenziale, ovvero la nozione di campo di vettori su una varietà.

DEFINITION 3.27. Sia $\mathcal{M}$ una varietà, un campo di vettori $X$ su $\mathcal{M}$ è un'applicazione che a ciascun punto $p \in \mathcal{M}$ associa un vettore tangente $X(p) \in T_p(\mathcal{M})$. Un campo di vettori è detto differenziabile se e solo se, per ogni $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, si ha che $X[\varphi] : \mathcal{M} \to \mathbb{R} : p \mapsto X(p)[\varphi]$ è un'applicazione differenziabile.

Dato un certo campo di vettori $X$ su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$, sia $f_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{M}$ un parametrizzazione di $\mathcal{M}$; allora il nostro campo di vettori può esser scritto, in $f_\alpha(U_\alpha)$, come

$$X = \sum_i a_i \partial_i,$$

con $\partial_i$ la base associata a $f_\alpha$. Inoltre dato che un campo di vettori può esser visto come un'operazione in $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$, che a $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ associa $X[\varphi] \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, possiamo iterarla, e considerare per esempio, dato un altro campo di vettori $Y$, $X[Y[\varphi]]$ o $Y[X[\varphi]]$. In generale quest'operazione coinvolge derivate di ordine superiore al primo. Nonostante ciò vale il seguente:

LEMMA 3.28. *Siano $X$ e $Y$ due campi di vettori differenziabili su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$. Allora esiste un unico campo di vettori $Z$ su $\mathcal{M}$, tale che, per ogni $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, valga:*

$$Z[\varphi] = (XY - YX)[\varphi] = X[Y[\varphi]] - Y[X[\varphi]].$$

Dimostrazione. Sia $f : U \to \mathcal{M}$ una parametrizzazione, mostriamo che $Z$ esiste in $f$ poi mostriamo che è unico ed infine mostriamo che definito nelle parametrizzazioni $f_\alpha$ e $f_\beta$, indichiamolo come $Z_\alpha$ e $Z_\beta$, allora si ha $Z_\alpha = Z_\beta$ dunque $Z$ resta ben definito globalmente. Iniziamo con il calcolare $XY$ e $YX$:

$$XY[\varphi] = X\left(\sum_i b_i\partial_i\varphi\right) = \sum_{i,j} a_j b_i \partial_{ij}\varphi + \sum_{i,j} a_j\partial_j b_i\partial_i\varphi,$$

$$YX[\varphi] = Y\left(\sum_i a_i\partial_i\varphi\right) = \sum_{i,j} b_j a_i \partial_{ji}\varphi + \sum_{j,i} b_j\partial_j a_i\partial_i\varphi,$$

dunque:

$$(XY - YX)[\varphi] = \sum_{i,j}(a_j\partial_j b_i - b_j\partial_j a_i)\partial_i\varphi.$$

Dunque $Z$ può esser espresso in un qualsiasi sistema di coordinate nella forma data sopra e questo ne prova l'unicità. $\square$

Denoteremo con $XY\varphi$ la funzione $X[Y[\varphi]]$ e con $X\varphi = X[\varphi]$, qualora non sorgano delle ambiguità. Inoltre facciamo notare che dato un campo di vettori $X$ ed una funzione differenziabile $\varphi$, possiamo definire un nuovo campo di vettori $\varphi X$, che al punto $p$ associa il vettore $\varphi(p) \cdot X(p)$.

Definition 3.29. Il campo di vettori $(XY - YX)\varphi$ dato dal lemma 3.28, è detto parentesi di $X$ e $Y$, ed è denotato come:

$$[X, Y] = XY - YX,$$

infine questo è chiaramente differenziabile.

L'operatore parentesi gode delle proprietà seguenti:

Proposition 3.30. *Siano $X$, $Y$ e $Z$ dei campi di vettori su una varietà $\mathcal{M}$, $a$ e $b$ due numeri reali ed infine $\varphi$ e $\theta$ due funzioni appartenenti a $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Allora:*

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$.

(2) $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$.

(3) $[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]+[[Y,Z],X]=0$.

(4) $[\theta X,\varphi Y]=\varphi\theta[X,Y]+\theta X[\varphi]Y-\varphi Y[\theta]X$.

Dimostrazione. Consideriamo una parametrizzazione $f$, poi per l'unicità delle parentesi di Poisson tutti i punti risulteranno globalmente dimostrati. Poniamo:

$$X=\sum_i a_i\partial_i,\quad Y=\sum_i b_i\partial_i,$$

$$Z=\sum_i c_i\partial_i.$$

(1)

$$[X,Y][\varphi]=(XY-YX)[\varphi]=\sum_{i,j}(a_j\partial_j b_i-b_j\partial_j a_i)\partial_i\varphi=$$

$$=-\sum_{i,j}(b_j\partial_j a_i-a_j\partial_j b_i)\partial_i\varphi=-(YX-XY)[\varphi]=-[Y,X][\varphi].$$

(2)

$$[\alpha X+\beta Y,Z]=\sum_{i,j}[(\alpha a_j+\beta b_j)\partial_j c_i-c_j\partial_j(\alpha a_i+\beta b_i)]\partial_i=$$

$$=\alpha\sum_{i,j}(a_j\partial_j c_i-c_j\partial_j a_i)\partial_i+\beta\sum_{i,j}(b_j\partial_j c_i-c_j\partial_j b_i)\partial_i=\alpha[X,Z]+\beta[Y,Z].$$

(3)

$$[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]=[XY-YX,Z]+[ZX-XZ,Y]=$$

$$=XYZ-ZXY+ZYX-YXZ+ZXY-XZY-YZX+YXZ=$$

$$=XYZ+ZYX-YZX-XZY=[X,YZ-ZY]=-[[Y,Z],X]$$

(4)

$$[\varphi X,\theta Y]=\sum_{i,j}(\varphi a_j\partial_j(\theta b_i)-\theta b_j\partial_j(\varphi a_i)\partial_i=\sum_{i,j}\varphi a_j\theta\partial_j b_i\partial_i+\sum_{i,j}\varphi a_j b_i\partial_j\theta\partial_i+$$

$$-\sum_{i,j}\theta b_j\varphi\partial_j a_i\partial_i-\sum_{i,j}\theta b_j a_i\partial_j\varphi\partial_i=\varphi\theta[X,Y]+\varphi Y(\theta)X-\theta X(\varphi)Y.$$

□

Esiste, inoltre, una relazione interessante tra il differenziale esterno e l'operatore partentesi. Nel caso delle uno forme può esser riassunto nel seguente:

PROPOSITION 3.31. *Sia $\omega$ una 1-forma differenziale su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$, e siano $X$, $Y$ due campi di vettori differenziabili sulla stessa. Allora:*

$$d\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(Y)-\omega([X,Y]).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $f$ una parametrizzazione id $\mathcal{M}$, siano inoltre:

$$X=\sum_i a_i\partial_i,\quad Y=\sum_i b_i\partial_i,$$

Notiamo, che par la bilinearità di $d\omega$ e la linearità di $\omega$, se ciò vale su una famiglia di campi di vettori $X_i$, allora continua a valere per la loro somma. Supponiamo che la proposizione valga per i campi $X,Y$ ,allora:

$$d\omega(\alpha X,\beta Y)=\alpha\beta d\omega(X,Y)=\alpha\beta(X\omega(Y)-Y\omega(Y)-\omega([X,Y]))=$$

$$=\alpha X\omega(\beta Y)-\beta Y\omega(\alpha X)-\omega([\alpha X,\beta Y]).$$

Dunque è sufficiente dimostrare l'affermazione sui campi di vettori di base, $\{\partial_i\}$ e questo vale per ogni campo di vettori. Osserviamo che $[\partial_i,\partial_j]=0$, dunque è sufficiente provare:

$$d\omega(\partial_i,\partial_j)=\partial_i\omega(\partial_j)-\partial_j\omega(\partial_i).$$

Per la linearità del differenziale è sufficiente mostrare che vale:

$$d(\alpha dx_k)(\partial_i,\partial_j)=\partial_i\alpha dx_k(\partial_j)-\partial_j\alpha dx_k(\partial_i).$$

$$d(\alpha dx_k)(\partial_i,\partial_j)=d\alpha\wedge dx_k(\partial_i,\partial_j)=\sum_h\partial_h\alpha dx_h\wedge dx_k[\partial_i,\partial_j]=$$

$$= \sum_h \partial_h \alpha \delta_h^i \delta_k^j - \sum_h \partial_h \alpha \delta_h^j \delta_k^i = \partial_i \alpha \delta_k^j - \partial_j \alpha \delta_k^i =$$

$$= \partial_i \alpha dx_k(\partial_j) - \partial_j \alpha dx_k(\partial_i).$$

□

E può essere generalizzata al caso di $k$-forme.

Proposition 3.32. *Sia $\omega$ una k-forma differenziabile e $X_1, ..., X_{k+1}$ dei campi di vettori differenziabili. Allora:*

$$d\omega(X_1, ..., X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} [(-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{k+1}) +$$

$$+ \sum_{i<j}^{k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{k+1})].$$

*Dove $\hat{X}_i$ vuol dire che manca $X_i$.*

Dimostrazione. Omessa. Per dimostrare questo fatto si utilizza sostanzialmente la stessa dimostrazione usata per il precedente. □

Concludiamo questa prima sezione con la nozione di orientabilità.

Definition 3.33. Una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ è detta orientabile se $\mathcal{M}$ possiede una struttura differenziabile $\{(f_\alpha, U_\alpha)\}$ tale che, per ogni coppia $\alpha, \beta$ per cui si ha $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, il determinate del cambiamento di coordinate $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ sia positivo. In caso contrario $\mathcal{M}$ è detta non orientabile. Se $\mathcal{M}$ è orientabile, la scelta di una particolare struttura differenziabile che rispetti le condizioni sopracitate è detta un'orientazione di $\mathcal{M}$.

Infine diamo un piccolo lemma sull'orientabilità che verrà utilizzato nel seguito.

LEMMA 3.34. *(sulle varietà orientabili)*

*Sia $\mathcal{M}$ una varietà orientabile e sia $\mathcal{U}$ un aperto di $\mathcal{M}$. Allora $\mathcal{U}$ è una varietà orientabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{A} = \{(f_i, U_i)\}$ un struttura differenziabile su $\mathcal{M}$. Definiamo allora $\mathfrak{B} = \{(f_i, U_i \cap f_i^{-1}(\mathcal{U}))\}$, poiché $\mathcal{U}$ è un aperto e $f_i$ è un omeomorfismo, abbiamo che $V_i = U_i \cap f_i^{-1}(\mathcal{U})$ è un aperto. Banalmente $\mathfrak{B}$ rispetta tutte le proprietà di una struttura differenziabile su $\mathcal{U}$. Se consideriamo il determinante della matrice di $d(f_j^{-1} \circ f_i)$ in un punto $p \in f_i^{-1}(f_i(V_i) \cap f_j(U_j)) \cap f_i^{-1}(\mathcal{U})$ questo sarà positivo in quanto lo era anche in $f_i^{-1}(f_i(V_i) \cap f_j(U_j))$. $\square$

### 3.2. Risoluzione degli esercizi sulle varietà differenziabili.

Prima di procedere con lo svolgimento degli esercizi apriamo una piccola parentesi sulla notazione. Sia $\mathfrak{I}$ un insieme e $\sim$ una relazione di equivalenza su $\mathfrak{I}$. Indicheremo l'insieme quoziente di $\mathfrak{I}$ rispetto a $\sim$ come $\frac{\mathfrak{I}}{\sim}$ . Indicheremo inoltre la classe di $x \in \mathfrak{I}$ rispetta $\sim$ come $[x]_\sim$. Qualora la relazione sia chiara dal contesto, o non sorgano comunque ambiguità, indicheremo la classe di $x$ come $[x]$. Qualsiasi altra notazione verrà specificata nel contesto. Proseguiamo ora con gli esercizi.

EXERCISE. 3.1

Sia $\mathbb{PR}^n \overset{def}{=} \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{n+1}}\}}{\sim_\lambda}$, dove $\sim_\lambda$e la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}_0^{n+1} \overset{def}{=} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$ definita da $v \ \sim_\lambda \ w \iff v = \mu w$ con $w, v \ \in \mathbb{R}_0^{n+1}$e $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{PR}^n$ verrà detto piano ( o spazio ) proiettivo reale di dimensione n ( per abbreviare talvolta verrà indicato come n-proiettivo o proiettivo di dimensione n) . Lo scopo dell'esercizio è dimostrare che $\mathbb{PR}^n$è una varietà differenziabile di dimensione n.

**Svolgimento:**

Per prima cosa definiamo una famiglia di insiemi contenuti nel n-proiettivo.

$$U_i \overset{def}{=} \{[(x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1})]_{\sim_\lambda} \in \mathbb{PR}^n \mid x_i \neq 0\} \; con \; i \in \{1, ..., n\}.$$

Ora definiamo due famiglie di funzioni:

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n : [(x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1})] \mapsto (\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}).$$

$$\psi_i : \mathbb{R}^n \to U_i : (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \mapsto [(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_i, ..., x_n)], \; con \; i \in \{1, ..., n\}.$$

Mostriamo innanzitutto che le $\varphi_i$ sono ben definite; Siano $x = (x_1, ..., x_{n+1})$ e $y = (y_1, ..., y_{n+1})$ due elementi della stessa classe. Questo vuol dire che $\exists \, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x = \mu y$, calcoliamo

$$\varphi_i([x]) = (\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}) = (\frac{\mu x_1}{\mu x_i}, ..., \frac{\mu x_{i-1}}{\mu x_i}, \frac{\mu x_{i+1}}{\mu x_i}, ..., \frac{\mu x_{n+1}}{\mu x_i}) =$$

$$= (\frac{y_1}{y_i}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, ..., \frac{y_{n+1}}{y_i}) = \varphi_i([y])$$

.$\square$ Consideriamo

$$\psi_i \circ \varphi_i([x]) = \psi_i((\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i})) = [(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i})] =$$

$$= [(x_i \frac{x_1}{x_i}, ..., x_i \frac{x_{i-1}}{x_i}, x_i, x_i \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., x_i \frac{x_n}{x_i})] = [(x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1})] = \iota_{U_i}([x]).$$

Sia $z = (z_1, ..., z_n)$ vediamo ora

$$\varphi_i \circ \psi_i(z) = \varphi_i([(z_1, ..., z_{i-1}, 1, z_i, ..., z_n)]) = (\frac{z_1}{1}, ..., \frac{z_{i-1}}{1}, \frac{z_i}{1}, ..., \frac{z_n}{1}) = z = \iota_{\mathbb{R}^n}(z)$$

. Questo prova che le $\psi_i$ sono bijettive e che $\psi_i^{-1} = \varphi_i$. (1) $\square$

Inoltre sia $[x] \in \mathbb{PR}^n$ allora $x \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$dunque esiste una sua coordinata differente da 0, detto in altri termini

$$\exists \, i \in 1, ..., n \mid [x] \in U_i = \psi_i(\mathbb{R}^n) \implies \bigcup_{i=1}^{n} \psi_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{PR}^n$$

. (2) $\square$

Siano $i$, $j$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, consideriamo $z \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$ ,facciamo notare che $z_j \neq 0$ , e

$$\xi_{i,j}(z) \overset{def}{=} \psi_i^{-1} \circ \psi_j(z) = \varphi_i \circ \psi_j\,(z) = \varphi_i([(z_1, ..., z_{j-1}, 1, z_j, ..., z_n)]) =$$

$$= (\frac{z_1}{z_i}, ..., \frac{1}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_i}, \frac{z_j}{z_i}, ..., \frac{z_n}{z_j})$$

è chiaramente differenziabile. (3) $\square$

$\mathbb{PR}^n$è uno spazio quoziente dal punto di vista topologico, si può dimostrare ( vedere [**LoiT**]) che la topologia quoziente su $\mathbb{PR}^n$ è omeomorfa alla topologia generata dalle $\psi_i$. Per verificare che sia $N_2$ e $T_2$ verifichiamo anzitutto che la relazione $\sim_\lambda$ è una relazione aperta.[11] Sia $\phi_t : \mathbb{R}_0^{n+1} \to \mathbb{R}_0^{n+1} : x \mapsto tx$ , questo è un omeomorfismo. Sia inoltre $\pi : \mathbb{R}_0^{n+1} \to \mathbb{PR}^n : x \mapsto [x]$ la proiezione canonica, dato $U$ aperto di $\mathbb{R}_0^{n+1}$allora $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \phi_t(U)$ quindi è aperto. Dato che lo spazio quoziente di uno spazio $N_2$ tramite una relazione aperta è $N_2$, abbiamo che $\mathbb{PR}^n$ è $N_2$. Sia $X$ uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza su $X$ , definiamo il seguente insieme :

$$R_X \overset{def}{=} \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

Sia

$$\xi : \mathbb{R}_0^{n+1} \times \mathbb{R}_0^{n+1} \to \mathbb{R} : ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \mapsto \sum_{j,i=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

, questa è continua dunque la controimmagine di un chiuso è un chiuso e $R_{\mathbb{PR}^2} = \xi^{-1}(\{0\})$. Infine, dato che se l'insieme $R_X$ è un chiuso in $X \times X$ , con la topologia prodotto, allora lo spazio quoziente ottenuto tramite relazione aperta è $T_2$, otteniamo la (4). [12]$\square$ Dunque abbiamo che $\mathfrak{A} = \{(\psi_i, \mathbb{R}^n)\}$ è una struttura differenziabile su $\mathbb{PR}^n$. Q.E.D.

---

[11]Una relazione di equivalenza si dice aperta se dato un aperto U nello spazio da quozientare, allora la contro-immagine della proiezione di U è un aperto.

[12]Per maggiori dettagli sulla dimostrazione del (4) si rinvia a [LoiT] Capitolo 11.

Exercise. 3.2

Siano $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ due varietà differenziabili. Siano inoltre $\{(f_\alpha, U_\alpha)\}$ e $\{(g_\beta, V_\beta)\}$ due strutture differenziabili su $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$, rispettivamente. Si consideri il prodotto cartesiano $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$ e le funzioni

$$h_{\beta\alpha} : V_\beta \times U_\alpha \to \mathcal{N} \times \mathcal{M} \ : \ (x, y) \ \mapsto (g_\beta(x), f_\alpha(y))$$

. L'esercizio si compone di due parti :

(1) Si dimostri che $\{(h_{\beta\alpha}, V_\beta \times U_\alpha)\}$ è una struttura differenziabile su $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$, che verrà chiamata varietà prodotto.
(2) Si descriva il prodotto $S^1 \times S^1$ , dove $S^1$è la 1-sfera di $\mathbb{R}^2$ con l'usuale struttura differenziabile.

**Svolgimento:**

Innanzitutto è ovvia la biunivocità di $h_{\beta\alpha}$ per ogni coppia $(\beta, \alpha)$ , l'inversa è

$$k_{\beta\alpha} : \mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \ V_\beta \times U_\alpha : \ (x, y) \ \mapsto (g_\beta^{-1}(x), f_\alpha^{-1}(y)). \quad (1)$$

Inoltre è chiaro il fatto che $\mathcal{N} \times \mathcal{M} = \bigcup_{\beta,\alpha} h_{\beta,\alpha}(V_\beta \times U_\alpha)$ .(2) $\square$

Se $V_\beta \times U_\alpha \cap V_{\beta'} \times U_{\alpha'} \neq \emptyset$ allora

$$h_{\beta\alpha}^{-1} \circ h_{\beta'\alpha'}(x, y) = (g_\beta^{-1} \circ g_{\beta'}(x), f_\alpha^{-1} \circ f_{\alpha'}(y))$$

è differenziabile per componenti e dunque differenziabile. (3)

Rimane da vedere che cosa è $S^1 \times S^1$. Consideriamo la parametrizzazione del toro in $\mathbb{R}^3$,

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 : (u, v) \mapsto ((R{+}rcos(2\pi u))cos(2\pi v), (R{+}rcos(2\pi u))sin(2\pi v), rsin(2\pi u)),$$

supponendo l'equazione cartesiana di $\mathbb{T}^2$ la seguente:

$$\mathbb{T}^2 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

$\Phi$ ricopre il toro bidimensionale ed è continua. Da questa ci rendiamo conto che ciascun punto del toro può esser identificato dalla coppia di angoli ($2\pi u$,$2\pi v$).Potremmo cercare di utilizzare questi angoli per parametrizzare i due cerchi $S^1 \times S^1$. Consideriamo l'applicazione:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((R + rx_3)x_1, (R + rx_3)x_2, 3x_4)$$

questa è continua e l'applicazione continua

$$G(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)}{r}, \frac{x_3}{r})$$

é la sua inversa dunque $\mathbb{T}^2 \simeq S^1 \times S^1$.

Exercise. 3.3

Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un'applicazione differenziabile. Si mostri che la definizione di differenziale in $p$, $d\varphi_p : T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{N}$, non dipende dalla curva scelta e che è lineare.

**Svolgimento:**

Siano $\alpha, \beta$ due curve su $\mathcal{M}$ tali che $\alpha(0) = \beta(0) = p$, e $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$. Consideriamo

$$d\varphi_p^\alpha[v] = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)_{|0} = \sum_i \alpha_i' \partial_i \varphi[\alpha]_{|0} = \sum_i \alpha_i'(0) \partial_i \varphi[\alpha(0)] =$$

$$= \sum_i \beta_i'(0) \partial_i \varphi[\beta(0)] = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)_{|0} = d\varphi_p^\beta[v].$$

Dunque è ben definita, manca solamente verificarne la linearità. Siano $\alpha, \beta, \gamma$ tre curve passanti in $p$, e tali che $\gamma'(0) = a\alpha'(0) + b\beta'(0)$. Poniamo $v = \gamma'(0), w =$

$\alpha'(0), u = \beta'(0)$. Dunque:

$$d\varphi_p[v] = d\varphi_p[aw + bu] = \sum_i \gamma_i'(0)\partial_i\varphi[\gamma(0)]_i =$$

$$= \sum_i (a\alpha_i'(0) + b\beta_i'(0))\partial_i\varphi[\gamma(0)] = a\sum_i \alpha_i'(0)\partial_i\varphi[\alpha(0)] + b\sum_i \beta_i'(0)\partial_i\varphi[\beta(0)] =$$

$$= ad\varphi_p[w] + bd\varphi_p[u].$$

EXERCISE. 3.4

Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un'immersione e sia $p \in \mathcal{M}$. Si mostri che esiste un intorno di $p$, diciamolo $V \subseteq \mathcal{M}$, tale che $\varphi_{|_V}$ sia un embedding.

**Svolgimento:**

Poiché $\varphi$ è un immersione abbiamo che $d\varphi_p$ è iniettiva per ogni $p$,. Siano $f, g$ due parametrizzazioni in un intorno di $p$ e $\varphi(p)$, rispettivamente. Abbiamo dunque che per ogni $\alpha$, curva su $\mathcal{M}$ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) \neq 0$,

$$\sum_i \alpha_i'\partial_i\varphi_j\partial_j \neq 0.$$

Da cui deduciamo che $\{\partial_i\varphi_j\}$ è un insieme libero. Per il teorema di inversione locale otteniamo che $g^{-1} \circ \varphi \circ f$ è un diffeomorfismo tra un certo $U_{f^{-1}(p)}$ e la sua immagine. Poniamo $V = f(U_{f^{-1}(p)})$, questo è un intorno di $p$ e in quest'intorno abbiamo che $\varphi$ è un omeomorfismo se restringiamo il fodomio alla sua immagine. ( Perché sia $f^{-1}$ che $g$ sono omeomorfismi. )

EXERCISE. 3.5

Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : (x\ , y\ , z\ ) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, zy)$$

un'applicazione tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Sia inoltre $\theta : \frac{S^2}{\pm} \to \mathbb{R}^4 : [p]_\pm \mapsto \varphi(p)$.[13] Si dimostri che $\theta$ è un embedding.

[13]Dove la relazione $\pm$ su $S^2$ è definita della maniera seguente: $x \pm y \iff x = y \vee x = -y$.

**Svolgimento:**

Prima di tutto mostriamo che $\theta$ è ben definita. La classe di un elemento $p$ è l'insieme $\{p, -p\}$ , per mostrare che non dipende dal rappresentante basta mostrare che $\varphi(p) = \varphi(-p)$ che risulta ovvio dalla definizione di $\varphi$. Ciò che dobbiamo verificare è che data una struttura differenziabile sulla sfera, per ciascuna parametrizzazione $f$ si abbia che $d(\varphi \circ f)$ sia iniettiva. In questo modo Otteniamo che $\varphi$ è un'immersione. Verifichiamolo. Innanzitutto consideriamo il seguente struttura differenziabile su $\frac{S^2}{\pm}$ :

$$\textit{sia } U_i = \{(x_1, x_2) |\, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

*e siano* $f_i^{\mp} : U_i \to S^2 : (x_1, x_2) \mapsto (\mp x_1 \delta_2^i \mp D\delta_1^i, \mp x_1 \delta_1^i \mp x_2 \delta_3^i \mp D\delta_2^i, \mp x_2 \delta_1^i \mp D\delta_3^i)$

$$\textit{con } D = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \textit{ e } i \in \{1, 2, 3\}. \quad \textit{Poniamo } \mathfrak{A} = \{(U_i, f_i)\}$$

Questa sarà la struttura differenziabile su $S^2$ che utilizzeremo. Notiamo anzitutto che $D \neq 0$ sempre e che $\varphi \circ f_i^+ = \varphi \circ f_i^-$. Consideriamo dapprima $\varphi \circ f_1^+$ per le altre si potrà applicare lo stesso ragionamento.

$$\varphi(f_1^+(x_1, x_2)) = (D^2 - x_1^2,\ x_1 D,\ x_2 D,\ x_1 x_2)$$

La matrice associata a

$$d(\varphi \circ f_1^+)[x, y] = \begin{pmatrix} 2DD_x - 2x & D + xD_x & yD_x & y \\ 2DD_y & xD_y & D + yD_y & x \end{pmatrix}$$

che è di rango 2. Dunque $d(\varphi \circ f_1^+)$ è iniettiva. Alla stessa maniera si prova che sono iniettive $d(\varphi \circ f_2^+)$ e $d(\varphi \circ f_3^+)$. Ora manca solo provare che $\theta$ è iniettiva. Questo si può fare osservando che se

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in S^2$$

e $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y})$ (1) allora $\bar{x} = \pm\bar{y}$. Da (1) otteniamo:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2 & (a) \\ x_1x_2 = y_1y_2 & (b) \\ x_1x_3 = y_1y_3 & (c) \\ x_2x_3 = y_2y_3 & (d) \end{cases}$$

Se $x_1 = x_2 = 0$ allora dalla (a) otteniamo $y_1 = \mp y_2$ da (b) usando (a) otteniamo $y_1^2 = 0 \implies y_1 = y_2 = 0$ dato che i punti stanno sulla sfera $y_3 = \pm 1$ e $x_3 = \pm 1$ dunque $y_3 = \pm x_3 \implies \bar{x} = \pm\bar{y}$.

Se $x_1 = 0$ e $x_2 \neq 0$ allora da (b) e da (c) si ha che $y_1y_2 = y_1y_3 = 0$ mentre da (a) si ha $y_1^2 - y_2^2 = -x_2^2$ dunque sia $y_2 = 0$ sia $y_1 = 0$ ma non entrambi. Dunque possiamo avere $x_3 = 0$ allora $x_2 = \pm 1$ dunque $y_1^2 - y_2^2 = -1 \implies y_3 = 0$. Inoltre poiché $y_2^2, y_1^2 \leq 1$ e $y_1^2 - y_2^2 = -1 \implies y_2 = \pm 1\, e\, y_1 = 0$. Dunque $\bar{x} = \pm\bar{y}$. Se $x_3 \neq 0$ allora

$$y_2y_3 \neq 0 \implies y_2 \neq 0 \overset{(b)}{\implies} y_1 = 0 = \pm x_1 \implies x_2^2 = y_2^2 \implies \pm x_2 = y_2$$

da (d) si ottiene infine $\bar{x} = \pm\bar{y}$. Con un ragionamento identico si prova l'enunciato nel caso $x_1 \neq 0, x_2 = 0$. Resta solo il caso $x_1, x_2 \neq 0$. Se

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \implies y_1^2 - y_2^2 = 0 dunque y_1 = \pm y_2 e x_1 = \pm x_2. Dalla (b) si ha (y_1, y_2) = \pm(x_1, x_2).$$

Da (c) + (d) si ottiene che $\bar{x} = \pm\bar{y}$. Infine se $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$ da $(c)^2 - (d)^2$ otteniamo $x_3 = \pm y_3$. Considerato che

$$\sum_{i\in\{1,2,3\}} x_i^2 = \sum_{i\in\{1,2,3\}} y_i^2 = 1$$

otteniamo che $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ (a1) sommando (a) a questa si ottiene che $x_1 = \pm y_1$, mentre sottraendo (a) da (a1) si ottiene $x_2 = \pm y_1$. Da cui $\bar{x} = \pm\bar{y}$. $\square$ Dunque è un'embedding in quanto $\theta$ è un'applicazione continua da un compatto ( per il lemma dell'applicazione chiusa essa è un embedding)[14]. Q.E.D.

EXERCISE. 3.6

Si consideri il cilindro $C$ definito da $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \quad x^2+y^2=1\}$, e sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $C$ data da $v \sim w \iff v = \pm w$. Mostrare che si può dotare $\frac{C}{\sim}$ di una struttura differenziabile. $\frac{C}{\sim}$ verrà detto nastro di Möbius infinito.

**Svolgimento:**

Consideriamo $\tilde{S} = S^2 \setminus \{N,S\}$ la sfera privata dei poli[15]. Sia inoltre $S = \frac{\tilde{S}}{\sim}$ abbiamo che $S$ è un aperto del proiettivo reale di dimensione 2, dunque una varietà. Dimostriamo prima di tutto che $S$ è varietà differenziabile: sia $\mathfrak{A} = \{(f_i, U_i)\}$ la struttura differenziabile del proiettivo reale di dimensione 2, togliamo dal dominio delle parametrizzazioni tutti i punti che vengono inviati in $[N]$. Dato che il proiettivo meno $[N]$ è un aperto del proiettivo[16]abbiamo che $V_i = U_i \setminus f_i^{-1}([N])$ è un aperto di $\mathbb{R}^3$ dunque $\mathfrak{S} = \{(f_i, V_i)\}$ è una struttura differenziabile su $S$. $\square$ Definiamo

$$\varphi : C \to \tilde{S} : (x,y,z) \mapsto (\frac{x}{D}, \frac{y}{D}, \frac{z}{D})$$

Dove $D = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, questa è continua da $C$ in $\mathbb{R}^3$, dunque da $C$ in $\varphi(C) \subseteq \tilde{S}$. Consideriamo:

$$\xi : \tilde{S} \to C : (x,y,z) \mapsto (\frac{x}{D'}, \frac{y}{D'}, \frac{z}{D'})$$

Dove $D' = \sqrt{x^2+y^2}$, questa è altrettanto continua e inoltre è l'inversa di $\varphi$. Dunque $\varphi$ è un omeomorfismo. $\square$ Inoltre se quozientiamo sia $\tilde{S}$ che $C$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$, otteniamo che

$$[x]_C = [y]_C \iff [\varphi(x)]_{S\sim} = [\varphi(y)]_{S\sim}$$

[14]Vedere [LoiT] capitolo Quozienti.

[15]Quando consideriamo la sfera in $\mathbb{R}^3$, intendiamo come poli i punti : $N = (0,0,1)$ e $S = (0,0,-1)$.

[16]In quanto $\tilde{S}$ è un aperto della topologia indotta su $S^2$ dunque dato che $\mathbb{PR}^2$è dotato della topologia quoziente e che $\pi^{-1}(\mathbb{PR}^2 \setminus \{[N]\}) = \tilde{S}$, otteniamo che $\mathbb{PR}^2 \setminus \{[N]\}$ è aperto.

. Indichiamo con $\pi_1$e $\pi_2$ la proiezione canonica di $C$ su $\frac{C}{\sim}$ e di $\tilde{S}$ su $S$, rispettivamente. Sia $f = \pi_2 \circ \varphi$ questa è un'identificazione, inoltre da (s) si ha che $f$ è costante sulle fibre di $\pi_1$ e viceversa. Dunque per il corollario 3.2, esiste un omeomorfismo $\psi$ tra $\frac{C}{\sim}$ e $S$, tale che

$$\pi_1 = \psi \circ f = \psi \circ \pi_2 \circ \varphi$$

. Sia inoltre $\mathfrak{A} = \{(f_i, U_i)\}$ una struttura differenziabile per $S$, consideriamo $g_i = \psi \circ f_i$.

(1) $\bigcup_{i\in I} g_i(U_i) = \bigcup_{i\in I} \psi(f_i(U_i)) = \psi(\bigcup_{i\in I} f_i(U_i)) = \psi(S) = \frac{C}{\sim}$.
(2) $g_i$ è biunivoca poiché lo sono sia $\psi$ che $f_i$.
(3) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ allora $g_j^{-1} \circ g_i = (\psi \circ f_j)^{-1} \circ (\psi \circ f_i) = f_j^{-1} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f_i = f_j^{-1} \circ f_i$ che è differenziabile.
(4) Infine $\frac{C}{\sim}$ è $T_2$e $N_2$ in quanto omeomorfo ad uno spazio $T_2, N_2$. Dunque $\mathfrak{B} = \{(g_i, U_i)\}$ è una struttura differenziabile su $\frac{C}{\sim}$.Q.E.D.

Exercise. 3.7

Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile di dimensione n. Dimostrare che il fibrato tangente di $\mathcal{M}$, definito da

$$\mathcal{TM} := \{(v,p)|\, p \in \mathcal{M}\; e\; v \in T_p(\mathcal{M})\},$$

è una varietà differenziabile orientabile di dimensioni $2n$ ( anche se $\mathcal{M}$ non è orientabile).

**Svolgimento:**

Sia $\mathfrak{A} = \{(f_i, U_i)\}$ una struttura differenziabile su $\mathcal{M}$. Consideriamo

$$F_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to T\mathcal{M} : (x_1^i, ..., x_n^i, y_1^i, ..., y_n^i) \mapsto (f_i(x_1^i, ..., x_n^i),\ \sum_j y_j^i \partial_j).$$

Queste sono biunivoche e coprono $T\mathcal{M}$. Dobbiamo verificare che il cambio di coordinate sia differenziabile.

$$F_j^{-1} \circ F_i(p^i, v^i) = F_j^{-1}(f_i(q^i), df_i(v^i)) = (f_j^{-1} \circ f_i(q^i), d(f_j^{-1} \circ f_i)[v^i])$$

e come $f_j^{-1} \circ f_i$ e $d(f_j^{-1} \circ f_i)$ sono differenziabili, lo sono anche $F_j^{-1} \circ F_i$. Inoltre $T\mathcal{M}$ è $T_2$ e $N_2$ in quanto omeomorfa al prodotto di spazi $T_2$ e $N_2$ . Dunque è una varietà differenziabile. $\square$ Denotiamo $(y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_n(x_1, ..., x_n)) := f_j^{-1} \circ f_i(x_1, ..., x_n)$.

$$d(f_j^{-1} \circ f_i)_{|_p}(x_1, ..., x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 y_{1_{|p}} & \dots & \partial_n y_{1_{|p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 y_{n_{|p}} & \dots & \partial_n y_{n_{|p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\partial_i y_1 x_i, ..., \partial_i y_n x_i)$$

Ora calcoliamo $d(F_j^{-1} \circ F_i)$.

$$d(F_j^{-1} \circ F_i)_{|_{(p,v)}}[(x_1, ..., x_{2n})] = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$$

Dove $0_n$ è la matrice nulla di ordine n, da cui otteniamo $Det(B) = [Det(A)]^2$. Dunque è orientabile. Q.E.D.

Exercise. 3.8

Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile tale da esser ricoperta con due carte coordinate $V_1, V_2$ tali che $V_1 \cap V_2$ sia connesso. Si mostri che $\mathcal{M}$ è orientabile.

**Svolgimento:**

Se $V_1 \cap V_2$ è connesso allora sono connessi anche $U_i = f_i^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ( dove le $f_i$ sono le carte locali), in quanto immagini di un connesso tramite applicazioni continue. Dunque sia $A(p)$ la matrice del differenziale di $f_j^{-1} \circ f_i$ ciascuna sua componente è continua su $U_i$ e tale è l'applicazione determinante ( in quanto somma e prodotto di applicazioni continue), ciò implica che l'insieme $I = \{Det(A(p))|p \in U_i\}$ è connesso. Dunque se il determinate cambiasse segno allora $0 \in I$ , ma se A(p) =0 allora $f_j^{-1} \circ f_i$ non è invertibile in un intorno di p, il che è assurdo. Dunque il determinante è sempre positivo (oppure è sempre negativo ma basta cambiare una delle due parametrizzazioni, scambiando due coordinate e il determinate diventa positivo). Il che significa che $\mathcal{M}$ è orientabile. Q.E.D.

Exercise. 3.9

Si mostri che la sfera di $\mathbb{R}^n$, $S^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n)| \, ||(x_1, ..., x_n)|| = 1\}$, è orientabile.

**Svolgimento:**

Consideriamo la seguente struttura differenziabile su $S^n.\mathfrak{A} = \{(f_i, U_i), (g_i, U_i)\}$ o $U_i = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ et

$$f_i : U_i \to S^n : (x_1, ..., x_n) \mapsto (y_1, ..., y_{n+1}) \textit{ où } y_j = D\delta_j^i + x_{j-1}\delta_{j-1}^i + x_j(1 - \delta_j^i - \delta_{j-1}^i)$$

[17]

$$g_i : U_i \to S^n : (x_1, ..., x_n) \mapsto (y_1, ..., y_{n+1}) \textit{ où } y_j = -D\delta_j^i + x_{j-1}\delta_{j-1}^i + x_j(1 - \delta_j^i - \delta_{j-1}^i)$$

Questa non è altro che una generalizzazione, su $S^n$, della struttura differenziale su $S^2$ fornita nell'esercizio 3.5. Inoltre si ha che l'inversa di $f_i$ e di $g_i$ coincidono.

$$g_i^{-1} = \pi_{i|_{S^2}} \textit{ où } \pi_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n : (x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1}) \mapsto (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}).$$

Dunque

$$(f_j^{-1} \circ f_i)(x_1, ..., x_n) = \pi_j \circ f_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{i-1}, D, x_i, ..., x_n)$$

[17] $D = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}$ e $\delta_i^j$ è un delta di Kroneker cioè $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$. Osservando la convenzione che $x_0 = 0$.

, dove supponiamo che $j < i$, ipotesi che per altro non è affatto restrittiva, infatti non influisce in alcun modo nel ragionamento. Consideriamo la matrice $A$ di $d(\pi_j \circ f_i)$, tenendo conto che $\partial_t D = \frac{x_t}{D}$ otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\frac{x_1}{D^2} & -\frac{x_2}{D^2} & \cdots & -\frac{x_{j-1}}{D^2} & -\frac{x_j}{D^2} & -\frac{x_{j+1}}{D^2} & \cdots & -\frac{x_{i-1}}{D^2} & -\frac{x_i}{D^2} & -\frac{x_{i+1}}{D^2} & \cdots & -\frac{x_{n-2}}{D^2} & -\frac{x_n}{D^2} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Se calcoliamo il determinante otteniamo: $Det(A) = -\frac{x_i}{D^2}$. Ora $(x_1, ..., x_n) \in \pi_i(f_i(U_i) \cap f_j(U_j))$ dunque $x_i, x_j > 0 \implies Det(A) < 0$ . Consideriamo ora $g_j^{-1} \circ g_i$ , la matrice associata al differenziale è :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{x_1}{D^2} & \frac{x_2}{D^2} & \cdots & \frac{x_{j-1}}{D^2} & \frac{x_j}{D^2} & \frac{x_{j+1}}{D^2} & \cdots & \frac{x_{i-1}}{D^2} & \frac{x_i}{D^2} & \frac{x_{i+1}}{D^2} & \cdots & \frac{x_{n-2}}{D^2} & \frac{x_n}{D^2} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Se calcoliamo il determinante otteniamo: $Det(A) = \frac{x_i}{D^2}$. Ora $(x_1, ..., x_n) \in \pi_i(g_i(U_i) \cap g_j(U_j))$ dunque $x_i, x_j < 0 \implies Det(A) < 0$ . Consideriamo ora $f_j^{-1} \circ g_i$ , la matrice associata al differenziale è :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\frac{x_1}{D^2} & \frac{x_2}{D^2} & \dots & \frac{x_{j-1}}{D^2} & \frac{x_j}{D^2} & \frac{x_{j+1}}{D^2} & \dots & \frac{x_{i-1}}{D^2} & \frac{x_i}{D^2} & \frac{x_{i+1}}{D^2} & \dots & \frac{x_{n-2}}{D^2} & \frac{x_n}{D^2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Se calcoliamo il determinante otteniamo: $Det(A) = \frac{x_i}{D^2}$. Ora $(x_1, ..., x_n) \in \pi_i(g_i(U_i) \cap f_j(U_j))$ dunque $x_i < 0$ $x_j > 0 \implies Det(A) < 0$ . Consideriamo ora $f_j^{-1} \circ g_i$ , la matrice associata al differenziale è :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-\frac{x_1}{D^2} & -\frac{x_2}{D^2} & \dots & -\frac{x_{j-1}}{D^2} & -\frac{x_j}{D^2} & -\frac{x_{j+1}}{D^2} & \dots & -\frac{x_{i-1}}{D^2} & -\frac{x_i}{D^2} & -\frac{x_{i+1}}{D^2} & \dots & -\frac{x_{n-2}}{D^2} & -\frac{x_n}{D^2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Se calcoliamo il determinante otteniamo: $Det(A) = -\frac{x_i}{D^2}$. Ora $(x_1, ..., x_n) \in \pi_i(g_i(U_i) \cap g_j(U_j))$ dunque $x_j < 0$, $x_i > 0 \implies Det(A) < 0$ . Consideriamo $\mathfrak{A}' = \{(F_i, U_i), (G_i, U_i)\}$, dove $F_i$ e $G_i$ sono ottenute da $f_i$ e $g_i$, rispettivamente, scambiando due parametri, questa è una struttura differenziale su $S^n$ ed i determinanti dei differenziali del cambio di coordinate, hanno tutti segno opposto a quelli dati da $\mathfrak{A}$. Q.E.D.

EXERCISE. 3.10

Si mostri che $\mathbb{PR}^2$ è una varietà non orientabile.

**Svolgimento:**

Dunque se riusciamo a trovare un aperto non orientabile del proiettivo possiamo dedurne la sua non orientabilità. Per lo svolgimento di questo esercizio riprenderemo le notazioni dell'esercizio 3.1. Consideriamo il seguente aperto del proiettivo : $O = U_1 \cap U_2$ . Questo aperto può essere coperto dalle parametrizzazioni ${\psi_1}_{|\{(x_1,x_2)|x_2\neq 0\}}$ e ${\psi_2}_{|\{(x_1,x_2)|x_1\neq 0\}}$, consideriamo

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_2(x,y) = \psi_1^{-1}([x,1,y]) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$$

da cui la matrice associata a $d(\psi_1^{-1} \circ \psi_2)$, diciamola $M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{x^2} & 0 \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$, $det(M) = \frac{-1}{x^3}$, questo cambia segno a seconda del punto (x,y) scelto dunque non è orientabile. Q.E.D.

Un'altra possibile maniera di risolvere l'esercizio sarebbe stata di mostrare che un nastro di Möbius infinito non è orientabile. Il fatto che sia un aperto del proiettivo ( vedere esercizio 3.6) congiuntamente al lemma sulle varietà orientabili, ovvero il lemma 3.34, concluderebbe l'esercizio.

EXERCISE. 3.11

Si mostri che la bottiglia di Klein $\mathbb{K}f(0,R,r)$ non è orientabile.

**Svolgimento:**

Iniziamo con il definire la bottiglia di Klein. Per fare questo è sufficiente dare una sua struttura differenziabile, che denoteremo $\mathfrak{A} = \{(f_i, U_i)\}$.

$$U_1 = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$$

$$f_1 : U_1 \to \mathbb{K}f(0,R,r) \subset \mathbb{R}^4 : (u,v) \mapsto \begin{cases} x = & (r\cos v + R)\cos u \\ y = & (r\cos v + R)\sin u \\ z = & r\sin v\cos(u/2) \\ w = & r\sin v\sin(u/2) \end{cases}$$

In maniera simile definiamo su $U_2 = U_3 = U_1$

$$f_2 : U_2 \to \mathbb{K}f(0,R,r) \subset \mathbb{R}^4 : (t,s) \mapsto \begin{cases} x = & (r\cos t + R)\cos s \\ y = & (r\cos t + R)\sin s \\ z = & r\sin t\cos(\frac{s+\pi}{2}) \\ w = & r\sin t\sin(\frac{s+\pi}{2}) \end{cases}$$

$$f_3 : U_3 \to \mathbb{K}f(0,R,r) \subset \mathbb{R}^4 : (s,t) \mapsto \begin{cases} x = & (r\cos(\frac{s+\pi}{2}) + R)\cos t \\ y = & (r\cos(\frac{s+\pi}{2}) + R)\sin t \\ z = & r\sin(\frac{s+\pi}{2})\cos t \\ w = & r\sin(\frac{s+\pi}{2})\sin t \end{cases}$$

Ora consideriamo $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) = W$, questo è un aperto e non è connesso, infatti è costituito da due componenti connesse $W_1 = \{f_1(u,v) |\, \pi/2 < u < 2\pi\}$ e $W_2 = \{f_1(u,v) |\, 0 < u < \pi/2\}$. Il cambiamento di coordinate è dato da :

$$f_2^{-1} \circ f_1(u,v) = (u - \pi/2, v)\ in\ W_1 \quad (\star)$$

$$f_2^{-1} \circ f_1(u,v) = (u - 3\pi/2,\ 2\pi - v)\ in\ W_2 \quad (\star\star)$$

Costruiamo la matrice A associata al differenziale di $f_2^{-1} \circ f_1(u,v)\ in\ W_1$. $A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dunque $Det(A) = u > 0$. Se consideriamo la matrice B associata al differenziale di $f_2^{-1} \circ f_1(u,v)$ *in* $W_2$, otteniamo $B = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, che implica $Det(B) = -u < 0$. Dunque $\mathbb{K}f(0,R,r)$ non è orientabile. Q.E.D.

Exercise. 3.12

Definiamo un "fascio di piani" su un aperto $U$ di $\mathbb{R}^3$ come $P : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ : $p \mapsto P(p) := \{(x,y,z) | a_1(p)x + a_2(p)y + a_3(p)z = 0\}$ dove $P(p)$ è un piano passante per p. Il fascio di piani è detto differenziabile se tali sono i coefficienti $a_i$ dell'equazione di $P$ viste come funzioni di p. Definiamo infine una superficie integrale di $P$, una qualsiasi superficie $S$ tale che abbia come piano tangente in p esattamente $P(p)$ $\forall p \in U$ . Sia $\omega$ una forma differenziale di grado 1 su $U$ con $\omega(q) \neq 0, q \in U$. Si mostri che :

(1) $\omega$ determina un fascio di piani $P$ tramite la condizione

$$v \in P(p) \subseteq \mathbb{R}^3 \iff \omega_p(v) = 0$$

(2) Se $S$ è una superficie integrale di $P$ che passa per $p$, si ha $i^*(\omega) = 0$ dove $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ è l'inclusione.

(3) Se esiste un superficie integrale $S$ di $P$che passa per tutti i $p \in U$, allora esiste una 1 forma $\sigma$ in un intorno $V$ di $p$ tale che $d\omega = \omega \wedge \sigma$.

(4) Se esiste una superficie integrale di $P$, per tutti i $p$ e $\omega = adx_1 + bdx_2 + cdx_3$, allora

$$(\partial_2 c - \partial_3 b)a + (\partial_3 a - \partial_1 c)b + (\partial_1 b - \partial_3 a)c = 0$$

**Svolgimento:**

1. Sia $v = (p, x - p_1, y - p_2, z - p_3) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ , e sia inoltre $\omega = adx_1 + bdx_2 + cdx_3$ dove a,b e c sono calcolati in p.

$$0 = \omega_p(v) = a(p)(x - p_1) + b(p)(y - p_2) + c(p)(z - p_3)$$

e questa è proprio l'equazione di un piano passante per p.$\square$

2. $i^*\omega_p[v] = \omega_p(v)$, ma come $v \in T_p(S) = P(p)$, $\omega_p(v) = 0$.$\square$

3. Siano $\omega_2, \omega_3$ due forme differenziali di grado 1 tali che $\{\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \Omega$ sia un'insieme libero in $V$. Consideriamo $d\omega$, questo può essere espresso in funzione di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ come $d\omega = \alpha(\omega_2 \wedge \omega_3) + \beta(\omega_3 \wedge \omega_1) + \gamma(\omega_1 \wedge \omega_2)$. Come $\Omega$ è libero abbiamo che $\exists v \in T_p(S)$ tale che $\omega_2[v]\omega_3[v] \neq 0$ Dunque la forma differenziale $\omega_2 \wedge \omega_3$ è non nulla in $P(p)$. Consideriamo

$$0 = d(i^*\omega) = i^*(d\omega) = \alpha((i^*\omega_2) \wedge (i^*\omega_3)) + \beta((i^*\omega_3) \wedge (i^*\omega_1)) + \gamma((i^*\omega_2) \wedge (i^*\omega_1)) =$$

$$= \alpha(\omega_2 \wedge \omega_3) \implies \alpha = 0.$$

Da cui $d\omega = \omega \wedge (\gamma\omega_2 - \beta\omega_3)$. Ponendo $\sigma = (\gamma\omega_2 - \beta\omega_3)$ otteniamo la tesi.

4. Abbiamo dunque che per ogni p $d\omega \wedge \omega = -\sigma \wedge (\omega \wedge \omega) = 0$. In coordinate

$$d\omega = (\partial_2 c - \partial_3 b)dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 a - \partial_1 c)dx_3 \wedge dx_1 + (\partial_1 b - \partial_3 a)dx_1 \wedge dx_2$$

da cui

$$0 = d\omega \wedge \omega = ((\partial_2 c - \partial_3 b)a)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + ((\partial_3 a - \partial_1 c)b)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 +$$

$$+((\partial_1 b - \partial_3 a)c)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 =$$

$$= [(\partial_2 c - \partial_3 b)a + (\partial_3 a - \partial_1 c)b + (\partial_1 b - \partial_3 a)c]dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

da cui la tesi.

Exercise. 3.13

Sia $\omega = xdx + ydy + zdz$ e sia $P$ il fascio di piani generato su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ da $\omega$. Si mostri che per ogni $p$ la superficie integrale di $P$ in $p$ è la sfera centrata nell'origine e passante per $p$.

**Svolgimento:**

Il piano generato da $\omega$in p è $0 = p_1(x-p_1)+p_2(y-p_2)+p_3(z-p_3)$. Consideriamo la sfera di centro l'origine e passante per p, questa ha equazione cartesiana: $x^2 + y^2 + z^2 = ||p||^2 =: r^2$, dunque la possiamo vedere come superficie di livello $r^2$ della funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Il piano tangente a questa in un punto $p = (p_1, p_2, p_3)$ è dato da

$$< \nabla F(p_1, p_2, p_3), (x - p_1, y - p_2, z - p_3) >= 0$$

$$\Updownarrow$$

$$< (2p_1, 2p_2, 2p_3), (x - p_1, y - p_2, z - p_3) >= 0$$

$$\Updownarrow$$

$$p_1(x - p_1) + p_2(y - p_2) + p_3(z - p_3) = 0.$$

Q.E.D.

EXERCISE. 3.14

Sia $\omega = zdx + xdy + ydz$ e sia $P$ il fascio di piani generato su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ da $\omega$. Si mostri che per ogni $p$ la superficie integrale di $P$ in $p$ non ha superficie integrale.

**Svolgimento:**

Dall'esercizio 3.12.d dobbiamo avere che se una forma differenziale $\varphi$ ammette superficie integrale per ogni p allora, se$\varphi = adx_1 + bdx_2 + cdx_3$,

$$(\partial_2 c - \partial_3 b)a + (\partial_3 a - \partial_1 c)b + (\partial_1 b - \partial_3 a)c = 0$$

Calcoliamo :

$$0 = (\partial_2 c - \partial_3 b)a + (\partial_3 a - \partial_1 c)b + (\partial_1 b - \partial_3 a)c = z + x + y$$

che non è uguale a zero per tutti i punti di $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. Dunque non ammette superficie integrale per tutti i punti. Q.E.D.

EXERCISE. 3.15

Si consideri la retta reale $\mathbb{R}$ munita delle seguenti strutture differenziabili:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

Si mostri che:

(1) L'applicazione identica $\iota : (\mathbb{R}, f_1) \to (\mathbb{R}, f_2) : x \mapsto x$ non è un diffeomorfismo ( da cui si deduce che la strutture differenziali massimali generate da $f_1$ e da $f_2$ sono differenti.)
(2) L'applicazione $\varphi : (\mathbb{R}, f_1) \to (\mathbb{R}, f_2) : x \mapsto x^3$ è un diffeomorfismo (dunque nonostante la differenza delle strutture massimali generate, queste sono diffeomorfe.)

**Svolgimento:**

$\iota$ è un differomorfismo tra $(\mathbb{R}, f_1)$ e $(\mathbb{R}, f_2)$ se e solo se $f_2^{-1} \circ \iota \circ f_1$ è un diffeomorfismo $(f_2^{-1} \circ \iota \circ f_1)[x] = \sqrt[3]{x}$ che in zero presenta dei problemi di differenziabilità. Dunque non è un diffeomorfismo. $f_2^{-1} \circ \varphi \circ f_1[x] = f_2^{-1}(x^3) = x$ questa è visibilmente differenziabile per tutti gli x in $\mathbb{R}$ inoltre e continua ed inversa di se stessa, il che implica chiaramente che è un diffeomorfismo. Q.E.D.

EXERCISE. 3.16

Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile connessa di dimensione n. Per ogni $p \in \mathcal{M}$ sia $\mathcal{O}_p$ l'insieme delle basi di $T_p(\mathcal{M})$ quoziente la relazione seguente: " la base $\mathfrak{R}$ è equivalente alla base $\mathfrak{P}$ se e solo se la matrice di passaggio ha determinante positivo". Chiaramente $\mathcal{O}_p$ contiene due soli elementi, e ciascun elemento $O_p$ di $\mathcal{O}_p$ è detto orientamento in p, denoteremo $-O_p$ l'elemento diverso da $O_p$ in $\mathcal{O}_p$. Ora sia

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{(p, O_p)|\ p \in \mathcal{M}\ e\ O_p \in \mathcal{O}_p\}$$

Sia $\mathfrak{B} = \{(f_\alpha, U_\alpha)|\alpha \in \Theta\}$ la struttura differenziale ( massimale) su $\mathcal{M}$. Definiamo

$$\tilde{f}_\alpha : U_\alpha \to \tilde{\mathcal{M}} : (x_1, ..., x_n) \mapsto (f_\alpha(x_1, ..., x_n), [\partial_1, ..., \partial_n])$$

dove $[\partial_1, ..., \partial_n]$ è la classe della base di $T_p(\mathcal{M})$ generata da $f_\alpha$. Si mostri che:

(1) $\mathfrak{A} = \{(\tilde{f}_\alpha, U_\alpha)\}$ è una struttura differenziabile di $\tilde{\mathcal{M}}$ e che questa munita di $\mathfrak{A}$ è orientabile ( anche se $\mathcal{M}$ non lo è ) .

(2) L'applicazione $\pi : \tilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} : (p, O_p) \mapsto p$ è differenziabile, suriettiva e che per ciascun p esiste un intorno $V \subset \mathcal{M}$, tale che $U = \pi^{-1}(V)$ è unione di due insiemi disgiunti tali che ciascuno di essi sia inviato da $\pi$ in maniera diffeomorfe su $V$. Per questo $\tilde{\mathcal{M}}$ è detta doppia copertura orientabile di $\mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{M}$ è orientabile se e solo se $\tilde{\mathcal{M}}$ non è connessa.

**Svolgimento:**

(1) L'inversa di $\tilde{f}_\alpha$ è $g_\alpha : (p, O_p) \mapsto f_\alpha^{-1}(p)$ dunque è biunivoca. Chiaramente $\cup_{\alpha\in\Theta}\tilde{f}_\alpha(U_\alpha)$ copre $\tilde{\mathcal{M}}$. Resta da verificare la differenziabiltà del cambio di coordinate ma $g_\beta \circ \tilde{f}_\alpha(x_1, ..., x_n) = f_\beta^{-1} \circ f_\alpha(x_1, ..., x_n)$ dunque è differenziabile.

(2) la funzione $\pi$ è differenziabile in $(p, O_p)$ se e solamente se data la parametrizzazione $f_\alpha$ tale che $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ l'applicazione $f_\alpha^{-1} \circ \pi \circ \tilde{f}_\alpha(x_1, ..., x_n)$ è differenziabile in $(x_1, ..., x_n) = f_\alpha^{-1}(p)$. Allora $f_\alpha^{-1} \circ \pi \circ \tilde{f}_\alpha(x_1, ..., x_n) = f_\alpha^{-1} \circ \pi(p, O_p) = f_\alpha^{-1}(p) = (x_1, ..., x_n)$ che è chiaramente differenziabile. La suriettività è chiara, sia $V$ un intorno di $p \in \mathcal{M}$ tale che $p \in V \subseteq f_\alpha(U_\alpha)$.

Sia $q \in V$, $\pi^{-1}(q) = \{(q, O_q), (q, -O_q)\}$. Ci scegliamo per ciascun punto un orientazione e indichiamo $\bigoplus$ questo insieme, questo è della forma $\{O_q | q \in V\}$. Consideriamo l'insieme $\boxminus = \{(q, -O_q) | O_q \in \bigoplus \wedge q \in V\}$ e l'insieme $\boxplus = \{(q, O_q) | O_q \in \bigoplus \wedge q \in V\}$. $\pi^{-1}(V) = \boxminus \cup \boxplus$ e $\boxminus \cap \boxplus = \emptyset$, dunque è unione di due insiemi disgiunti. Resta da verificare che $\pi$ è un diffeomorfismo tra $\boxplus(\boxminus)$ e $V$. Consideriamo $\varphi^{+(-)} : V \to \boxplus(\boxminus) : p \mapsto (p, O_p)$ ( $(p, -O_p)$ )dove $O_p \in \bigoplus$. Dunque $\pi_{|\boxplus}(\pi_{|\boxminus})$ è biunivoca e chiaramente differenziabile, in quanto restrizione di applicazione differenziabile. Rimane solo da verificare la differenziabilità di $\varphi$. Consideriamo dunque $\tilde{f}_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ f_\alpha(x_1, ..., x_n) = \tilde{f}_\alpha^{-1} \circ \varphi(p) = \tilde{f}_\alpha^{-1}(p, O_p) = f_\alpha^{-1} \circ \pi(p, O_p) = (x_1, ..., x_n)$ chiaramente differenziabile.

(3) Supponiamo che sia orientabile , gli insiemi $A = \{(p, O_p) |\ O_p = \tilde{f}_\beta\}$ dove $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ è un orientazione di $\mathcal{M}$ e $B = \{(p, -O_p) |\ O_p = \tilde{f}_\beta\}$ sono non vuoti, aperti[18] e disgiunti. Quindi $\tilde{\mathcal{M}}$, è sconnessa. Viceversa, supponiamo che $\tilde{\mathcal{M}}$ non sia connessa. Iniziamo con il dimostrare che $\pi$ è un'applicazione chiusa. Sia $C$ un chiuso di $\tilde{\mathcal{M}}$, questo è vero se e solo se $\tilde{f_\alpha}^{-1}(C)$ è un chiuso, dunque $\tilde{f}_\alpha^{-1}(C) = f_\alpha^{-1}(\pi(C))$ è un chiuso, ma un sottoinsieme $C'$ di $\mathcal{M}$ è chiuso se e solo se $f_\alpha^{-1}(C')$ è chiuso, dunque $\pi(C)$ è chiuso in $\mathcal{M}$. Siano $C_1$ e $C_2$ due componenti connesse di $\tilde{\mathcal{M}}$, dato che $\tilde{\mathcal{M}}$ è orientabile allora lo sono anche $C_1$e $C_2$ in quanto aperti [19] e chiusi di $\tilde{\mathcal{M}}$. Poiché $\pi(C_1)$ è chiuso, aperto e non vuoto in $\mathcal{M}$ allora coincide con $\mathcal{M}$. Ora $\pi : C_1 \to \mathcal{M}$ è dunque chiusa, continua, suriettiva e per ciascun punto di $C_1$ esiste un intorno $V$ tale che $\pi$ sia un diffeomorfismo da $V$ in $\pi(V)$.

EXERCISE. 3.17

Sia $S = \mathbb{R}^2 \dot{\cup} \{p^\star\}$, ovvero l'unione disgiunta di $\mathbb{R}^2$ e $\{p^\star\}$. Siano $f_1$ e $f_2$ le mappe

[18] Sono aperti in quanto unione di immagini di aperti tramite omeomorfismi.
[19] Per il lemma 3.34 sulle varietà orientabili .

definite da :

$$f_1(u,v) = \begin{cases} (u,v) & \textit{se } u^2+v^2 \neq 0 \\ p^\star & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_2(u,v) = \begin{cases} (u,v) & \textit{se } u^2+v^2 \neq 0 \\ 0_{\mathbb{R}^2} & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Si mostri che $\{(f_i, \mathbb{R}^2) \mid i \in \{1,2\}\}$ è una struttura differenziabile per S, tranne per il fatto che la topologia generata da essa non è $T_2$.

**Svolgimento:**

$f_1,\ f_2$ sono bijettive e $f_1(\mathbb{R}^2) = S \setminus \{(0_{\mathbb{R}^2})\},\ f_2(\mathbb{R}^2) = S \setminus \{(p^\star)\}$ da cui $f_1(\mathbb{R}^2) \dot\cup f_2(\mathbb{R}^2) = S$. $f_1^{-1} \circ f_2 = f_2^{-1} \circ f_1 = \iota_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$ che è differenziabile. Consideriamo ora i punti $0_{\mathbb{R}^2}, p^\star \in S$, siano $U$, $V$ un intorno di $0_{\mathbb{R}^2}$ e $p^\star$, rispettivamente. Essi saranno l'immagine di un qualche intorno di $0_{\mathbb{R}^2}$, siano allora $V = f_1(W_V)$, $U = f_2(W_U)$, poiché $W_V$ e $W_U$ sono intorni di $0_{\mathbb{R}^2}$ abbiamo che $(W_V \cap W_U) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\} \neq \emptyset$, sia $(u,v) \in (W_V \cap W_U) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $(u,v) = f_1(u,v) \in V$ e $(u,v) = f_2(u,v) \in U$ dunque $U \cap V \neq \emptyset$. Da cui deduciamo che non esistono due intorni disgiunti di $0_{\mathbb{R}^2}$ e $p^\star$.

CAPITOLO 4

# Integrazione su varietà; Il teorema di Stokes e il Lemma di Poincaré[1].

Nel capitolo precedente abbiamo definito "l'habitat" delle forme differenziali, in questo invece daremo un senso alla trattazione, infatti lo scopo principale delle forme differenziali, come già detto nel secondo capitolo, è quello di esser integrate, ed è questo che faremo nel presente. Qui completeremo, o meglio generalizzeremo, quanto fatto nel secondo capitolo, estendendo il concetto d'integrazione di una forma differenziale al caso di varietà n dimensionali, orientabili e compatte. Inoltre introdurremmo due teoremi fondamentali sull'argomento: il teorema di Stokes ed il lemma di Poincaré.

## 4.1. Definizioni e teoremi riguardanti integrazione su varietà.

In questa sezione introdurremmo il concetto di integrale di una n forma su una varietà di dimensione n, dapprima su $\mathbb{R}^n$ poi su varietà compatte ed infine su varietà qualsiasi, a patto che esse siano orientabili e compatte. Per ciò che riguarda quest'ultima condizione in realtà troveremo il modo di eliminarla a patto di rafforzare le ipotesi sul tipo di topologia presente sulla struttura differenziabile. In seguito verrà introdotta la nozione di bordo di una varietà e di varietà con bordo, ed enunciato il teorema di Stokes. Infine concluderemo questa sezione con il Lemma di Poincaré. Iniziamo con il definire il supporto di una forma differenziale.

[1]Jules Henri Poincaré (29 Aprile 1854 –17 Luglio 1912) è stato un matematico, un fisico teorico e un filosofo francese. I suoi contributi sono stati importanti in molti campi della matematica.

### 4.1.1. Integrazione su varietà.

DEFINITION 4.1. Sia $\omega$ una forma differenziale definita in un aperto $U$ una varietà $\mathcal{M}^n$ . Il supporto $K$ di $\omega$ è la chiusura[2] dell'insieme:

$$A = \{p \in \mathcal{M}^n |\, \omega(p) \neq 0\}.$$

Consideriamo una n forma $\omega$ su $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n$.

DEFINITION 4.2. Sia $\omega = a(x_1, ..., x_n)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, tale che il suo supporto sia un compatto[3] $K$ contenuto in $U$. Definiamo

$$\int_U \omega = \int_K a(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n,$$

dove l'integrale a destra è il classico integrale multiplo di $\mathbb{R}^n$.

Procediamo ora con il definire l'integrale di una forma nel caso più generale di una varietà $\mathcal{M}$, per evitare problemi di convergenza quest'ultima verrà supposta compatta[4]. Come detto nell'introduzione della sezione, supporremo la varietà orientabile. Supponiamo inizialmente che il supporto $K$ di $\omega$, sia contenuto in un unico sistema di coordinate, $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$.

DEFINITION 4.3. Sia $\omega_\alpha = a_\alpha(x_1, ..., x_n)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ la rappresentazione di $\omega$ in $V_\alpha$, allora definiamo:

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{V_\alpha} \omega = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \cdots dx_n,$$

dove il terzo membro è un'integrale multiplo in $\mathbb{R}^n$.

[2]La chiusura di un insieme $A \subseteq X$, con $(X, \tau)$ spazio topologico, è il più piccolo chiuso contenente $A$, ovvero $\bigcap_{i \in I} C_i$, dove $\{C_i\}_{i \in I}$ è l'insieme di tutti i chiusi che contengono $A$.

[3]Dato che siamo in $\mathbb{R}^n$ e che il supporto è un chiuso, allora è sufficiente che sia limitato. In generale dato uno spazio topologico $(X, \tau)$ un'insieme $K$ è detto compatto se e solo se per ogni ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$, con $I$ famiglia di indici qualsiasi, è possibile estrarre un sotto ricoprimento finito, ovvero, equivalentemente, è possibile trovare una famiglia finita di indici $J \subseteq I$ tale che $\{A_i\}_{i \in J}$ sia ancora un ricoprimento.

[4]In questo modo abbiamo che il supporto è un compatto, poiché un chiuso in un compatto è compatto.

Si deve ancora mostrare che questa definizione è formalmente corretta, infatti potrebbe capitare che $K$ sia contenuto anche in un altro sistema di coordinate $V_\beta$, e si deve avere che l'integrale nei due casi coincide. Possiamo supporre, al limite restringendo $U_\alpha$ e $U_\beta$, che $V_\alpha = V_\beta$. Sia il cambiamento di coordinate:

$$f = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : U_\beta \to U_\alpha,$$

dato da $x_i = f_i(y_1, ..., y_n)$, con $i \in \{1, ..., n\}$,$\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \in U_\alpha$ e $\bar{y} = (y_1, ..., y_n) \in U_\beta$. Abbiamo dunque:

$$\omega_\beta = f^* \omega_\alpha,$$

da cui si ottiene:

$$\omega_\beta = Det(df) a_\beta dy_1 \wedge ... \wedge dy_n,$$

dove $a_\beta(\bar{y}) = a_\alpha(f_1(\bar{y}), ..., f_n(\bar{y}))$. D'altro canto, abbiamo, per la regola del cambio di variabili nell'integrale multiplo, che:

$$\int_{V_\alpha} \omega = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \cdots dx_n = \int_{U_\beta} |Det(df)| a_\beta dy_1 \cdots dy_n = \int_{V_\beta} \omega,$$

nell'ultima eguaglianza si è sfruttato il fatto che $Det(df) > 0$, ovvero l' orientabilità, dunque questa è indispensabile poiché l'integrale di $\omega$ in una varietà resti ben definito. Inoltre la scelta dell'orientazione di $\mathcal{M}$ fissa il segno dell'integrale di $\omega$, prendendo un'orientazione opposta[5]l'integrale di $\omega$ cambia di segno.

Passiamo ora al caso in cui $K$ non sia contenuto in un unico sistema di coordinate. Prima di generalizzare l'integrazione a quest'ultimo caso abbiamo bisogno di alcuni importanti lemmi e di una proposizione ad essi conseguente.

LEMMA 4.4. *Esiste una funzione differenziabile $\varphi : B_3^n(0) \to \mathbb{R}$, tale che:*

(1) $\varphi(p) = 1$ *se* $p \in B_1^n(0)$,
(2) $\varphi(p) \in (0, 1]$ *se* $p \in B_2^n(0)$,

[5]Ovvero data un'orientazione $\{(f_\alpha, U_\alpha)\}$, l'orientazione $\{(g_\beta, V_\beta)\}$, tali che siano contenute nella stessa struttura differenziabile, è detta opposta se e solo se, dati $\alpha$e $\beta$ per cui vale $g_\beta(V_\beta) \cap f_\alpha(U_\alpha) \neq \emptyset$, si ha $Det(d(g_\beta^{-1} \circ f_\alpha)) < 0$.

(3) $\varphi(p) = 0$ *se* $p \in B_3^n(0) \backslash B_2^n(0)$.

Dimostrazione. Iniziamo con il definire:

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{(\tau+1)(\tau+2)}} \chi_{(-2,-1)}(\tau) d\tau,$$

dove con $\chi_A$ indichiamo la funzione caratteristica di $A$. La funzione $\alpha$ così ottenuta è ovviamente differenziabile ed inoltre si a che ammette massimo per $t = -1$; detto $M$ questo massimo, poniamo:

$$\varphi(p) = \frac{\alpha(-|p|)}{M}, \quad p \in B_3^n(0).$$

La verifica delle tre proprietà risulta immediata in quanto:

$$\alpha(t) = 0 \text{ se } t \in (-\infty, -2],$$

$$\alpha(t) \leq M \text{ se } t \in (-2, -1]$$

ed infine

$$\alpha(t) = M \text{ se } t > -1.$$

□

Da questo lemma ricaviamo il seguente:

Lemma 4.5. *Data una varietà differenziabile* $\mathcal{M}^n$, $p \in \mathcal{M}$ *e* $g : U \to \mathcal{M}$ *una parametrizzazione in un intorno di* $p$*; esiste una parametrizzazione* $f : B_3^n(0) \to \mathcal{M}$ *attorno a* $p$*, tale che* $f(B_3^n(0)) \subseteq g(U)$ *e* $f^{-1}(p) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Dimostrazione. Sia $(x_1^0, ..., x_n^0)$ in $U$ tale che $g(x_1^0, ..., x_n^0) = p$, sia inoltre $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $B_r(p) \subseteq U$, allora definiamo:

$$f : B_3(0) \to \mathcal{M} : (x_1, ..., x_n) \mapsto g(\frac{r}{3}x_1 + x_1^0, ..., \frac{r}{3}x_n + x_n^0),$$

questa è ovviamente una parametrizzazione di un intorno di $p$ tale che $f(0) = p$ e che $f(B_3(0)) \subseteq U$. □

Infine dai due lemmi precedenti otteniamo la seguente, importante, proposizione.

PROPOSITION 4.6. *(Esistenza di una partizione differenziabile dell'unità.) Sia* $\mathcal{M}^n$ *una varietà compatta e sia* $\{V_\alpha\}$ *un ricoprimento di* $\mathcal{M}$ *costituito da sistemi di coordinate. Allora esistono delle funzioni differenziabili* $\varphi_1, ..., \varphi_m$ *tali che:*

(1) $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$,
(2) $0 \leq \varphi_i \leq 1$,*e il supporto di* $\varphi_i$ *è contenuto in qualche* $V_{\alpha_i}$*, del ricoprimento* $\{V_\alpha\}$.
(3) $\bigcup_{i=1}^m V_{\alpha_i} = \mathcal{M}$.

*Le* $\{\varphi_i\}$ *sono dette partizione differenziabile dell'unità subordinata al ricoprimento* $\{V_\alpha\}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $p$ un punto di $\mathcal{M}$, detta $f_p$ una parametrizzazione in un intorno di $p$ che goda delle proprietà data nel lemma4.5. Posto $V_p = f_p(B_3(0))$ e $W_p = f_p(B_1(0)) \subseteq V_p$, abbiamo che la famiglia $\{W_p\}$ è un ricoprimento di $\mathcal{M}$, e dunque lo è anche la famiglia $\{V_p\}$. Dato che la nostra varietà è compatta possiamo estrarre da questi due ricoprimenti sue sotto ricoprimenti finiti, estratto $W_1, ..., W_m$, possiamo prendere come sotto ricoprimento di $\{V_p\}$ l'insieme dei $V_i$ associati ai $W_i$. Definiamo le funzioni $\theta_i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ come:

$$\theta_i(x) = \begin{cases} \varphi \circ f^{-1}(x) & se\, x \in V_i \\ 0 & se\, x \in \mathcal{M} \backslash V_i \end{cases},$$

con $\varphi$ la funzione definita nel lemma 4.4; le applicazioni così ottenute sono differenziabili e il loro supporto è contenuto in $V_i$, infine si ha che $\sum_i \theta_i > 0$ . Definiamo infine:

$$\varphi_i = \frac{\theta_i}{\sum_i \theta_i}.$$

Immediata la verifica del fatto che $\varphi_i(p) \in [0, 1]$ e che rispetta le condizioni volute.

□

REMARK 4.7. La proposizione precedente vale ancora qualora si considerino delle varietà non compatte, che possiedano basi locali[6] numerabili, considerando dei ricoprimenti localmente finiti[7]. Esiste un teorema che ci garantisce che ogni varietà possiede dei ricoprimenti localmente finiti, questo può essere trovato, per esempio, nel [**WarFDM**]. Infine osserviamo che non è richiesta l' orientabilità nella proposizione precedente.

Adesso che abbiamo una partizione differenziabile dell'unità, possiamo finalmente definire l'integrale su una varietà compatta ed orientabile.

DEFINITION 4.8. Sia $\mathcal{M}^n$ una varietà compatta ed orientabile, sia inoltre $\{V_\alpha\}$ un ricoprimento di $\mathcal{M}$ costituito da sistemi di coordinate ed infine, sia $\{\varphi_i\}_{0<i\leq m}$ una partizione differenziabile dell'unità associata a $\{V_\alpha\}$. Definiamo l'integrale di una $n$ forma differenziale $\omega$ su $\mathcal{M}$, come:

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathcal{M}} (\varphi_i \omega).$$

Facciamo notare che $\varphi_i \omega$ è una forma differenziale il cui supporto è contenuto in uno dei $V_\alpha$, dunque il membro di destra è perfettamente definito.

Si dimostra facilmente che la definizione di integrale non dipende ne dal ricoprimento né dalla partizione dell'unità ad esso associata. Assumeremo come dato questo fatto.

---

[6] Vedi la definizione 3.2.

[7] Ovvero che in ciascun punto della varietà è contenuto in un numero finito di insiemi del ricoprimento.

**4.1.2. Il Teorema di Stokes.** In questa parte di questa prima sezione introdurremo il Teorema di Stokes, ma per fare questo abbiamo bisogno di alcune definizioni preliminari, che ci permettano di enunciare in maniera precisa il teorema. Iniziamo con la definizione di semispazio.

DEFINITION 4.9. Il semispazio di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \quad x_1 \leq 0\},$$

dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^n$, quest'ultimo dotato della topologia euclidea[8].

Definiamo ora funzioni differenziabili e differenziale di una funzione nel semispazio $\mathbb{H}^n$.

DEFINITION 4.10. Sia $f : V \subseteq \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$, con $V$ Un'Aperta di $\mathbb{H}^n$. Allora $f$ è detta differenziabile se e solo se esistono $U$, aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente $V$, ed una funzione $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$, differenziabile, tale che:

$$\bar{f}_{|V} = f,$$

ovvero che la restrizione di $\bar{f}$ a $V$ sia $f$. In questo caso il differenziale di $f$ in $p \in V$ è $df_p = d\bar{f}_p$.

Nel caso $V$ non contenga punti del piano $\Pi_1 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \, x_1 = 0\}$, la definizione di $df_p$ coincide con quella data in $\mathbb{R}^n$. Mentre, in caso contrario, ovvero $p \in \Pi_1$, il differenziale $df_p$ è un'applicazione definita per tutti i vettori di $\mathbb{R}^n_p$. Utilizzando le curve è facile mostrare che $df_p$ è indipendente dall'estensione $\bar{f}$ scelta.

In maniera similare definiamo il concetto funzione differenziabile $f : V \subseteq \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$. Andiamo ora definire il concetto di varietà con bordo regolare.

[8]La topologia che ha come base $\mathfrak{B} = \{B^n_r(Q); \; r \in \mathbb{Q}, \; Q \in \mathbb{Q}^n\}$.

DEFINITION 4.11. Una varietà differenziabile con bordo ( regolare ) di dimensione n, o n varietà con bordo ( regolare ), è la coppia $(\mathcal{M}, \mathfrak{A})$; dove $\mathcal{M}$ è un insieme, e $\mathfrak{A}$ è una famiglia di coppie:

$$\mathfrak{A} = \{(f_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A},$$

dove $f_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{H}^n \to \mathcal{M}$, sono applicazioni iniettive, da un aperto $U_\alpha$ di $\mathbb{H}^n$[9] in $\mathcal{M}$, tali che:

(1) $\bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha(U_\alpha) = \mathcal{M}$, ovvero tali che le immagini delle $f_\alpha$ siano un ricoprimento di $\mathcal{M}$.
(2) Per ogni coppia $\alpha, \beta \in A$ tale che $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ si abbia che, $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ siano aperti di $\mathbb{H}^n$ e le applicazioni $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ e $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ siano differenziabili.
(3) La famiglia $\mathfrak{A}$ sia una famiglia massimale che rispetti le 1) e le 2).
(4) La topologia su $\mathcal{M}$ data dalle $f_\alpha$[10] è $T_2$ e $N_2$.

La coppia $(f_\alpha, U_\alpha)$ , con $p \in f_\alpha(U_\alpha)$, è detta parametrizzazione, o sistema di coordinate, di $\mathcal{M}$ in $p$; L'insieme $f_\alpha(U_\alpha)$ è detto intorno coordinato di $p$, ed infine la famiglia $\mathfrak{A}$ è detta struttura differenziabile su $\mathcal{M}$. Infine un punto $p \in \mathcal{M}$ è detto del bordo se per qualche parametrizzazione $f_\alpha$ in $p$ abbiamo che $f_\alpha^{-1}(p) \in \Pi_1$.

Per ciò che riguarda, i punti del bordo abbiamo il seguente:

LEMMA 4.12. *La definizione di punto del bordo non dipende dalla parametrizzazione scelta.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f, g$ due parametrizzazioni in un intorno $V$ di $p \in \mathcal{M}$, supponiamo che $p$ sia del bordo per $f$ ma non per $g$; ovvero $p = f(0, x_2, ..., x_n) =$

[9] Dove l'$n$ è la dimensione della varietà.
[10] Un aperto $A$ su $\mathcal{M}$ è tale se e solo se per ogni $\alpha$, tale che $A \cap f_\alpha(U_\alpha) \neq \emptyset$, vale che $f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha))$ è un aperto.

$g(y_1, ..., y_n)$ con $y_n \neq 0$. Sia $W = f(X) \cap g(Y)$, questo è non vuoto e saranno dunque non vuoti:

$$T = g^{-1}(W), \quad R = f^{-1}(W),$$

dunque:

$$f^{-1} \circ g : T \to R,$$

è un diffeomorfismo, considerata una bolla di raggio $r$ centrata in $(y_1, ..., y_n) = q$, che non intersechi il piano $x_1 = 0$, questa viene inviata diffeomorficamente in un intorno di $(0, x_2, ..., x_n)$, ma allora questo dovrà contenere dei punti della forma $(x_1, ..., x_n)$ con $x_1 > 0$, che non sono contenuti in $\mathbb{H}^n$. $\square$

L'insieme di punti del bordo di una data varietà con bordo regolare $\mathcal{M}$ è detto bordo, ed indicato $\partial\mathcal{M}$. Se il bordo di $\mathcal{M}$ è vuoto allora la definizione di varietà con bordo e quella di varietà data nel capitolo tre, coincidono. Per cui d'ora in poi con varietà verrà indicata una varietà con bordo, dato che il caso precedente è incluso. Si estendono facilmente tutte le definizioni date precedentemente nel caso di varietà senza bordo, infatti si introducono esattamente allo stesso modo delle corrispondenti definizioni per le varietà, semplicemente sostituendo $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{H}^n$. Sempre per quanto riguarda il bordo di una varietà abbiamo il seguente.

THEOREM 4.13. *Sia $\mathcal{M}$ una varietà n dimensionale, il suo bordo $\partial\mathcal{M}$ è una varietà (n-1) dimensionale. Inoltre se $\mathcal{M}$ è orientabile allora l'orientazione su $\mathcal{M}$ induce un'orientazione su $\partial\mathcal{M}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p$ un punto del bordo di $\mathcal{M}$ e sia $f_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{M}$, con $f_\alpha^{-1}(p) = q = (0, x_2, ..., x_n) \in U_\alpha$. Poniamo inoltre:

$$\bar{U}_\alpha = U_\alpha \cap \Pi_1.$$

Identificando $\Pi_1$ e $\mathbb{R}^{n-1}$, possiamo dunque vedere $\bar{U}$, come un aperto di quest'ultimo, detta $\bar{f}_\alpha = f_{\alpha|_{\bar{U}}}$, abbiamo, per il lemma 4.12 che $\bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) \subseteq \partial\mathcal{M}$. Si può facilmente dimostrare che $\{(\bar{f}_\alpha, \bar{U}_\alpha)\}$ è una struttura differenziabile su $\partial\mathcal{M}$ e questo prova la prima parte dell'asserto. Consideriamo un punto $q$ la cui immagine sia nel bordo, supponiamo che $\bar{f}_\alpha(\bar{U}_\alpha) \cap \bar{f}_\beta(U_\beta) \neq 0$, osservato che $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ porta punti della forma $(x_1^\beta, ..., x_n^\beta)$ in punti della forma $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$, abbiamo:

$$Det(d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta))_q = \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} Det(d(\bar{f}_\alpha^{-1} \circ \bar{f}_\beta)_q),$$

visto che $x_1^\alpha$ e $x_1^\beta$ sono negativi in un intorno di $q$ e che $x_1^\alpha(q) = 0$, abbiamo che $\frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_1^\beta} > 0$ , poiché per ipotesi si ha $Det(d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)) > 0$, otteniamo l'asserto. $\square$

Adesso possiamo enunciare il teorema di Stokes:

THEOREM 4.14. *(di Stokes) Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile, con bordo regolare, di dimensione n, compatta ed orientata. Sia $\omega$una n-1 forma differenziale su $\mathcal{M}$, e sia $i : \partial\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}$ l'inclusione del bordo in $\mathcal{M}$. Allora:*

$$\int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $K$ il supporto di $\omega$. Iniziamo con il supporre $K \subseteq V = f(U)$, un intorno coordinato della parametrizzazione $f : U \subseteq \mathbb{H}^n \to \mathcal{M}$. In $U$ possiamo scrivere $\omega$ come:

$$\omega = \sum_j a_j dx_1 \wedge ... \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge ... \wedge dx_n,$$

dove $a_j(x_1, ..., x_n)$ è una funzione differenziabile in $U$. Allora possiamo scrivere:

$$d\omega = \left( \sum_j (-1)^{j-1} \partial_j a_j \right) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Supponiamo inizialmente che $f(U) \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$. Allora $\omega$ è nulla in $\partial\mathcal{M}$, il che implica che $i^*\omega = 0$, e dunque è nullo $\int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega$. Estendiamo le funzioni $a_j$ e con un piccolo abuso di notazione poniamo:

$$a_j(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} a_j(x_1, ..., x_n) & (x_1, ..., x_n) \in U \\ 0 & (x_1, ..., x_n) \notin U \end{cases},$$

poiché $f^{-1}(K) \subseteq U$, le funzioni così definite risultano esser differenziabili in $\mathbb{H}^n$. Poiché $f^{-1}(K)$ è un compatto, allora esiste un parallelepipedo $Q$, dato da $x_j^0 \leq x_j \leq x_j^1$, che lo contiene. Allora:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_U \left( \sum_j (-1)^{j+1} \partial_j a_j \right) dx_1 \cdots dx_n = \sum_j (-1)^{j+1} \int_U \partial_j a_j dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \sum_j (-1)^{j+1} \int [a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n) - a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n)] dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n =$$

Poiché $a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n) = a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n) = 0$, abbiamo che

$$= 0 = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega.$$

Supponiamo che $f(U) \cap \partial\mathcal{M} \neq \emptyset$, possiamo scrivere l'inclusione $i$ come $x_1 = 0$ e $x_j = x_j$. Allora, utilizzando l'orientazione indotta sul bordo, possiamo scrivere:

$$i^*\omega = a_1(0, x_2, ..., x_n) dx_2 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Procediamo estendendo le $a_j$ come fatto in precedenza e considerando il parallelepipedo $Q$, contenente $f^{-1}(K)$, dato da:

$$x_1^1 \leq x_1 \leq 0, \quad x_j^1 \leq x_j \leq x_j^0 \quad j \in \{2, ..., n\},$$

tale che $f^{-1}(K)$ sia contenuto nell'interno di $Q$ unito con $Q \cap \Pi_1$. Allora:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \sum_j (-1)^{j+1} \int_Q \partial_j a_j dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int a_1(0, x_2, ..., x_n) - a_1(x_1^1, ..., x_n) dx_2 \cdots dx_n +$$

$$+ \sum_{j>1} (-1)^{j+1} \int [a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n) - a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n)] dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n =$$

Poiché $a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n) = a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n) = 0$, con $j > 1$, e $a_1(x_1^1, ..., x_n) = 0$ abbiamo che

$$= \int a_1(0, x_2, ..., x_n) dx_2 \cdots dx_n = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega.$$

Passiamo ora al caso generale, sia $\{V_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di $\mathcal{M}$ compatibile con l'orientazione, sia $\varphi_j$, $j \in \{1, ..., m\}$, la partizione differenziabile dell'unità ad essa associata. Le forme $\omega_j = \varphi_j \omega$, soddisfano le ipotesi dei casi precedenti e quindi per ciascuna di esse vale il Teorema di Stokes, ora $\sum_j d\varphi_j = d\left(\sum_j \varphi_j\right) = d(1) = 0$,dunque abbiamo che:

$$\omega = \sum_j \omega_j, \quad d\omega = \sum_j d\omega_j,$$

quindi:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \sum_j \int_{\mathcal{M}} \omega_j = \sum_j \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega_j = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega.$$

□

COROLLARY 4.15. *(Teorema della divergenza)Sia $\mathcal{M}$ una varietà con bordo di dimensione 3 di $\mathbb{R}^3$, sia $V$ un campo di vettori. Si scelga un'orientazione di $\mathbb{R}^3$ e sia $N$ il vettore normale a $\partial\mathcal{M}$ nell'orientazione indotta. Infine sia $\sigma$ l'elemento d'area di $\partial\mathcal{M}$. Allora:*

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla \cdot V\nu = \int_{\partial\mathcal{M}} \prec V, N \succ \sigma.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^3$ di $p \in \mathcal{M}$, i campi differenziabili ortonormali $e_1, e_2, N$ tali che $e_1, e_2$ siano tangenti a $\partial\mathcal{M}$. Allora, una volta indicato con $\omega = \prec V \succ$, si ha:

$$i^*(*\omega(e_1, e_2)) = \prec V, N \succ,$$

il che vuol dire:

$$i^*(*\omega) = \prec V, N \succ \sigma.$$

In questo caso:

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla \cdot V\nu = \int_{\mathcal{M}} d(*\omega) = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*(*\omega) = \int_{\partial\mathcal{M}} \prec V, N \succ \sigma.$$

□

**4.1.3. Il Lemma di Poincaré.** Sia $\mathcal{M}^n$ una varietà differenziabile, estendiamo il concetto di forma differenziale chiusa e di forma differenziale esatta viste nel secondo capitolo, al caso di varietà di dimensione $n$.

DEFINITION 4.16. Una $k$ forma differenziale $\omega$, definita su $\mathcal{M}$ è detta esatta se esiste una $k-1$ forma differenziale $\beta$ tale che $\omega = d\beta$. Invece $\omega$ è detta chiusa se $d\omega = 0$. Qualora per ogni punto $p \in \mathcal{M}$ esiste un suo intorno $V_p$ tale che $\omega$ sia esatta in $V_p$, allora $\omega$ è detta localmente esatta.

Poiché $d^2 = 0$, abbiamo che una forma differenziale esatta è anche chiusa. Mentre il viceversa non è vero, almeno in generale[11].

DEFINITION 4.17. Data una varietà $\mathcal{M}^n$, questa è detta contraibile, ad un certo punto $p_0 \in \mathcal{M}$, se esiste un'applicazione differenziabile

$$H : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M} : (p,t) \mapsto H(p,t),$$

tale che:

$$H(p,1) = p, \quad H(p,0) = p_0, \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Definite le varietà contraibili, possiamo enunciare il lemma di Poincaré; questo ci fornisce un legame tra chiusura e esattezza di una forma differenziale contraibile.

THEOREM 4.18. *(Lemma di Poincaré) Sia $\mathcal{M}$ una varietà contraibile e sia $\omega$ una $k$ forma chiusa su $\mathcal{M}$, allora $\omega$ è esatta.*

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo con il definire la proiezione:

$$\pi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M} : (p,t) \mapsto p,$$

[11] Un controesempio è dato dalla forma $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, definita in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, questa è chiusa ma non esatta.

denotiamo inoltre con $\bar{\omega}$ la $k$ forma su $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ data da $H^*\omega$, dove $H$ è la mappa che ci fornisce la contraibilità di $\mathcal{M}$. Definiamo l'inclusione a livello $t$, come:

$$i_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathbb{R} : p \mapsto (p, t),$$

Definiamo un'applicazione $I$ che, data un $k$ forma in $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, ad essa assegna una $k$ forma in $\mathcal{M}$. Iniziamo con il utilizzare il lemma 4.19, che ci dice che una qualsiasi $k$forma $\bar{\omega}$ in $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ si può scrivere in maniera unica come:

$$\bar{\omega} = \omega_1 + dt \wedge \eta, \tag{4.1.1}$$

con $\omega_1$ una $k$ forma tale che $\omega_1[v_1, ..., v_k] = 0$, se qualche $v_i$, $i \in \{1, ..., k\}$, appartiene al nucleo di $d\pi$, e $\eta$ è una $k-1$ forma con la stessa proprietà. Siano $p \in \mathcal{M}$ e $v_1, ..., v_k \in T_p(\mathcal{M})$, allora in $p$:

$$I(\bar{\omega})_p[v_1, ..., v_k] := \int_0^1 \{\eta(p,t)[di_t[v_1], ..., di_t[v_k]]\} dt,$$

dove $\eta$ è data dalla decomposizione di $\bar{\omega}$ descritta nella (4.1.1). Poiché $\mathcal{M}$ è contraibile

$$H \circ i_1 = \iota_{\mathcal{M}}, \quad H \circ i_0 = p_0 \in \mathcal{M}.$$

Dunque:

$$\omega = (H \circ i_1)^*\omega = i_1^*(H^*\omega) = i_1^*\bar{\omega},$$

$$0 = (H \circ i_0)^*\omega = i_0^*(H^*\omega) = i_0^*\bar{\omega}.$$

Inoltre, poiché $d\omega = 0$, si ha: $d\bar{\omega} = d(H^*\omega) = H^*d\omega = 0$. Utilizzando il lemma 4.21, otteniamo che:

$$\omega = i_1^*\bar{\omega} = i_1^*\omega - i_0^*\omega = d(I\bar{\omega}) + I(d\bar{\omega}) = d(I\bar{\omega}) = d\alpha,$$

posto $\alpha = I\bar{\omega}$. □

Osservando che una forma esatta è chiusa otteniamo che nel caso di varietà contraibili allora l'esser esatta e l'esser chiusa sono proprietà perfettamente equivalenti.

Per dimostrare il lemma di Poincaré ci siamo serviti di due lemmi, andiamo ora a vederli in dettaglio.

LEMMA 4.19. *Ogni forma differenziale di grado k $\bar{\omega}$ in $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, intesa come varietà prodotto*[12]*, può esser scritta in forma unica come:*

$$\bar{\omega} = \omega_1 + dt \wedge \eta,$$

*con $\omega_1$ una $k$ forma tale che $\omega_1[v_1, ..., v_k] = 0$, se qualche $v_i$, $i \in \{1, ..., k\}$, appartiene al nucleo di $d\pi$, e $\eta$ è una $k-1$ forma con la stessa proprietà.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in \mathcal{M}$ e $f : U \to \mathcal{M}$ una parametrizzazione in un intorno di $p$. Allora $f(U) \times \mathbb{R}$ è un intorno coordinato in $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$. In questo intorno, denotate le coordinate come $(x_1, ..., x_n, t)$, possiamo esprimere $\bar{\omega}$ come:

$$\bar{\omega} = \sum_{j_1,...,j_k} a_{j_1...j_k} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_k} +$$

$$+ dt \wedge \sum_{j_1,...,j_{k-1}} b_{j_1...j_{k-1}} dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{k-1}} = \omega_1 + dt \wedge \eta.$$

Ovviamente $\omega_1$ e $\eta$ godono della proprietà richiesta. Inoltre abbiamo trovato l'espressione locale della decomposizione, da cui l'unicità. Per ciò che riguarda l'esistenza è sufficiente definire $\omega_1$e $\eta$ in ciascun intorno coordinato utilizzando l'espressione locale, nell'intersezione di due intorni le definizioni risultano essere uguali per unicità, dunque $\omega_1$ e $\eta$ possono esser definite globalmente. □

DEFINITION 4.20. Sia $\mathcal{M}$ come nel lemma precedente, e sia $i_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathbb{R} : p \mapsto (p, t)$, l'inclusione a livello $t$. Definiamo l'applicazione $I$ che ad una $k$ forma di $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ assegna una $k-1$ forma in $\mathcal{M}$, definita da:

$$I\bar{\omega}_p[v_1, ..., v_{k-1}] = \int_0^1 \{\eta(p, t)[di_t[v_1], ..., di_t[v_{k-1}]]dt,$$

[12]Date due varietà $(\mathcal{M}, \{(f_\alpha, U_\alpha)\})$ e $(\mathcal{N}, \{(g_\beta, V_\beta)\})$ la varietà prodotto è la varietà

$$(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \{(f_\alpha \times g_\beta, U_\alpha \times V_\beta)\}),$$

dove $f_\alpha \times g_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathcal{M} \times \mathcal{N} : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (f_\alpha(\bar{x}), g_\beta(\bar{y}))$. Si dimostra che questa è ancora una varietà e che la sua dimensione è la somma delle dimensioni di $\mathcal{M}$e $\mathcal{N}$.

con $\bar{\omega} = \omega_1 + dt \wedge \eta$ , una $k$ forma su $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ e a destra la decomposizione del lemma precedente.

LEMMA 4.21. *Siano $\mathcal{M}$, $i_t$, $\bar{\omega}$, $\omega_1$ ed $\eta$ come dal lemma 4.19. Allora:*

$$i_1^*\bar{\omega} - i_0^*\bar{\omega} = d(I\bar{\omega}) - I(d\bar{\omega}).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in \mathcal{M}$. Iniziamo con il notare che $I$ è additivo, quindi possiamo limitarci a considerare i casi:

$$\bar{\omega} = f dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_k} \; (a), \quad \bar{\omega} = f dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{j_{k-1}} \; (b),$$

Iniziamo con il caso $(a)$, consideriamo il sistema di coordinate $(x_1, ..., x_n, t)$, calcoliamo $I(d\bar{\omega})_p$;

$$I(d\bar{\omega})_p = \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} =$$
$$= (f(p,1) - f(p,0))\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = i_1^*\bar{\omega} - i_0^*\bar{\omega}.$$

Consideriamo ora $d(I\bar{\omega}) = d(0) = 0$, questo poiché $\eta$ in questo caso risulta esser nullo.

Passiamo ora al caso $(b)$; in questo caso si ha:

$$i_0^*\bar{\omega} = i_1^*\bar{\omega} = 0,$$

calcolando $d\bar{\omega} = \sum_i \partial_i f dx_i \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}$, dunque:

$$I(d\bar{\omega}) = -\sum_i \left( \int_0^1 \partial_i f dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}},$$

e

$$d(I\bar{\omega}) = d\left[ \int_0^1 f dt dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}} \right] =$$
$$= \sum_i \left( \int_0^1 \partial_i f dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

$\square$

Finita la parte delle definizioni e dei teoremi, passiamo agli esercizi.

## 4.2. Risoluzione degli esercizi sull'integrazione su varietà.

Exercise. 4.1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $\omega$ la 2 forma su $\mathbb{R}^3$ data da:

$$\omega = \frac{\partial_1 f dy \wedge dz + \partial_2 f dz \wedge dx + \partial_3 f dx \wedge dy}{||\nabla f||}.$$

Ammettiamo che se $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare per $f$ ( cioè, per tutti i $p \in f^{-1}(a)$, $df_p$ è suriettiva) allora:

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{L}_f(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, f(x, y, z) = a\}$$

è una superficie regolare e orientabile di $\mathbb{R}^3$(cf. [**DoCDG**], 2.2). Si mostri che la restrizione di $\omega$ a $\mathcal{M}^2$ è un elemento d'area di $\mathcal{M}^2$. Con l'ultima affermazione s'intende che se $\{v_1, v_2\}$ è una base positiva di $T_p(\mathcal{M}^2)$, con $p \in \mathcal{M}^2$, allora $\omega[v_1, v_2]$ è l'area del parallelogramma generato da $v_1$e $v_2$.

**Svolgimento:**

Data una parametrizzazione

$$g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$$

di $\mathcal{M}$ in un intorno di $p$, compatibile con l'orientazione, definiamo $g_u = \partial_1 g$, $g_v = \partial_2 g$. Ricordiamo che $\nabla f \perp g_u, g_v$ in tutti i punti di $g(U)$ ( vedere esercizio 1.12). Da cui

$$\nabla f \parallel g_u \times g_v. \quad (n)$$

inoltre abbiamo che è addirittura equiverso. Notiamo inoltre che:

$$x = g_1(u, v) \implies dx = \partial_1 g_1 du + \partial_2 g_1 dv.$$

ragionando allo stesso modo per $y$ e $z$, considerando che

$$g_u \times g_v = Det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \partial_3 g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 & \partial_3 g_2 \end{pmatrix}$$

[13]svolgendo i prodotti esterni otteniamo:

$$dx \wedge dy + dz \wedge dx + dy \wedge dz = \left( \sum_i (g_u \times g_v)^i \right) du \wedge dv.$$

Dove $(g_u \times g_v)^i$ rappresenta la i-esima componente di $g_u \times g_v$. Allora otteniamo:

$$\omega = \frac{\prec \nabla f, (g_u \times g_v) \succ}{||\nabla f||} du \wedge dv \overset{(n)}{=} \frac{||\nabla f|| ||(g_u \times g_v)||}{||\nabla f||} du \wedge dv = ||g_u \times g_v|| du \wedge dv = d\sigma.$$

Che è esattamente l'elemento d'area $d\sigma$.

Exercise. 4.2

(1) Sia $\omega = xdy - ydx$ e $j : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ l'inclusione di una regione limitata con bordo regolare $\partial\mathcal{M}$. Si mostri che:

$$Area(\mathcal{M}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} j^* \omega.$$

(2) Sia

$$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

e sia $j : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ l'inclusione di una regione limitata con bordo regolare $\partial\mathcal{M}$. Si mostri che:

$$Volume(\mathcal{M}) = \frac{1}{3} \int_{\partial\mathcal{M}} j^* \omega.$$

(3) Si generalizzino i punti precedenti a caso di $\mathbb{R}^n$.

**Svolgimento:**

[13]Il determinante è da intendersi in senso formale, cioè $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ è da intendersi come il vettore $(a, b, c)$.

Ricordiamo che se $\mathcal{M}$ è una regione limitata e con bordo regolare in $\mathbb{R}^m$ allora abbiamo:

$$Volume(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \nu.$$

(1) Ora nel caso bidimensionale questo si riduce a integrare $\int_{\mathcal{M}} dx \wedge dy$. Notiamo che:

$$\nu = d(xdy) = d(-ydx).$$

Da cui applicando il teorema di Stokes abbiamo che :

$$\int_{\mathcal{M}} \nu = \int_{\partial\mathcal{M}} xdy = \int_{\partial\mathcal{M}} -ydx.$$

Il che implica:

$$\int_{\mathcal{M}} \nu = \frac{1}{2}(\int_{\partial\mathcal{M}} xdy + \int_{\partial\mathcal{M}} -ydx) = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{M}} j^*\omega.$$

(2) Nel caso di $\mathbb{R}^3$ abbiamo:

$$\nu = dx \wedge dy \wedge dz = d(xdy \wedge dz) = d(-ydx \wedge dz) = d(zdx \wedge dy).$$

Da cui, per il teorema di Stokes:

$$\int_{\mathcal{M}} \nu = \int_{\partial\mathcal{M}} xdy \wedge dz = \int_{\partial\mathcal{M}} -ydx \wedge dz = \int_{\partial\mathcal{M}} zdx \wedge dy.$$

Che implica:

$$\int_{\mathcal{M}} \nu = \frac{1}{3}\int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega.$$

(3) Consideriamo

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_j dx_{I(j)}.$$

Dove $I(j) = (1, ..., j-1, j+1, ..., n)$. Ora osserviamo che:

$$\nu = d((-1)^{j+1} x_j dx_{I(j)}).$$

Dunque:

$$\int_{\mathcal{M}} \nu = \int_{\partial\mathcal{M}} (-1)^{j+1} x_j dx_{I(j)}.$$

Da cui deduciamo:

$$\int_{\mathcal{M}} \nu = \frac{1}{n} \int_{\partial\mathcal{M}} \sum_j (-1)^{j+1} x_j dx_{I(j)} = \frac{1}{n} \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega.$$

EXERCISE. 4.3

Sia

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

una 2 forma in $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, e sia $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata non passante per l'origine. Si mostri che:

(1) La restrizione a $\mathcal{M}^2$ di $\omega$ è uguale a

$$\frac{cos\theta}{r^2} d\sigma,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento d'area di $\mathcal{M}^2$, dato $p \in \mathcal{M}^2$ , $r^2$ è il quadrato della lunghezza del segmento $Op$ e $\theta$ è l'angolo positivo formato da $Op$ con il vettore normale unitario $N$ della superficie.

(2) Definiamo l'angolo solido dalla quale è vista $\mathcal{M}^2$ dall'origine come:

$$\Omega = \int_{\mathcal{M}^2} \omega.$$

( Possiamo giustificare la nostra definizione con il fatto che: dato $p \in \mathcal{M}^2$ ,$cos\theta \neq 0$ e un piccolo intorno di $p$, diciamolo $\Delta\mathcal{M}$, allora $\frac{1}{r^2} cos\theta Area(\Delta\mathcal{M})$ è l'area della parte di sfera unitaria, con centro 0, e determinata dalle semirette che uniscono l'origine a $\Delta\mathcal{M}$. ) Ora sia $\mathcal{M}$ una ragione di $\mathbb{R}^3$ limitata e con bordo regolare, diciamo quest'ultimo $\partial\mathcal{M}$, tale che $0 \notin \partial\mathcal{M}$. Si mostri che:

$$\Omega = 0 \; se \; 0 \notin \mathcal{M}, \; e \; \Omega = 4\pi, \; se \; 0 \in \mathcal{M}.$$

Dove $\Omega$ è l'angolo solido formato da $\mathcal{M}$.

**Svolgimento:**

(1) Poniamo $p = (x, y, z)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, posto $v = p/r$. Utilizzando l'esercizio 4.1 e $f = v$ otteniamo:

$$\omega = \frac{1}{r^3} \prec p, g_u \times g_v \succ du \wedge dv = \frac{1}{r^2} \prec v, N \succ |g_u \times g_v| du \wedge dv =$$

$$= \frac{cos\theta}{r^2} d\sigma.$$

(2) Siano $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Otteniamo che:

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} \frac{(-1)^{i+1} x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{3/2}} dx_{I(i)}.$$

Da cui

$$d\omega = \sum_{i=1}^{3} \left( \frac{(-1)^i 6 x_i^2}{2\left(\sum_j x_j^2\right)^{5/2}} + \frac{\left(\sum_j (-1)^{j+1} x_j^2\right)}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{5/2}} \right) = 0.$$

Se $0 \notin \partial \mathcal{M}$, allora possiamo applicare il teorema di Stokes che implica:

$$\Omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega = 0.$$

Supponiamo che $0 \in \mathcal{M}$, allora esiste una bolla che contiene l'origine e tale che la sua chiusura sia contenuta in $\mathcal{M}$, diciamola $B_r$. Allora

$$\int_{\partial \mathcal{M}} \omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \omega - \int_{\partial B_r} \omega + \int_{\partial B_r} \omega = \int_{\mathcal{M} \setminus B_r} d\omega + \int_{\partial B_r} \omega = \int_{\partial B_r} \omega.$$

Calcoliamo allora

$$\int_{\partial B_r} \omega = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} sin\theta d\theta d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} sin\theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi [1 - cos\theta]_0^{+\pi} = 4\pi.$$

Exercise. 4.4

Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, omogenea di grado k ( vedere Esercizio

1.18). Si mostri che:

(1) Se $B = \{p \in \mathbb{R}^3 | \, |p| \leq 1\}$ è la regione dello spazio delimitata dalla sfera unitaria $S^2$, allora

$$\int_B \Delta_2 \varphi dx \wedge dy \wedge dz = \int_{s^2} k\varphi d\sigma,$$

Dove $d\sigma$ è l'elemento d'area di $S^2$ e $\Delta_2$il laplaciano.

(2) Sia

$$\varphi = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 3a_4 x^2 y^2 + 3a_5 y^2 z^2 + 3a_6 x^2 z^2,$$

allora:

$$\int_{S^2} \varphi d\sigma = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^{6} a_i.$$

**Svolgimento:**

(1) Per l'identità di Eulero abbiamo che

$$k\varphi = x\partial_1 \varphi + y\partial_2 \varphi + z\partial_3 \varphi,$$

Da cui otteniamo:

$$\int_B \Delta_2 \varphi dx \wedge dy \wedge dz = \int_B \partial_1^2 \varphi + \partial_2^2 \varphi + \partial_3^2 \varphi dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$= \int_B \sum_i d(\partial_i \varphi dx_{I(i)}).$$

Consideriamo la parte si sfera parametrizzata da:

$$\psi : B_1^2(O) \to S^2 : (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 + y^2}).$$

Per le altre parametrizzazioni agiremo in maniera similare. Anzitutto calcoliamo $\psi_x = \partial_1 \psi$ e $\psi_y = \partial_2 \psi$:

$$\psi_x = \left(1,\ 0,\ \frac{x}{-\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}\right)$$

$$\psi_y = \left(0,\ 1,\ \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\right).$$

Da cui:

$$\psi_x \times \psi_y = \left(\frac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, 1\right).$$

Che ci permette di calcolare:

$$d\sigma = ||\psi_x \times \psi_y|| dx \wedge dy =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{1-(x^2+y^2)} + \frac{y^2}{1-(x^2+y^2)} + 1} dx \wedge dy =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{1-(x^2+y^2)} + \frac{1}{1-(x^2+y^2)} + 1} dx \wedge dy =$$

$$= \sqrt{-1 + \frac{1}{1-(x^2+y^2)} + 1} dx \wedge dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dx \wedge dy.$$

Inoltre dato che:

$$z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

otteniamo

$$dz = \frac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dx + \frac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dy. \quad (d)$$

Consideriamo una partizione differenziabile dell'unità, denotiamola $\xi_i$, associata alla struttura differenziabile $\{(\psi_j, U_j)\}$, su $S^2$, usata nell'esercizio 3.9, di cui $\psi$ fa parte. Possiamo scomporre dunque l'integrale

$$\int_{S^2} \sum_i \partial_i \varphi dx_{I(i)} = \sum_{i,j} \int_{U_j} \partial_i \varphi \circ \xi_j \psi_j d\sigma_j$$

Esisterà un certo $j_0$ tale che $\psi_{j_0} = \psi$. Consideriamo allora

$$\sum_i \int_{U_{j_0}} \partial_i \varphi \circ \xi_{j_0} \psi_{j_0} d\sigma_{j_0} =$$

$$\int_{U_{j_0}} \partial_1\varphi dy \wedge dz + \partial_2\varphi dx \wedge dz + \partial_3\varphi dx \wedge dy. \quad (i)$$

Considerando che $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ otteniamo che

$$\partial_3\varphi = \frac{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\partial_3\varphi = \frac{z\partial_3\varphi}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}. \quad (t)$$

Sostituendo la $(t)$ e la $(d)$ nella $(i)$ otteniamo:

$$\sum_i \int_{U_{j_0}} \partial_i\varphi \circ \xi_{j_0}\psi_{j_0} d\sigma_{j_0} =$$

$$= \int_{U_{j_0}} \partial_1\varphi dy \wedge dz + \partial_2\varphi dx \wedge dz + \partial_3\varphi dx \wedge dy =$$

$$= \int_{U_{j_0}} x\partial_1\varphi + y\partial_2\varphi + z\partial_3\varphi d\sigma =$$

$$= \int_{\psi(U_{j_0})} k\varphi d\sigma_{j_0}.$$

Ragionando in maniera identica per le altre $\psi_j$ otteniamo che

$$\sum_i \int_{U_j} \partial_i\varphi \circ \xi_j\psi_j d\sigma_j = \int_{\psi(U_j)} k\varphi d\sigma_j$$

da cui

$$\int_B \Delta_2\varphi dx \wedge dy \wedge dz = \int_B \sum_i d(\partial_i\varphi dx_{I(i)}) =$$

$$= \int_{S^2} \sum_i \partial_i\varphi dx_{I(i)} = \sum_{i,j} \int_{U_j} \partial_i\varphi \circ \xi_j\psi_j d\sigma_j =$$

$$= \sum_j \int_{\psi(U_j)} k\varphi d\sigma_j = \int_{S^2} k\varphi d\sigma.$$

(2) Osserviamo prima di tutto che

$$\varphi(tx, ty, tz) = t^4\varphi(x, y, z).$$

Dunque che $\varphi$ è omogenea di grado quattro. Abbiamo per il punto precedente che:

$$\int_{S^2} \varphi d\sigma = \frac{1}{4}\int_B \Delta_2\varphi dx \wedge dy \wedge dz.$$

Calcoliamo il laplaciano di $\varphi$:

$$\Delta_2\varphi = \partial_1^2\varphi + \partial_2^2\varphi + \partial_3^2\varphi =$$

$$= 12a_1x^2 + 6a_4y^2 + 6a_6z^2 + 12a_2y^2 + 6a_5z^2 + 6a_4x^2 + 12a_3z^2 + 6a_5y^2 + 6a_6x^2 =$$

$$= 6[\sum_{i=1}^{3} 2a_ix_i^2 + a_4(x^2 + y^2) + a_5(y^2 + z^2) + a_6(x^2 + z^2)] =$$

$$= 6[(2a_1 + a_4 + a_6)x^2 + (2a_2 + a_4 + a_5)y^2 + (2a_3 + a_5 + a_6)z^2].$$

Svolgiamo ora il seguente integrale in coordinate sferiche:

$$\int_B x^2dxdydz = \iiint_D \rho^5 sin^3\theta cos^2\phi d\phi d\rho d\theta =$$

Dove $D = [0, 2\pi] \times [0, 1] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$= \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{\pi} sin^3\theta \int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{4}{3}\pi.$$

Da cui si deduce:

$$\int \varphi d\sigma = \frac{1}{4}\int \Delta_2\varphi dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$= \int 3[(2a_1 + a_4 + a_6)x^2 + (2a_2 + a_4 + a_5)y^2 + (2a_3 + a_5 + a_6)z^2]dxdydz =$$

$$= 3[(2a_1 + a_4 + a_6)\frac{1}{6}\frac{4}{3}\pi + (2a_2 + a_4 + a_5)\frac{1}{6}\frac{4}{3}\pi + (2a_3 + a_5 + a_6)\frac{1}{6}\frac{4}{3}\pi] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \sum_i a_i.$$

Exercise. 4.5

Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili, e sia $\mathcal{M}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ una varietà differenziabile compatta con bordo $\partial\mathcal{M}$. Si mostri che:

(1) (Prima identità di Green.)

$$\int_{\mathcal{M}} \prec \nabla f, \nabla g \succ \nu + \int_{\mathcal{M}} f\Delta_2 g\nu = \int_{\partial\mathcal{M}} f \prec \nabla g, N \succ \sigma,$$

dove $\nu$ e $\sigma$ sono, rispettivamente, gli elementi di volume di $\mathcal{M}$ e di area di $\partial\mathcal{M}$.

(2) (Seconda identità di Green) Mantenendo la stessa notazione si ha:

$$\int_{\mathcal{M}}(f\Delta_2 g - g\Delta_2 f)\nu = \int_{\partial\mathcal{M}}(f \prec \nabla\, g, N \succ - g \prec \nabla\, f, N \succ)\sigma.$$

**Svolgimento:**

(1)

$$\int_{\mathcal{M}} \prec \nabla\, f, \nabla\, g \succ \nu = \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_i \partial_i f \partial_i g\right) \nu = \sum_i \int_{\mathcal{M}} \partial_i f \partial_i g \nu =$$

$$= \sum_i \int_{\mathcal{M}} (\partial_i(f\partial_i g) - f\partial_i^2 g)\nu = \int_{\mathcal{M}} f\nabla \cdot g\nu - \int_{\mathcal{M}} f\Delta_2 g\nu =$$

per il teorema della divergenza:

$$= \int_{\partial\mathcal{M}} \prec f\nabla\, g, N \succ \sigma - \int_{\mathcal{M}} f\Delta_2 g\nu.$$

(2)

$$\int_{\mathcal{M}} \prec \nabla\, f, \nabla\, g \succ \nu = \int_{\mathcal{M}} \prec \nabla\, g, \nabla\, f \succ \nu \implies$$

$$\implies \int_{\partial\mathcal{M}} \prec g\nabla\, f, N \succ \sigma - \int_{\mathcal{M}} g\Delta_2 f\nu = \int_{\partial\mathcal{M}} \prec f\nabla\, g, N \succ \sigma - \int_{\mathcal{M}} f\Delta_2 g\nu \implies$$

$$\implies \int_{\partial\mathcal{M}} (\prec g\nabla\, f, N \succ - \prec f\nabla\, g, N \succ)\sigma = \int_{\mathcal{M}} g\Delta_2 f\nu - \int_{\mathcal{M}} f\Delta_2 g\nu.$$

EXERCISE. 4.6

Si può trovare una varietà $\mathcal{M}^3$ orientabile il cui bordo sia $\mathbb{PR}^2$?

**Svolgimento:**

Se fosse possibile l'orientazione di $\mathcal{M}$ indurrebbe un'orientazione su $\mathbb{PR}^2$, ma per quanto visto nello scorso capitolo, questo non è orientabile.

EXERCISE. 4.7

Siano $\omega_1$ e $\omega_2$ due forme differenziali su una varietà $\mathcal{M}^n$. Supponiamo che $\omega_1$ sia chiusa e che $\omega_2$ sia esatta. Si mostri che $\omega_1 \wedge \omega_2$ è sia chiusa che esatta.

**Svolgimento:**

Iniziamo con il mostrare che è chiusa, supponiamo che $\omega_1$ sia una s forma, ricordiamo che poiché esatta implica chiusa si ha $d\omega_2 = 0 = d\omega_1$.

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^s \omega_1 \wedge d\omega_2 = 0 + 0 = 0.$$

Poiché $\omega_2$è esatta abbiamo che esiste $\omega$ tale che $d\omega = \omega_2$; sia $\varphi = \omega_1 \wedge \omega$, allora:

$$d\varphi = d\omega_1 \wedge \omega + (-1)^s \omega_1 \wedge d\omega = 0 + (-1)^s \omega_1 \wedge \omega_2,$$

posto $\theta = (-1)^s \varphi$, otteniamo che $d\theta = \omega_1 \wedge \omega_2$, dunque è esatta.

EXERCISE. 4.8

Sia $\mathcal{M}^n$ una varietà compatta, orientabile e senza bordo ( i.e. $\partial\mathcal{M} = \emptyset$) e sia $\omega$ una $n-1$ forma su $\mathcal{M}$. Si mostri che esiste almeno un punto $p \in \mathcal{M}$ tale che $d\omega_p = 0$.

**Svolgimento:**

Supponiamo che non esista tale punto. Anzitutto possiamo scrivere $d\omega_p$ come:

$$d\omega_p = a(p) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

dove $a : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è un funzione differenziabile. Allora supponiamo che esistano due punti $q$ e $r$ tali che $a(q) > 0$ e $a(r) < 0$, allora il massimo di $a$ è positivo mentre il minimo è negativo; inoltre li possiede entrambi in quanto funzione continua su un compatto. Sempre per la continuità abbiamo che $a$ assume tutti i valori compresi tra massimo e minimo, dunque esiste $p$ tale che $a(p) = 0$, il che implica $d\omega_p = 0$, assurdo. Dunque si deve avere $a < 0$ o $a > 0$, possiamo supporla positiva senza ledere alla generalità. Il che implica:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\mathcal{M}} a dx_1 \cdots dx_n > 0,$$

ma per il teorema di Stokes:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega = \int_{\emptyset} i^*\omega = 0;$$

il che è assurdo, dunque si deve necessariamente avere un punto $p$ tale che $a(p) = 0$, ovvero $d\omega_p = 0$.

EXERCISE. 4.9

Si mostri che non esiste un'immersione $f : S^1 \to \mathbb{R}$ della circonferenza unitaria sulla retta reale.

**Svolgimento:**

Supponiamo che esista tale immersione, allora per definizione di immersione, in tutti i punti di $S^1$ si dovrebbe avere $df_p \neq 0$. La circonferenza unitaria è una varietà compatta, orientabile, di dimensione 1, senza bordo, ed una funzione differenziabile, come $f$, su di essa è una 0 forma, quindi per l'esercizio precedente esiste almeno un punto dove $df_p = 0$; ergo non si può avere un'immersione di $S^1$ in $\mathbb{R}$.

EXERCISE. 4.10

Sia $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare compatta, orientata e con bordo regolare $\partial\mathcal{M}$, sia $v$ una campo di vettori differenziabile in un aperto di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathcal{M}$.

(1) Si mostri che:

$$\int_{\mathcal{M}} \prec \nabla \times\ v, N \succ \sigma = \int_{\partial\mathcal{M}} \prec v, T \succ ds,$$

ove $N$ e $T$ sono, rispettivamente, i campi normale a $\mathcal{M}$ e tangente a $\partial\mathcal{M}$; mentre $\sigma$ e $ds$ sono, sempre rispettivamente, gli elementi d'area per $\mathcal{M}$ e di linea per $\partial\mathcal{M}$.

(2) Sia $p \in \mathbb{R}^3$, $r$ un vettore un vettore unitario in $\mathbb{R}^3_p$ e $\Pi$ il piano normale a $r$, passant in $p$ e la cui orientazione, inseme con $r$, introduce un'orientazione su $\mathbb{R}^3$. Si consideri il disco $D \subseteq \Pi$, centrato in $p$, e si applichi il punto 1. dell'esercizio a $D$ con il suo bordo $\partial D$ per ottenere:

$$\prec \nabla \times\ v, r \succ (p) = \lim_{D\to p} \frac{1}{Area(D)} \int_{\partial D} \prec v, T \succ ds,$$

dove si è tenuta la stessa notazione del precedente e, nel limite, $D$ varia tra la famiglia di cerchi concentrici che tendono in $p$.

**Svolgimento:**

(1) Consideriamo nei punti di $\mathcal{M}$ i tre campi di vettori ortonormali $e_1, e_2$ e $N$, tale che $e_1 = T$, abbiamo che:

$$\theta[e_1, e_2] = *\theta[N],$$

dove $\theta$ è una qualsiasi 2 forma su $\mathcal{M}$. Allora, detto $\omega = \prec v \succ$, abbiamo:

$$d\omega[e_1, e_2] = *(d\omega)[N] = \prec \nabla \times\ v, N \succ,$$

dunque $d\omega = \prec \nabla \times\ v, N \succ \sigma$. Inoltre

$$\omega[e_1] = \omega[T] = \prec v, T \succ,$$

dunque $i^*\omega = \prec v, T \succ ds$. Allora abbiamo:

$$\int_{\mathcal{M}} \prec \nabla \times\ v, N \succ \sigma = \int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \prec v, T \succ ds.$$

(2) Abbiamo che:

$$\prec \nabla\times v, r \succ (p) = \lim_{D\to p} \frac{1}{Area(D)} \int_D \prec \nabla\times v, r \succ \nu = \lim_{D\to p} \frac{1}{Area(D)} \int_{\partial D} \prec v, T \succ ds.$$

EXERCISE. 4.11 (Introduzione alla teoria del potenziale in $\mathbb{R}^3$)

Una funzione differenziabile $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è detta armonica in $B \subseteq \mathbb{R}^3$, se e solo se in $B$ vale $\Delta_2 g = 0$. Sia $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ una regione limitata con bordo regolare $\partial\mathcal{M}$. Si provi che:

(1) Se due funzioni $g_1, g_2 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, armoniche, sono uguali nel bordo, ovvero $g_1 = g_2$ in $\partial\mathcal{M}$, allora $g_1 = g_2$ in $\mathcal{M}$.

(2) Se $g$ è armonica in $\mathcal{M}$ e

$$\frac{\partial g}{\partial N} = \partial_N g \stackrel{def}{=} \prec \nabla g, N \succ = 0,$$

in $\partial\mathcal{M}$, dove $N$ è il vettore normale unitario, allora $g$ è costante in $\mathcal{M}$.

(3) Se $g_1$e $g_2$ sono armoniche in $\mathcal{M}$ e in $\partial\mathcal{M}$ vale:

$$\partial_N g_1 = \partial_N g_2,$$

allora $g_1 = g_2 + c$, con $c \in \mathbb{R}$, in $\mathcal{M}$.

(4) Se $g$ è armonica in $\mathcal{M}$, allora:

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \partial_N g \sigma = 0.$$

(5) La funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

è una funzione armonica in $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

(6) (Teorema del valore medio.) Sia $f$ una funzione armonica nella regione:

$$D_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^3 | \, |p - p_0|^2 \leq r^2\},$$

il cui bordo è la sfera $S_r$ centrata in $p_0$. Allora:

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} f\sigma.$$

(7) (Il principio del massimo.) Sia $f$ una funzione armonica non costante in una regione chiusa e limitata $\mathcal{M}$ di $\mathbb{R}^3$( i.e. $\mathcal{M}$ è l'unione di un insieme

aperto, limitato e connesso[14] con il suo bordo, questo non necessariamente regolare.) Allora $f$ ammette massimo e minimo unicamente nel bordo $\partial\mathcal{M}$.

**Svolgimento:**

(1) Consideriamo $\varphi = g_1 - g_2$, allora:

$$\int_{\mathcal{M}} \prec \nabla\varphi, \nabla\varphi \succ \nu = \int_{\mathcal{M}} \prec \nabla\varphi, \nabla\varphi \succ \nu + \int_{\mathcal{M}} \varphi\Delta_2\varphi\nu =$$

$$= \int_{\partial\mathcal{M}} \prec \nabla\varphi, N \succ \sigma = 0,$$

dunque $\nabla\varphi = 0$ in $\mathcal{M}$, $\varphi$ è costante in $\mathcal{M}$, ovvero $0 = \varphi = g_1 - g_2$.

(2) Per la prima identità di Green, con $f = g$, abbiamo:

$$\int_{\mathcal{M}} ||\nabla g||^2\nu = -\int_{\mathcal{M}} g\Delta_2 g\nu + \int_{\partial\mathcal{M}} g\partial_N g\sigma = 0 - 0 = 0,$$

da cui $||\nabla g|| = 0$, il che vuol dire $\nabla g = 0$ ovvero $g$ è costante.

(3) Posto $\varphi = g_1 - g_2$, questa è armonica, inoltre $\partial_N\varphi = \partial_N g_1 - \partial_N g_2 = 0$, dunque per il punto precedente $\varphi$ è costante.

$$\varphi = c \implies g_1 = g_2 + c.$$

(4) Consideriamo la funzione $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$, per la prima identità di Green abbiamo che:

$$0 = \int_{\mathcal{M}} \prec \nabla a, \nabla g \succ \nu = -\int_{\mathcal{M}} a\Delta_2 g\nu + \int_{\partial\mathcal{M}} a\partial_N g\sigma = 0 + \int_{\partial\mathcal{M}} \partial_N g\sigma.$$

(5) Iniziamo con il porre $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, allora abbiamo che:

$$\partial_i\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_j x_j^2}}\right) = \frac{2x_i}{2\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

[14]Questo non è necessariamente vero.

passiamo alle derivate seconde:

$$\partial_i^2\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_j x_j^2}}\right)=\partial_i\left(\frac{x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{1}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{2x_i^2}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{5}{2}}}=$$

$$=\frac{\left(\sum_j x_j^2\right)-3x_i^2}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\Delta_2\left(\frac{1}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(\sum_j x_j^2\right)-3x_i^2}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3\left(\sum_j x_j^2\right)-3\left(\sum_j x_j^2\right)}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{5}{2}}}=0.$$

(6) Posto $r=\left(\sum_j x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, per quanto visto nel punto precedente, la funzione $g=\frac{1}{r}$ è armonica. Possiamo applicare la seconda identità di Green nel $D=B_r-B_\rho$, con $\rho<r$:

$$\int_{S_r-S_\rho}(f\partial_N g-g\partial_N f)\sigma=\int_D(f\Delta_2 g-g\Delta_2 f)\nu=0,$$

$$\int_{S_r}(f\partial_N g-g\partial_N f)\sigma=\int_{S_\rho}(f\partial_N g-g\partial_N f)\sigma,$$

dal punto 4 e dal fatto che $\partial_N(1/r)=1/r^2$, si ha:

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r}f\sigma=\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{S_\rho}f\sigma,$$

facendo tendere $\rho\to 0$, $\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{S_\rho}f\sigma\to f(p_0)$, da cui segue l'enunciato.

(7) Supponiamo che abbia massimo in un punto $p$ interno ad $\mathcal{M}$. Allora possiamo prendere una bolla $B$, di centro $p$ e raggio $r$, totalmente contenuta in $\mathcal{M}$, tale che $\forall q\in B\backslash\{p\}$ vale $f(q)<f(p)$, Poiché $f$ è armonica, detto $M$ il massimo di $f$ in $\partial B$, abbiamo che:

$$M<f(p)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r}f\sigma\le M.$$

Exercise. 4.12

Sia $\mathcal{M}^n$ una varietà differenziabile compatta, orientabile e senza bordo. Si mostri che $\mathcal{M}$ è orientabile se e solo se esiste una forma differenziale di grado $n$, diciamola

$\omega$, definita in $\mathcal{M}$ e non nulla in tutti i punti di $\mathcal{M}$.

**Svolgimento:**

Supponiamo che esista una $n$ forma $\omega$ non nulla in tutti i punti di $\mathcal{M}$, questa può esser espressa come:

$$\omega = adx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Supponiamo inoltre che $\mathcal{M}$ non sia orientabile, allora esiste un cambio di coordinate $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$, tale che $Det(d[f_\alpha^{-1} \circ f_\beta])$ cambi segno, poiché questo è continuo, allora esiste almeno un punto $p$ dove esso è nullo, ma allora dette $\omega_\alpha$ e $\omega_\beta$ le due rappresentazioni locali di $\omega$, si ha:

$$\omega_\beta = Det(d[f_\alpha^{-1} \circ f_\beta])[a_\alpha \circ (f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)]dx_1 \wedge ... \wedge dx_n,$$

in $p$ si avrebbe $\omega_\beta = 0$ e dunque $\omega_p = 0$, assurdo.

Supponiamo ora che $\mathcal{M}$ sia orientabile, supponiamo di aver scelto un'orientazione di $\mathcal{M}$. Inoltre, essendo $\mathcal{M}$ compatta, esistono un numero finito di intorni coordinati che la ricoprono, siano questi $V_1, ..., V_m$; ad essi possiamo associare la partizione differenziabile dell'unità $\varphi_1, ..., \varphi_m$. Siano $f_1, ..., f_m$ le parametrizzazioni relative, rispettivamente, a $V_1, ..., V_m$. Poniamo:

$$\theta = \sum_i \varphi_i Det(df_i),$$

questa è una $0$ forma non nulla in tutta $\mathcal{M}$, dunque $*\theta = \omega$ sarà ancora non nulla in tutta $\mathcal{M}$ e inoltre questa è una $n$ forma.

Exercise. 4.13

Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile, compatta, orientabile e senza bordo. Si provi che $\mathcal{M}$ non è contraibile ad un punto.

**Svolgimento:**

Per l'esercizio precedente esiste una $n$ forma differenziale $\omega$ non nulla in tutta $\mathcal{M}$, ovviamente $d\omega = 0$. Supponiamo che $\mathcal{M}$sia contraibile ad un punto allora $\omega$ è esatta, ovvero esiste una $n-1$ forma $\alpha$ tale che $d\alpha = \omega$. Ma per quanto visto nell'esercizio 4.8 esiste un punto $p$ tale che $0 = d\alpha_p = \omega_p$, assurdo.

Exercise. 4.14

Siano $A, B$ e $C$ tre funzioni differenziabili in $\mathbb{R}^3$ e si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \partial_2 R - \partial_3 Q & = A \\ \partial_3 P - \partial_1 R & = B \\ \partial_1 Q - \partial_2 P & = C \end{cases},$$

dove $P, Q$ e $R$ sono funzioni incognite in $\mathbb{R}^3$.

(1) Si mostri che condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia risolubile è:

$$\partial_1 A + \partial_2 B + \partial_3 C = 0.$$

(2) Si assuma che la condizione precedente sia soddisfatta e si determinino le funzioni $P, Q$ e $R$.

**Svolgimento:**

(1) Si consideri la forma differenziale

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy,$$

si noti che

$$d\omega = (\partial_1 A + \partial_2 B + \partial_3 C)\, dx \wedge dy \wedge dz;$$

Abbiamo che $\omega$ è chiusa se e solo se è esatta, come conseguenza del lemma di Poincaré, ovvero se e solo se esiste $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$, tale che

$d\alpha = \omega$. Dunque si ha che:

$$\partial_1 A + \partial_2 B + \partial_3 C = 0$$

se e solo se esistono $P, Q$ e $R$ tali che:

$$\begin{cases} \partial_2 R - \partial_3 Q & = A \\ \partial_3 P - \partial_1 R & = B \cdot \\ \partial_1 Q - \partial_2 P & = C \end{cases}$$

(2) Consideriamo la contrazione $H(t,p) = tp$, questa contrae $\mathbb{R}^3$ nell'origine. Abbiamo che:

$$\bar{\omega} = H^*\omega = A(tx,ty,tz)[ytdt \wedge dz - ztdt \wedge dy] +$$

$$+B(tx,ty,tz)[ztdt \wedge dx - xtdt \wedge dy] + C(tx,ty,tz)[xdt \wedge dy - ytdt \wedge dx] + \omega_1,$$

dove in $\omega_1$ sono inglobati i termini senza $dt$.

$$\alpha = I\bar{\omega} = \int_0^1 A(tp)tdt[ydz - zdy] + \int_0^1 B(tp)tdt[zdx - xdz] + \int_0^1 C(tp)tdt[xdy - ydx],$$

da cui:

$$P = \int_0^1 B(tp)tdt\, z - \int_0^1 C(tp)tdt\, y,$$
$$Q = \int_0^1 C(tp)tdt\, x - \int_0^1 A(tp)tdt\, z,$$
$$R = \int_0^1 A(tp)tdt\, y - \int_0^1 B(tp)tdt\, x.$$

EXERCISE. 4.15

Sia $v$ un campo di vettori in $\mathbb{R}^3$. Si provi che:

(1) Se $\nabla \cdot v = 0$, allora esiste un campo di vettori $u$, differenziabile, tale che $\nabla \times\ u = v$.

(2) Se $\nabla \times\ v = 0$ allora esiste una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tale che $\nabla\ f = v$.

**Svolgimento:**

(1) Poniamo $v = (a, b, c)$ e $u = (p, q, r)$, allora $\nabla \times\ u = v$ implica:

$$\begin{cases} \partial_2 q - \partial_3 r & = a \\ \partial_3 p - \partial_1 r & = b \\ \partial_1 q - \partial_2 p & = c \end{cases},$$

questo ammette soluzioni se e solo se:

$$0 = \partial_1 a + \partial_2 b + \partial_3 c = \nabla \cdot v.$$

(2) Sia $v = (a, b, c)$, e $\omega = \prec v \succ$, ovvero la 1 forma associata a $v$. Poiché $\nabla \times\ v = 0$ abbiamo $d\omega = 0$; il fatto che $\mathbb{R}^3$ è contraibile implica che $\omega$ è esatta, per il lemma di Poincaré. Dunque esiste $f$ tale che:

$$df = \omega,$$

per definizione di gradiente e di $\omega$ abbiamo che:

$$\prec \nabla f, \cdot \succ = \prec v, \cdot \succ,$$

dunque $\nabla f = v$. ( Questo è fondamentalmente identico all'esercizio 1.16)

EXERCISE. 4.16 (Teorema del punto fisso di Brower)

(1) Sia $\mathcal{M}$ una $n$ varietà compatta, orientabile e con bordo regolare $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$. Si mostri che non esiste nessuna applicazione differenziabile $f : \mathcal{M} \to \partial\mathcal{M}$ tale che $f_{|\partial\mathcal{M}}$ sia l'identità.
(2) Si dimostri il teorema del punto fisso di Brower: sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ la sfera di raggio unitario, $\{p \in \mathbb{R}^n | ||p|| \leq 1\}$. Qualunque applicazione differenziabile $g : D \to D$ ha un punto fisso, i.e. esiste $q$ tale che $g(q) = q$.

**Svolgimento:**

(1) Poiché $\mathcal{M}$ è compatta ed orientabile, tale resta $\partial\mathcal{M}$. Dunque per l'esercizio 4.12 esiste una forma differenziale $\omega$, di grado $n-1$ che sia dappertutto non nulla. Ovviamente vale $d\omega = 0$, quindi $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$, di conseguenza, supponendo che $f$ si comporti come l'identità sul bordo, abbiamo:

$$0 = \int_{\mathcal{M}} d(f^*\omega) = \int_{\partial\mathcal{M}} i^* f^* \omega = \int_{\partial\mathcal{M}} (f \circ i)^* \omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega \neq 0.$$

(2) Supponiamo che esista un'applicazione $g$ tale che non abbia punti fissi, allora possiamo definire $f$ come:

$$f(q) = t_q g(q) + (1 - t_q) q,$$

dove $t_q$ è il parametro che rappresenta il punto di intersezione della semiretta che va da $g(q)$ a $q$ con $\partial D$. Questa è ben definita in quanto una semiretta interseca una circonferenza in un unico punto, inoltre questa applicazione si comporta come l'identità sul bordo $\partial D$, infatti in quel caso il punto di intersezione della semiretta con il bordo risulta essere $q$. Questo contraddice il punto precedente.

CAPITOLO 5

# Geometria differenziale delle superfici.

## 5.1. Definizioni e teoremi di geometria differenziale delle superfici.

In questo capitolo applicheremo quanto fatto nei precedenti sulle forme differenziali alla geometria differenziale delle superfici, e non solo. Inizieremo con l'introdurre il concetto di varietà Riemanniana[1], di riferimento mobile, il concetto di isometria e le equazioni di struttura di $\mathbb{R}^n$. Dopo di che ci ricondurremo al caso delle superfici in $\mathbb{R}^3$, definendo la curvatura media e quella di Gauss, la prima e la seconda forma fondamentale, studiandone l'invarianza. Infine ci dedicheremo alla geometria intrinseca delle superfici.

Concludiamo questa piccola introduzione con un appunto di notazione: nel seguito indicheremo la presenza di un' isomorfismo di spazi vettoriali con $\approx$.

**5.1.1. Equazioni di struttura in $\mathbb{R}^n$.** Iniziamo con il ricordare i concetti di prodotto scalare, di base ortonormale e di matrice definita e semidefinita, in un generico $\mathbb{R}$ spazio vettoriale. Abbiamo, in alcuni casi, già utilizzato questi concetti senza richiamarli, per fugare ogni possibile dubbio o incertezza, visto l'importanza che avranno nel seguito, li richiamiamo ora.

Definition 5.1. Una matrice $M \in \mathfrak{M}^{n,n}(\mathbb{R})$, è detta ssemidefinita positiva (,negativa), se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (,risp. negativi) o nulli. Invece è detta definita positiva(, negativa,) se è semidefinita dello stesso tipo ma non ha autovalori nulli.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (settembre 1826 – luglio 1866) è stato un matematico e fisico tedesco. Contribuì in modo determinante allo sviluppo delle scienze matematiche.

Oppure abbiamo la condizione equivalente data dal seguente:

PROPOSITION 5.2. *Sia* $M = (m_i^j)_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathfrak{M}^{n,n}(\mathbb{R})$*, diciamo minore principale, di dimensione* $m \leq n$*, di* $M$*, la matrice* $M_m$ *data da:*

$$M_m = (m_i^j)_{i,j\in\{1,\dots,m\}},$$

*allora* $M$ *è definita positiva se e solo se*

$$Det(M_m) > 0, \quad \forall m \leq n,$$

*mentre è definita negativa se e solo se:*

$$(-1)^m Det(M_m) > 0, \quad \forall m \leq n.$$

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Detto questo, passiamo a definire un prodotto scalare:

DEFINITION 5.3. Sia $V$ un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale di dimensione $n$. Un prodotto scalare è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva. Ovvero è una forma bilineare $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, tale che ad essa sia associata una matrice $M$ simmetrica e definita positiva. Dato un prodotto scalare $\varphi$, una base $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ è detta ortonormale se e solo se $\varphi(e_i, e_j) = \delta_i^j$.

Detto questo, definiamo una varietà Riemanniana.

DEFINITION 5.4. Una varietà Riemanniana è una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ con la scelta, per ciascun punto $p$ di $\mathcal{M}$, di un prodotto scalare $\prec \cdot, \cdot \succ_p$ in $T_p(\mathcal{M})$, che varia in maniera differenziabile con $p$, ovvero, dati due campi di vettori differenziabili su $\mathcal{M}$, denotiamoli con $X$ e $Y$, l'applicazione $p \mapsto \prec X, Y \succ_p$ è differenziabile, per ogni $p$, $X$, $Y$. Il prodotto scalare $\prec \cdot, \cdot \succ$è detto usualmente metrica Riemanniana.

Grazie ad una metrica Riemanniana possiamo introdurre le nozioni di angolo, distanza, area etc. anche nel caso di varietà Riemanniane differenti da $\mathbb{R}^n$ . Facciamo notare $\mathbb{R}^n$ non è altro che un caso particolare di varietà Riemanniana, il più semplice di tutti, ma che è, in un certo senso anche il più generale; vedremo di spiegare più avanti questa affermazione.

DEFINITION 5.5. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e siano $e_i, ..., e_n$ dei campi di vettori, differenziabili, in $\mathbb{R}^n$ tali che, data la metrica Riemanniana di $\mathbb{R}^n$, denotiamola con $\prec \cdot, \cdot \succ_p$, vale $\prec e_i, e_j \succ_p = \delta_i^j$ per ogni $p$ di $\mathbb{R}^n$. Chiameremo quest'insieme di campi di vettori un riferimento mobile ortonormale di $\mathbb{R}^n$, nel seguito ometteremo quest'ultimo aggettivo; possiamo in generale introdurre il concetto di riferimento mobile nel caso di un aperto qualunque di $\mathbb{R}^n$ in maniera similare. Data un riferimento mobile di $\mathbb{R}^n$, $\{e_i\}$, possiamo definire delle forme differenziali $\omega_i$ , tali che:

$$\omega_i[e_j] = \delta_i^j.$$

[2] Dunque l'insieme $\{(\omega_i)_p\}_{i\in\{1,..,n\}}$ è la base duale della base $\{(e_i)_p\}_{i\in\{1,..,n\}}$, ed è detto il riferimento duale associato al riferimento mobile$\{e_i\}$.

Ciascuno dei $e_i$ è un'applicazione differenziabile $e_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Possiamo dunque considerarne il differenziale in un dato punto $p \in U$, questo è un'applicazione lineare $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dunque ad essa potrà esser associata una matrice, che dipende dal punto $p$, quindi possiamo scrivere:

$$(de_i)_p[v] = \sum_{j=1}^{n} (\omega_{ij})_p [v] e_j,$$

dove $(\omega_{ij})_{i,j\in\{1,..,n\}}$ è la sopracitata matrice, dunque $(\omega_{ij})_p$ è una forma lineare in $\mathbb{R}^n$, inoltre, poiché $e_i$ è un campo di vettori differenziabile, allora abbiamo che $\omega_{ij}$

[2]Da notare che potremmo porre $(\omega_i)_p = \prec e_i \succ_p$ , con $\prec \cdot \succ$ l'isomorfismo canonico definito nel primo capitolo.

è una 1-forma differenziale di $\mathbb{R}^n$. Considerando questo possiamo scrivere:

$$de_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} e_j.$$

DEFINITION 5.6. l'insieme $\{\omega_{ij}\}_{i,j\in\{1,..,n\}}$, dove $\omega_{ij}$ sono le $n^2$ 1-forme definite sopra, sono dette le forme di connessione di $\mathbb{R}^n$ nella riferimento mobile $\{e_i\}$.

LEMMA 5.7. *Siano $\{\omega_{ij}\}$ le forme di connessione associate alla riferimento mobile di $\mathbb{R}^n$, $\{e_i\}$. Queste non sono tutte linearmente indipendenti, ma sussiste la relazione:*

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo che $\omega_j[e_i] = \prec e_j, e_i \succ = \delta_i^j$, dunque:

$$\prec de_j, e_i \succ + \prec de_i, e_j \succ = 0,$$

Inoltre poiché

$$de_i = \sum_h \omega_{ih} e_h \implies \prec de_i, e_j \succ = \prec \sum_h \omega_{ih} e_h, e_j \succ =$$

$$= \sum_h \omega_{ih} \prec e_h, e_j \succ = \sum_h \omega_{ih} \delta_h^j = \omega_{ij}.$$

Il che implica:

$$\omega_{ji} + \omega_{ij} = 0.$$

□

Un punto cruciale nella trattazione dell'argomento dei riferimenti mobili è che esse devono soddisfare le cosiddette equazioni di struttura o equazioni di Élie Cartan[3]. Queste sono date nel teorema seguente:

[3]Élie Cartan (1869-1951). Matematico francese. Diede importanti contributi allo studio delle geometrie per mezzo di riferimenti mobili e alla classificazione dei gruppi di Lie.

THEOREM 5.8. *(Equazioni di struttura di $\mathbb{R}^n$.) Sia $\{e_i\}$ un riferimento mobile in un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Siano inoltre, $\{\omega_i\}$ il riferimento duale associato ad $\{e_i\}$ e $\{\omega_{ij}\}$ le forme di connessione di $U$ nel riferimento mobile$\{e_i\}$. Allora valgono:*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \tag{5.1.1}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \tag{5.1.2}$$

*e queste devono valere per ogni $i, j \in \{1, ..., n\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$, denotiamola $\{\varepsilon_i\}$, siano $x_i : U \to \mathbb{R} : (x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$. Allora

$$dx_i[\varepsilon_j] = \delta_i^j,$$

dunque $dx_i$ è il riferimento duale di $\{\varepsilon_i\}$. Possiamo esprimere sia $e_i$che $\omega_i$ in funzione di $\varepsilon_i$ e $dx_i$, come:

$$e_i = \sum_j \beta_{ij}\varepsilon_j,$$

e di conseguenza:

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j.$$

Inoltre possiamo scrivere $d\beta_{ij}$, come:

$$\beta_{ij} = \prec e_i, \varepsilon_j \succ,$$

da cui:

$$d\beta_{ij} = \prec de_i, \varepsilon_j \succ =$$

$$= \sum_k \prec \omega_{ik} e_k, \varepsilon_j \succ = \sum_{k,h} \omega_{ik} \prec \beta_{kh}\varepsilon_h, \varepsilon_j \succ = \sum_k \omega_{ik}\beta_{kj}. \tag{5.1.3}$$

Inoltre differenziando $e_i$ si ottiene:

$$de_i = \sum_j (d\beta_{ij}\varepsilon_j + \beta_{ij}d\varepsilon_j) =$$

$$= \sum_{j,k} \omega_{ik}\beta_{kj}\varepsilon_j.$$

Da cui:

$$d\omega_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_{j,k} \beta_{kj}\omega_{ik} \wedge dx_j = \sum_k \omega_{ik} \wedge \left( \sum_j \beta_{kj}dx_j \right) = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_k.$$

Ora differenziamo la (5.1.3), otteniamo:

$$0 = d^2\beta_{ij} = \sum_k (d\omega_{ik}\beta_{kj} - \omega_{ik} \wedge d\beta_{ij}) =$$

$$= \sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \left( \sum_r \omega_{kr}\beta_{rj} \right).$$

Da cui, portando il secondo termine all'altro membro e moltiplicando per l'inversa di $(\beta_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$, otteniamo:

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

$\square$

Possiamo descrivere l'idea alla base del metodo di Cartan, per lo studio delle sottovarietà di $\mathbb{R}^N$, come segue: sia $x : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, l'immersione di una data varietà differenziabile $\mathcal{M}$ nello spazio euclideo $\mathbb{R}^{n+k}$. Come conseguenza del teorema della funzione inversa, abbiamo che per ciascun $p \in \mathcal{M}^n$, esiste un intorno $U_p$ tale che $x_{|_U} : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ sia un embedding[4].

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ un intorno di $x(p)$ in $\mathbb{R}^{n+k}$ tale che: $V \cap x(\mathcal{M}) = x(U)$. Supponiamo che in $V$ ci sia un riferimento mobile $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+k}\}$, con la proprietà

[4]Si veda l'esercizio 4 del capitolo 3.

che, qualora ne considerassimo la restrizione a $x(U)$, $\{e_1, ..., e_n\}$ siano tangenti a $x(U)$; un riferimento mobile con tale proprietà è detto riferimento mobile adattato.

Associato al riferimento mobile$\{e_i\}$ di $V$, vi è il riferimento duale $\{\omega_i\}$ e le forme di connessione $\{\omega_{ij}\}$, che soddisfano necessariamente le (5.1.1) e le (5.1.2). L'applicazione $x_{|U}$ induce le forme $\{x^*\omega_i\}$ e $\{x^*\omega_{ij}\}$ in $U$. Dato che il prodotto esterno ed il differenziale esterno commutano con il cambiamento di coordinate, queste nuove forme rispettano anch'esse le (5.1.1) e le (5.1.2). Si scopre dunque che la metrica su $U$, è totalmente determinata dalle (5.1.1) e dalle (5.1.2), questo riflette il "carattere universale" di $\mathbb{R}^n$. Che oltre ad esser la più semplice delle varietà Riemanniane, è anche, in un certo senso, la più generale.

Nella prossima sottosezione applicheremo i risultati visti sui riferimenti mobili, al caso delle superfici in $\mathbb{R}^3$. Ma per fare questa abbiamo bisogno di qualche lemma preliminare.

LEMMA 5.9. *(di Cartan.) Sia $V^n$ un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale di dimensione $n$, e siano $\omega_1, ..., \omega_r : V^n \to \mathbb{R}$, con $r \leq n$, delle forme lineari in $V$, linearmente indipendenti. Supponiamo che esistano delle forme $\theta_1, ..., \theta_r : V \to \mathbb{R}$ tali che $\sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i \wedge \theta_i = 0$. Allora:*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad \textit{con} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'insieme $\{\omega_j\}_{1 \leq j \leq r}$ è un insieme libero, possiamo dunque completarlo ad una base $\{\omega_j\}_{0 \leq j \leq n}$, quindi possiamo scrivere:

$$\theta_i = \sum_{j \leq r} a_{ij}\omega_j + \sum_{r < k \leq n} b_{ik}\omega_k,$$

Utilizzando le ipotesi si ha:

$$0 = \sum_{i \leq r} \omega_i \wedge \theta_i = \sum_{i \leq r} \left( \sum_{k \leq r} a_{ik}\omega_i \wedge \omega_k + \sum_{r < h \leq n} b_{ih}\omega_i \wedge \omega_h \right) =$$

$$= \sum_{i < k \leq r} (a_{ik} - a_{ki})\omega_i \wedge \omega_k + \sum_{i \leq r < h \leq n} b_{ih}\omega_i \wedge \omega_h,$$

poiché i due addendi sono costituiti da elementi linearmente indipendenti, abbiamo che devono essere nulli i coefficienti, dunque:

$$b_{ij} = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

$\square$

Inoltre necessitiamo anche del seguente:

LEMMA 5.10. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $\omega_1, ..., \omega_n$ forme differenziali di grado 1, linearmente indipendenti e definite in $U$. Supponendo che esista un'insieme $\{\omega_{ij}\}_{i,j \in \{1,...,n\}}$ di 1 forme differenziali tali che:*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj},$$

*allora quest'insieme è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che ne esistano due: $\{\omega_{ij}\}$ e $\{\varphi_{ij}\}$. Allora:

$$\sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} = d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \varphi_{ki},$$

allora per il lemma 5.9, da:

$$\sum_k \omega_k \wedge (\omega_{ki} - \varphi_{ki}) = 0,$$

si ottiene:

$$(\omega_{ki} - \varphi_{ki}) = \sum_s a^s_{ki} \omega_s,$$

ma:

$$\sum_s a^s_{ki} \omega_s = -\sum_s a^s_{ik} \omega_s,$$

per l'indipendenza:

$$a^s_{ki} = -a^s_{ik},$$

inoltre:

$$a^k_{si} = a^s_{ki}.$$

Dalle due precedenti si ottiene:

$$a^s_{ki} = -a^s_{ik} = -a^i_{sk} = a^s_{ik} = -a^s_{ki},$$

da cui: $a^k_{ij} = 0$, di conseguenza $\omega_{ij} = \varphi_{ij}$. $\square$

Possiamo ora procedere ad applicare il metodo delle riferimenti alle superfici nello spazio.

**5.1.2. Superfici in $\mathbb{R}^3$.** Consideriamo una varietà differenziabile di dimensione 2, diciamola $\mathcal{M}^2$; sia $x : \mathcal{M}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'immersione di $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$. Possiamo definire su $\mathcal{M}$ una particolare metrica Riemanniana.

DEFINITION 5.11. Sia $p \in \mathcal{M}$, possiamo definire un prodotto scalare $\prec \cdot, \cdot \succ_p$ su $\mathcal{M}$, nel modo seguente:

$$\prec v_1, v_2 \succ_p = \prec dx[v_1], dx[v_2] \succ_{\varphi(p)},$$

dove il prodotto scalare a destra è quello canonico di $\mathbb{R}^3$. Si verifica che il prodotto scalare così definito è una metrica Riemanniana; questa è detta metrica indotta dall'immersione $x$.

Consideriamo un punto $p \in \mathcal{M}^2$, per il teorema di inversione locale esiste un intorno di $p$, $U \subseteq \mathcal{M}^2$ tale che $x_{|U}$ sia un embedding. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un intorno di $x(p)$, in $\mathbb{R}^3$, tale che $V \cap x(\mathcal{M}) = x(U)$. Consideriamo un riferimento mobile adattato $\{e_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$; dunque $e_1$ ed $e_2$ sono tangenti ad $x(U)$ e, di conseguenza, $e_3$ è normale alla stessa. Inoltre associato al riferimento mobile $\{e_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$ vi è il riferimento duale e le forme di connessione $\omega_{ij}$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Queste devono soddisfare, per quanto visto nella sottosezione precedente, le seguenti:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad d\omega_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_k \wedge \omega_{ki},$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

L'immersione $x : U \subseteq \mathcal{M} \to V \subseteq \mathbb{R}^3$, induce le forme $x^*\omega_i$ e $x^*\omega_{ij}$ in $U$, e come detto prima queste devono rispettare le equazioni di struttura. Consideriamo un punto $q \in U$, e $v \in T_q(\mathcal{M})$, calcoliamo

$$(x^*\omega_3)_q[v] = \omega_3[dx_q[v]] = \omega_3[a_1e_1 + a_2e_2] =$$

$$= a_1\omega_3[e_1] + a_2\omega_3[e_2] = a_1\delta_1^3 + a_2\delta_2^3 = 0.$$

Dunque $d(x^*\omega_3) = 0$, sfruttando le equazioni di struttura otteniamo:

$$d(x^*\omega_3) = (x^*\omega_1) \wedge (x^*\omega_{13}) + (x^*\omega_2) \wedge (x^*\omega_{23}) = 0,$$

dunque per il lemma di Cartan:

$$(x^*\omega_{i3}) = h_{i1}(x^*\omega_1) + h_{i2}(x^*\omega_2),$$

dove $h_{ij} = h_{ji}$, sono funzioni differenziabili in $U$ e $i \in \{1, 2\}$. Cerchiamo di determinare il significato geometrico delle $h_{ij}$. Iniziamo con il fare alcune piccole osservazioni e dando qualche definizione.

Definition 5.12. Notiamo che $e_3$ è un vettore unitario, dunque, dopo aver fissato un'orientazione in $U$ e preso $\{e_1, e_2, e_3\}$ orientato in ogni punto come $\mathbb{R}^3$, $e_3 : U \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$,[5] questa resta ben definita ed indipendente dalla scelta della cornice[6]. Questa verrà detta mappa di Gauss o mappa normale.

[5] In realtà qui stiamo facendo un piccolo abuso di notazione, poiché $e_i : U \to T\mathcal{M}$. Indichiamo con $e_3$ l'applicazione $j \circ e_3$, dove:

$$j : T\mathcal{M} \to S^2 : (p, v_p) \mapsto v + O.$$

continueremo ad utilizzare questo abuso di notazione.

[6] Supponendo che la riferimento mobile ed $U$ godano delle proprietà sopracitate.

Dato che $\mathcal{M}$ è orientata, possiamo definire la mappa di Gauss globalmente su $\mathcal{M}$, e questa resta continua; questo poiché possiamo definire globalmente il riferimento mobile$\{e_i\}$, che sia orientato come $\mathbb{R}^3$, in maniera continua.

Per quanto visto nella prima sottosezione, abbiamo che:

$$de_3 = -(x^*\omega_{31})e_1 + (x^*\omega_{32})e_2 = -(x^*\omega_{13})e_1 - (x^*\omega_{23})e_2,$$

dunque calcolando $(de_3)_q[v]$, con $q \in \mathcal{M}$ e $v = (a_1e_1 + a_2e_2) \in T_q(\mathcal{M})$, si ha:

$$(de_3)_q[v] = -(x^*\omega_{13})_q[v]e_1 - (x^*\omega_{23})_q[v]e_2 =$$

$$= - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

dunque la matrice $(-h_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$ è la matrice del differenziale dell'applicazione di Gauss, nella base $\{e_1, e_2\}$. Questo conclude la nostra ricerca. Poiché la matrice $(h_{ij})$ è simmetrica, possiamo concludere che il differenziale $de_3 : T\mathcal{M} \to TS^2$ della mappa di Gauss, $e_3 : \mathcal{M} \to S^2$, è un'applicazione lineare auto aggiunta[7], se si considera il fatto che $T\mathcal{M} \approx TS^2 \approx \mathbb{R}^2$e considerando, dunque, $de_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; quindi per un teorema dell'algebra lineare abbiamo che è diagonalizzabile[8] con autovalori[9] reali $-\lambda_1, -\lambda_2$, ed autovettori ortogonali.

Possiamo finalmente introdurre il concetto, o per meglio dire i concetti, di curvatura di $\mathcal{M}$:

---

[7]Dato uno spazio vettoriale $V$ dotato di prodotto scalare $\prec \cdot, \cdot \succ$, un'applicazione $f : V \to V$, lineare, è detta auto aggiunta se e solo se, per ogni $v, w \in V$, vale

$$\prec f(v), w \succ = \prec v, f(w) \succ .$$

Abbiamo che se $A$ è la matrice associata ad $f$ in una base $\{g_i\}$ e $B$ è la matrice assegnata al prodotto scalare nella stessa base, allora $f$ è auto aggiunto se e solo se:

$${}^t(A)B = BA,$$

se la base è ortonormale questa si riduce a ${}^t(A) = A$, ovvero $A$ è simmetrica.

[8]Una matrice $A$ dicesi diagonalizzabile se esiste una matrice $P$, invertibile, tale che

$$PAP^{-1} = D,$$

con $D$ diagonale.

[9]Data una matrice $A \in \mathfrak{M}^{n,n}(\mathbb{K})$, un autovettore di $A$ è un elemento $v \in \mathbb{K}^n$ tale che:

$$Av = \lambda v,$$

e $\lambda$ è detto autovalore di $A$.

DEFINITION 5.13. Definiamo la curvatura di Gauss, $K$, di $\mathcal{M}$ in $p$, come:

$$K_{\mathcal{M}}(p) = Det(de_3)_p = (\lambda_1\lambda_2)_{|_p} = [h_{11}h_{22} - (h_{12})^2]_{|_p},$$

inoltre, definiamo la curvatura media, $H$, di $\mathcal{M}$ in $p$, nel modo seguente:

$$H_{\mathcal{M}}(p) = \frac{1}{2}Trac(de_3)_p = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)_{|_p} = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})_{|_p};$$

qualora sia chiaro dal contesto ometteremo il pedice $\mathcal{M}$ o l'indicazione del punto $p$.

La due curvature non dipendono dalla scelta del riferimento mobile. Inoltre $H$ cambia segno con l'orientazione, mentre $K$ è invariante rispetto al suddetto cambio.

Le espressioni di $K$ e $H$ in termini di riferimento mobile si ottiene immediatamente:

$$(x^*\omega_{13}) \wedge (x^*\omega_2) + (x^*\omega_{32}) \wedge (x^*\omega_1) = 2H(x^*\omega_1) \wedge (x^*\omega_2),$$

$$d(x^*\omega_{12}) = (x^*\omega_{13}) \wedge (x^*\omega_{23}) = -K(x^*\omega_1) \wedge (x^*\omega_2).$$

Quest'ultima ci permette di provare il seguente, importantissimo teorema:

THEOREM 5.14. *(di Gauss) $K$ dipende unicamente dalla metrica di $\mathcal{M}^2$; ovvero, date due immersioni $x, x' : \mathcal{M}^2 \to \mathbb{R}^3$, con la stessa metrica indotta, allora $K(p) = K'(p)$, per ogni $p \in \mathcal{M}$; dove $K$ e $K'$ sono le curvature di Gauss relative, rispettivamente, alle immersioni $x$ e $x'$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $U$ un intorno coordinato di $p$, ivi consideriamo un riferimento mobile $\{e_1, e_2\}$ in $U$, supponiamo ortonormale nella metrica indotta. L'insieme $\{dx[e_1], dx[e_2]\}$ può esser esteso ad un riferimento mobile in $x(U) = v$, stessa cosa possiamo dire per $\{dx'[e_1], dx'[e_2]\}$ in $V' = x'(U)$. Allora, con ovvia notazione, $\omega_i = \omega'_i$, per dualità. Inoltre per il lemma 5.10, vale che $\omega_{12} = \omega'_{12}$. Dunque:

$$-K'\omega_1 \wedge \omega_2 = -K'\omega'_1 \wedge \omega'_2 = d\omega'_{12} = d\omega_{12} = K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

da cui $K = K'$. $\square$

Questo teorema ci dice che, nonostante la sua definizione dipenda dallo spazio ambiente utilizzato, nel nostro caso $\mathbb{R}^3$, in realtà la curvatura di Gauss è dipendente unicamente dalla misura sulla superficie.

Data un'immersione $x : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$, possiamo associare, per ogni punto $p \in \mathcal{M}$, ad essa due forme quadratiche, definite come segue.

DEFINITION 5.15. La prima forma quadratica, o prima forma fondamentale, calcolata nel punto $p \in \mathcal{M}$ sul vettore $v \in T_p(\mathcal{M})$ , denotata con $\mathbb{I}_p[v]$, è la forma quadratica associata alla forma bilineare $\prec \cdot, \cdot \succ_p$, che è data da:

$$\mathbb{I}_p[v] = \prec v, v \succ_p .$$

La seconda forma quadratica, o seconda forma fondamentale è definita in una riferimento mobile adattata, $\{e_i\}$, ed è data da:

$$\mathbb{II}_p[v] = (\omega_{13}\omega_1 + \omega_{23}\omega_2)_p[v] = \sum_{i.j} h_{ij}(\omega_i\omega_j)_p[v],$$

dove con $\omega_i\omega_j$ è indicato il prodotto simmetrico di due forme differenziali, e questo è dato da $\omega_i\omega_j[v] = \omega_i[v] \cdot \omega_j[v]$. Salvo ambiguità o contesti particolari, ometteremo l'indicazione del punto $p$.

Considerando un riferimento mobile adattato $\{e_i\}$, la prima forma fondamentale può essere scritta come

$$\mathbb{I}[v] = \omega_1\omega_1[v] + \omega_2\omega_2[v] = (\omega_1^2 + \omega_2^2)[v],$$

dunque in generale:

$$\mathbb{I} = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

In teoria si dovrebbe provare l'indipendenza della seconda forma dal riferimento mobile. Ma questo è facilmente visibile, infatti questa è la forma quadratica associata a meno l'applicazione di Gauss, nella maniera seguente:

$$\mathbb{II}_p[v] = - < de_3[v], v >_p, \quad v \in T_p(\mathcal{M}).$$[10]

Può essere conveniente vedere $\mathbb{II}$, in un altra forma ancora; quest'ultima ci permetterà di dare un'interpretazione "geometrica" della seconda forma fondamentale. Prendiamo le mosse da $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$, una curva in $\mathcal{M}$, parametrizzata tramite la lunghezza d'arco $s$, tale che: $\alpha(0) = p$ e che $\alpha'(0) = v \in T_p(\mathcal{M})$. Poniamo $x \circ \alpha(s) = x(s)$ e $e_3 \circ \alpha(s) = e_3(s)$, allora abbiamo:

$$\prec \frac{dx}{ds}, e_3(s) \succ = 0,$$

dunque:

$$\prec \frac{d^2x}{(ds)^2}, e_3(s) \succ_{|s=0} = - \left( \prec \frac{dx}{ds}, \frac{de_3}{ds} \succ \right)_{|s=0} =$$

$$= \prec \omega_1 \varepsilon_1 + \omega_2 e_2,\ \omega_{13} e_1 + \omega_{23} e_2 \succ [v] =$$

$$= \mathbb{II}_p[v].$$

Prima di continuare l'esposizione, e di concludere il nostro tentativo di dare un'interpretazione geometrica alla seconda forma fondamentale, ricordiamo qualche definizione relativa alle curve.

Definition 5.16. Sia $\alpha(s)$ una curva in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata con l'ascissa curvilinea; definiamo il campo tangente unitario, il campo normale(principale) ed il campo di vettori bi-normale alla curva, rispettivamente, come:

$$T(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s), \quad N(s) = \frac{\frac{dT}{ds}(s)}{k(s)},$$

$$B(s) = T(s) \times N(s),$$

dove $k(s) = \left\| \frac{d^2\alpha}{(ds)^2}(s) \right\|$, è detta curvatura di $\alpha$.[11] La terna $\{T, N, B\}$ è detto campo

[10] Dove consideriamo $v$ e $(de_3)[v]$ come vettori di $\mathbb{R}^2$, ed utilizziamo il classico prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$

[11] Facciamo notare che il vettore normale e quello bi normale sono definiti solo nei punti di curvatura non nulla.

dei riferimenti di Frenet[12].

Notiamo che la normale principale è parallela al vettore $\frac{d^2\alpha}{(ds)^2}$, più precisamente abbiamo:

$$k(s)N(s) = \frac{d^2\alpha}{(ds)^2},$$

da cui:

$$\prec \frac{d^2x}{(ds)^2}, e_3(0) \succ = k(0) \prec N(0), e_3(0) \succ .$$

L'espressione $k \prec N, e_3 \succ_{|s=s_0}$ è detta curvatura normale della superficie nella direzione $v = \alpha'(s_0)$ in $p = a(s_0)$, ed è denotata $k_n(v)$. Riunendo l'interpretazione precedente con le ultime osservazioni fatte otteniamo:

$$\mathbb{II}_p[v] = k_n(v).$$

Per concludere consideriamo i massimi e i minimi della seconda forma fondamentale al variare di $v \in S^2$; questi sono due e sono relativi agli autovettori $v_1$ e $v_2$ di $-(de_3)_p$, i loro valori saranno dunque gli autovalori, $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$, di $-(de_3)_p$. Diamo ora la definizione seguente:

Definition 5.17. Diciamo curvature principali di $\mathcal{M}$ in $p$, il massimo ed il minimo della seconda forma fondamentale, queste sono date da:

$$k_1 = -\lambda_1, \quad k_2 = -\lambda_2,$$

e diciamo direzioni principali in $p$, i vettori $v_1$ e $v_2$ per la quale abbiamo $\mathbb{II}_p[v_i] = k_i$[13]. Concludendo abbiamo che la prima e la seconda forma fondamentale determinano localmente la geometria di una superficie, questo verrà spiegato con il teorema seguente:

[12]Jean Frédéric Frenet (1816-1900), matematico francese.
[13]Per quanto detto sopra questi sono gli autovettori di $-(de_3)_p$.

THEOREM 5.18. *Siano $U$ ed $U'$ due sottovarietà connesse di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che esistano due riferimenti mobili adattate $\{e_i\}$ ed $\{e_i'\}$, rispettivamente, in $U$ ed in $U'$, ed un differomorfismo $f : U \to U'$ tale che:*

$$f^*\omega_i' = \omega_i, \quad f^*\omega_{ij}' = \omega_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

*Allora esiste un movimento rigido $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $\rho_{|_U} = f$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\rho$ il movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ che trasporta $p$ in $f(p)$ e $e_1$ in $e_1'$; sia $g = f \circ \rho^{-1}$ . Iniziamo con il considerare il riferimento mobile dato da:

$$\tilde{e}_i = d\rho[e_i].$$

Estendiamo la notazione in maniera ovvia, indicando con $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_{ij}$, rispettivamente, il riferimento duale e le forme di connessione associate ad $\{\tilde{e}_i\}$. Detto $q = f(p)$ abbiamo che:

$$d(\tilde{e}_i)_q[v] = \sum_j (\tilde{\omega}_{ij})_q[v](\tilde{e}_j)_q.$$

Definiamo $e_i' \circ g$ come $(e_i' \circ g)(q) = e_i'(g(q))$. Allora:

$$d(e_i' \circ g)_q[v] = d(e_i')_{g(q)}[dg_q[v]] = \sum_j (\omega_{ij}')_{g(q)}[dg_q[v]](e_j')_{g(q)} =$$

$$= \sum_j (g^*\omega_{ij}')_q[v](e_i' \circ g)_q = \sum_j (\tilde{\omega}_{ij})_q[v](e_i' \circ g)_q.$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che:

$$g^*\omega_{ij}' = (f \circ \rho^{-1})^*\omega_{ij}' = (\rho^{-1})^*(f^*\omega_{ij}') = (\rho^{-1})^*\omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}.$$

Poiché $q$ e $v$ sono generici, ne segue che $\tilde{e}_i - (e_i' \circ g)$ soddisfa il sistema di equazioni differenziali dato da:

$$\tilde{e}_i - (e_i' \circ g) = \sum_j \tilde{\omega}_{ij}(\tilde{e}_j - (e_j' \circ g)),$$

la condizione iniziale nel punto $p$ è:

$$[\tilde{e}_i - (e'_i \circ g)](\rho(p)) = 0.$$

Di conseguenza $\tilde{e}_i = e'_i \circ g$. In maniera similare si prova che $\tilde{x} = x' \circ g$, con $\tilde{x} : \rho(U) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ e $x' : U' \to \mathbb{R}^3$ le due inclusioni, questo prova che $g$ è l'identità di $U$, e di conseguenza l'asserto. $\square$

COROLLARY 5.19. *Siano $U$ ed $U'$ due sottovarietà connesse di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che esista un diffeomorfismo $f : U \to U'$, che preservi le due forme fondamentali, ovvero:*

$$\mathbb{I}_p[v] = \mathbb{I}'_{f(p)}[df_p[v]], \quad \mathbb{II}_p[v] = \mathbb{II}'_{f(p)}[df_p[v]],$$

*per ogni $p$ e per ogni $v$. Allora esiste un movimento rigido $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\rho_{|U} = f$.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. ( Questa dimostrazione è contenuta nel [**DoCDF**], capitolo 5.) $\square$

**5.1.3. Geometria intrinseca delle superfici.** Nello studio delle superfici in $\mathbb{R}^3$ vi sono certe entità geometriche che, come la curvatura di Gauss, dipendono unicamente dalla metrica sulla superficie, in questa sezione analizzeremo questo tipo di proprietà con il metodo delle riferimenti mobili.

Iniziamo con il considerare una varietà differenziabile di dimensione 2, $\mathcal{M}^2$, dotata di metrica Riemanniana $\prec \cdot, \cdot \succ_p$. Per ciascun punto $p \in \mathcal{M}$ possiamo scegliere un intorno $U$, dove resti definita una coppia di campi vettori differenziabili ortonormali su $U$, $\{e_1, e_2\}$. A questa, che verrà detta, con un piccolo abuso di notazione, riferimento mobile possiamo associare una coppia di forme differenziali, un riferimento duale, sempre con abuso di notazione, $\{\omega_1, \omega_2\}$, utilizzando la condizione

$\omega_i(e_j) = \delta_i^j$. Il punto cruciale è riuscire a definire delle forme che giochino il ruolo di forme di connessione[14] in questo caso.

Per quanto visto precedentemente, se esistesse un embedding $x : U \to \mathbb{R}^3$, tale da essere un isometria[15]; in questo caso potremmo ottenere una riferimento mobile $\{e'_1, e'_2, e_3\}$ ed un aperto $V \supseteq x(U)$, in $\mathbb{R}^3$, tale che il riferimento mobile sia una riferimento mobile adattato che estenda la cornice$\{x^*e_1, x^*e_2\}$, in $x(U)$. Osservando le equazioni di struttura osserviamo che le sole forme, tra forme di connessione e riferimento duale, a non dipendere dal vettore "esterno" $e_3$ sono: $\omega_1, \omega_2$ e $\omega_{12}$. Potrebbe dunque essere ragionevole supporre che esista un'unica forma $\omega_{12} = -\omega_{21}$, in $U$, tale che valgano le:

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1. \tag{5.1.4}$$

In effetti questo è vero, come detto nel seguente:

THEOREM 5.20. *(di Levi-Civitta.) Sia $\mathcal{M}$ una varietà Riemanniana di dimensione 2, sia $U \subseteq \mathcal{M}$ un aperto di $\mathcal{M}$ dove è definita una coppia di campi di vettori tangenti ortonormali, ovvero un riferimento mobile, $\{e_1, e_2\}$ e siano, infine, $\omega_1, \omega_2$ la riferimento duale associato ad $\{e_1, e_2\}$. Allora esiste un'unica forma differenziale su $\mathcal{M}$, $\omega_{12} = -\omega_{21}$, tale che valgano le (5.1.4).*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è già stata provata nel lemma 5.10. Per provarne l'esistenza poniamo:

$$\omega_{12}[e_1] = d\omega_1[e_1, e_2], \quad \omega_{12}[e_2] = d\omega_2[e_1, e_2],$$

e si verifiacno le proprietà richieste:

$$\omega_{12} = \omega_{12}[e_1]dx_1 + \omega_{12}[e_2]dx_2 =$$

[14]Queste utilizzavano, per la loro definizione, lo spazio ambiente $\mathbb{R}^3$.

[15]Ovvero l' embedding $x$ è tale che il prodotto scalare su $U$ può esser visto come il prodotto scalare indotto da $\mathbb{R}^3$.

$$= d\omega_1[e_1, e_2]dx_1 + d\omega_2[e_1, e_2]dx_2 =$$

$$= -(d\omega_1[e_2, e_1]dx_1 + d\omega_2[e_2, e_1]dx_2) = -\omega_{21}.$$

$$d\omega_1[e_1, e_2] = \omega_{12}[e_1] = \omega_{12}[e_1]\omega_2[e_2] - \omega_{12}[e_2]\omega_2[e_1] = (\omega_{12} \wedge \omega_2)[e_1, e_2],$$

ed in maniera perfettamente identica si mostra che $d\omega_2 = \omega_{12} \wedge \omega_1$, da notare che questa dimostrazione fornisce ,una volta note $\omega_1$e $\omega_2$, un metodo di calcolo per $\omega_{12}$. □

Il problema che ci poniamo è quello di poter ricavare delle entità geometriche a partire da $\omega_1, \omega_2$ e $\omega_{12}$; prima di procedere con la soluzione del problema, analizziamo il comportamento di $\omega_{12}$ al variare della cornice.

LEMMA 5.21. *Sia $\mathcal{M}$,$U$,$\{e_1, e_2\}$,$\omega_1, \omega_2$ e $\omega_{12}$ come nel teorema precedente; sia inoltre $\{\bar{e}_1, \bar{e_2}\}$ un altro riferimento mobile in $U$, questo può esser scritto come:*

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = fe_1 + ge_2, \\ \bar{e}_2 = -ge_1 + fe_2, \end{cases} \tag{5.1.5}$$

*nel caso l'orientazione sia la stessa,*

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = fe_1 + ge_2, \\ \bar{e}_2 = ge_1 - fe_2, \end{cases} \tag{5.1.6}$$

*nel caso di orientazione opposta; con $f, g : U \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili tali che $f^2 + g^2 = 1$.*

*Allora abbiamo che:*

$$\omega_{12} = -\bar{\omega}_{12} - \tau,$$

*nel caso avessero orientazione opposta, e:*

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau,$$

*nel caso avessero stessa orientazione. Dove $\tau = fdg - gdf$.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo solo il caso di orientazione uguale, il restante caso si mostra in maniera perfettamente identica. Iniziamo con il considerare le (5.1.5), da queste otteniamo:

$$\begin{cases} \omega_1 = f\bar{\omega}_1 + g\bar{\omega}_2, \\ \omega_2 = -g\bar{\omega}_1 + f\bar{\omega}_2, \end{cases}$$

Differenziando la priam di queste si ottiene:

$$d\bar{\omega}_1 = df \wedge \omega_1 + f d\omega_1 - dg \wedge \omega_2 - g d\omega_2,$$

utilizzando le equazioni di struttura per $d\bar{\omega}_1$ e $d\bar{\omega}_2$, usando inoltre il fatto che $\omega_{12} = -\omega_{21}$ , si ottiene:

$$d\omega_1 = \bar{\omega}_1 \wedge \omega_2 + (fdf + gdg) \wedge \omega_1 + (gdf - fdg) \wedge \omega_2,$$

Considerato che $f^2 + g^2 = 1 \implies fdf + gdg = 0$, si ha:

$$d\omega_1 = (\bar{\omega}_{12} - \tau) \wedge \omega_2.$$

In maniera similare si ottiene:

$$d\omega_2 = -(\bar{\omega}_{12} - \tau) \wedge \omega_1,$$

per unicità otteniamo $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau$. $\square$

Tentiamo di fornire un'interpretazione geometrica alla forma $\tau$ introdotta nel lemma (5.21), per farlo abbiamo bisogno del seguente:

LEMMA 5.22. *Sia $p \in \mathcal{M}$, e sia $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ una curva tale che $\gamma(t_0) = p$. Sia*

$\varphi_0 = Ang(e_1(p), \bar{e}_1(p))$[16], *allora:*

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \left( f\frac{dg}{dt} - g\frac{df}{dt} \right) dt + \varphi_0,$$

*è una funzione differenziabile tale che:*

$$cos\,(\varphi(t)) = f(t), \quad sen\,(\varphi(t)) = g(t),$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad d\varphi = \gamma^* \tau.$$

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzitutto che:

$$f(t)cos(t) + g(t)sen(t) = 1.$$

Iniziamo con il notare che, per definizione di $\varphi$, vale:

$$\varphi^{'} = fg^{'} - gf^{'}.$$

Allora:

$$(fcos(\varphi) + gsen(\varphi))^{'} = f^{'}cos(\varphi) - f\varphi^{'}sen(\varphi) + g^{'}sen(\varphi) + g\varphi^{'}cos(\varphi) =$$

$$= (f^{'} + fgg^{'} - g^2f^{'})cos(\varphi) + (g^{'} + gff^{'} - f^2g^{'})sen(\varphi) =$$

Poiché $f^2 + g^2 = 1$ abbiamo $ff^{'} = -gg^{'}$, da cui:

$$= (f^{'} - f^2f^{'} - g^2f^{'})cos(\varphi) + (g^{'} - g^2g^{'} - f^2g^{'})sen(\varphi) =$$

$$= f^{'}[1 - (f^2 + g^2)]cos(\varphi) + g^{'}[1 - (f^2 + g^2)]sen(\varphi) = 0.$$

Di conseguenza $fcos(\varphi) + gsen(\varphi) = c \in \mathbb{R}$, inoltre da $f(t_0) = cos(t_0)$ e $g(t_0) = sen(t_0)$ otteniamo che:

$$fcos(\varphi) + gsen(\varphi) = 1.$$

[16]Dove $Ang : V \times V \to \mathbb{R}^3$, con $V$ uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare, che ci dà l'angolo tra due vettori, data da:

$$Ang(v, w) = arccos\left(\frac{\prec v, w \succ}{||v||||w||}\right).$$

Da cui segue:

$$(f-cos(\varphi))^2+(g-sen(\varphi))^2 = f^2+g^2+[cos(\varphi)]^2+[sen(\varphi)]^2-2(fcos(\varphi)+gsen(\varphi)) =$$

$$= 2-2 = 0,$$

il che implica $cos(\varphi) = f$ e $sen(\varphi) = g$, e da questo segue il lemma. $\square$

Dunque un interpretazione geometrica della 1-forma $\tau$, può essere la seguente; data una curva in $U$, $\tau$è il differenziale della funzione "angolo" tra i vettori $e_1$ ed $\bar{e}_1$, lungo la curva. Adesso possiamo iniziare ad entrare nel vivo dell'argomento ed a sviluppare la trattazione della geometria intrinseca delle superfici. Iniziamo con il far notare che, passando alle riferimenti duali nelle (5.1.5) o nelle (5.1.6) e eseguendo i prodotti esterni otteniamo:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = \sigma,$$

Dunque abbiamo che $\sigma$ non dipende dal cambio di riferimento mobile, come conseguenza, può esser definito globalmente su $\mathcal{M}$.

Definition 5.23. Sia $\mathcal{M}^2$ una varietà Riemanniana, la 2-forma differenziale localmente definita in un dato aperto $U \subseteq \mathcal{M}$ come:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sigma,$$

dove $\{\omega_1, \omega_2\}$ è la riferimento duale di una riferimento mobile $\{e_1, e_2\}$ definita in $U \subseteq \mathcal{M}$, è detta elemento d'area.

Per quanto detto sopra l'elemento d'area resta globalmente ben definito, il suo significato geometrico è facilmente visibile; siano $v_1, v_2$ due vettori tangenti in $p \in \mathcal{M}$, linearmente indipendenti, allora se $v_i = \sum_j a^i_j e_j$, si ha:

$$\sigma[v_1, v_2] = Det(a^i_j) = Area(v_1, v_2);$$

ovvero rappresenta l'area del parallelogramma che ha per lati $v_1$ e $v_2$. L'elemento d'area ci permette di definire un altro oggetto fondamentale della geometria intrinseca delle superfici, questo è dato nel seguente:

THEOREM 5.24. *Sia $\mathcal{M}^2$ una varietà Riemanniana. Per ciascun punto $p \in \mathcal{M}$, definiamo il numero $K(p)$ scegliendo una riferimento mobile in un intorno di $p$ e ponendo:*

$$(d\omega_{12})_p = -K(p)(\omega_1 \wedge \omega_2)_p.$$

*Allora $K(p)$ non dipende dalla scelta del riferimento mobile ed è detto curvatura di Gauss di $\mathcal{M}$ in $p$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un'altro riferimento mobile in un intorno di $p$, denotiamolo con $\{\bar{e_1}, \bar{e_2}\}$. Supponiamo che l'orientazione sia la stessa, in caso contrario si procede allo stesso modo, allora:

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau,$$

poiché $\tau = fdg - gdf$, $d\tau = 0$, di conseguenza $d\omega_{12} = d\bar{\omega}_{12}$.Ne consegue:

$$-K\omega_1 \wedge \omega_2 = d\omega_{12} = d\bar{\omega}_{12} = -\bar{K}\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = -\bar{K}\omega_1 \wedge \omega_2,$$

quindi $K = \bar{K}$. □

Un concetto fondamentale nello studio della geometria intrinseca è la derivata covariante.

DEFINITION 5.25. Sia $\mathcal{M}$ una varietà Riemanniana di dimensione 2 e sia $Y$ un campo di vettori differenziabile su $\mathcal{M}$. Dati $p \in \mathcal{M}$ e $x \in T_p(\mathcal{M})$, consideriamo la curva $\alpha : (-a, a) \to \mathcal{M}$ tale che $\alpha(0) = 0$ e che $\alpha'(0) = x$. Definiamo la derivata covariante di $Y$ lungo $x$ in $p$, che verrà indicata con $\nabla_x Y(p)$; data una riferimento mobile $\{e_i\}$ in un intorno di $p$, possiamo esprimere $Y(\alpha(t))$ come:

$$Y(\alpha(t)) = \sum_j y_j(t)e_i,$$

poniamo allora:

$$\nabla_x Y(p) = \sum_i \left( \frac{dy_i}{dt}(0) + \sum_j \omega_{ji}(x) y_j(0) \right) e_i,$$

con la convenzione già utilizzata in precedenza che $\omega_{ii} = 0$.

Il lemma seguente ci garantisce che la derivata covariante è ben definita.

LEMMA 5.26. *La derivata covariante non dipende dalla scelta del riferimento mobile.*

DIMOSTRAZIONE. COnsideriamo due riferimenti mobili ortonormali $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ , supponiamoli con medesima orientazione, nel caso di orientazione opposta la dimostrazione è pressochè invariata. Allora:

$$\begin{cases} y_1 = & f\bar{y}_1 - g\bar{y}_2 \\ y_2 = & g\bar{y}_1 + f\bar{y}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} e_1 = & f\bar{e}_1 - g\bar{e}_2 \\ e_2 = & g\bar{e}_1 + f\bar{e}_2 \end{cases}, \tag{5.1.7}$$

dove $Y(\alpha(t)) = \sum y_i(t)e_i = \sum \bar{y}_i(t)\bar{e}_i$ e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni differenziabili tali che $f^2 + g^2 = 1$. Per definizione:

$$\nabla_x Y = \left( \frac{dy_1}{dt} + \omega_{12}[x] y_2 \right) e_1 + \left( \frac{dy_2}{dt} + \omega_{12}[x] y_1 \right) e_2,$$

dove tutto è calcolato in $t = 0$. Utilizzando la (5.1.7), il fatto che $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - \tau$ e $f^2 + g^2 = 1$, dopo lunghi ma semplici calcoli si perviene a:

$$\nabla_x Y = \left( \frac{d\bar{y}_1}{dt} + \bar{\omega}_{12}[x] \bar{y}_2 \right) \bar{e}_1 + \left( \frac{d\bar{y}_2}{dt} + \bar{\omega}_{12}[x] \bar{y}_1 \right) \bar{e}_2,$$

da cui l'asserto. $\square$

La derivata covariante può essere utilizzata per dare un'interpretazione geometrica a $\omega_{12}$, la forma di connessione associata alla riferimento mobile $\{e_1, e_2\}$, infatti:

$$\nabla_x e_1 = \omega_{12}(x) e_2,$$

da cui si ricava:

$$\omega_{12}(x) = \prec \nabla_x e_1, e_2 \succ .$$

In altri termini, la seconda componente della derivata covariante di $e_1$ lungo $x$, non è null'altro che la forma $\omega_{12}$ applicata ad $x$. Daremo più avanti, nella parte degli esercizi, un'interpretazione geometrica della derivata covariante, almeno nel caso $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$.

L'introduzione della derivata covariante è il primo passo per definire i concetti principali della geometria Riemanniana in dimensione due, per una trattazione approfondita di questo argomento si rinvia ai testi in bibliografia o ad altri testi sull'argomento[17]. Consideriamo una varietà Riemanniana di dimensione 2, che d'ora in avanti sarà denotata con $\mathcal{M}$, almeno fino alla fine del capitolo. Iniziamo a definire alcuni concetti.

Definition 5.27. Data una curva $\alpha : [-a, a] \to \mathcal{M}$, un campo di vettori $Y$ su $\alpha$ è detto parallelo lungo $\alpha$ se e solo se $\nabla_{\alpha'(t)} Y = 0$, per ogni $t \in [-a, a]$.

Definition 5.28. Una curva $\alpha : [a, b] \to \mathcal{M}$ è detta una geodetica se e solo se $\alpha'(t)$ è un campo di vettori parallelo lungo $\alpha$.

Definition 5.29. Supponiamo che $\mathcal{M}$ sia orientabile, sia $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ una curva differenziabile, parametrizzata con l'ascissa curvilinea $s$. In un intorno $U \subseteq \mathcal{M}$ di un punto della curva $\gamma(s)$, consideriamo una riferimento mobile , $\{e_1, e_2\}$ in un orientazione di $\mathcal{M}$ tale che, ristretto ad $\gamma$, $e_1(s) = \gamma'(s)$. La curvatura geodetica di

[17]Una panoramica di questi concetti è contenuta nel capitolo quarto del [**DoCDG**].

$\gamma$, denotata con $k_g^\gamma$ o più semplicemente $k_g$, in $\mathcal{M}$ è data da:

$$k_g = (\gamma^* \omega_{12})(\frac{d}{ds}),$$

con $\frac{d}{ds}$ la base canonica si $\mathbb{R}$.[18]

PROPOSITION 5.30. *Siano $\gamma$ e $\{e_1, e_2\}$ come nella definizione precedente, l'unica variazione è che qui non supporremmo orientabilità di $\mathcal{M}$ e dunque $e_2$ può assumere due possibili versi. Allora $e_1$ è parallelo lungo $\gamma$ se e solo se $\gamma^* \omega_{12} = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. $e_1$ è parallelo lungo $\gamma$ se e solo se $\nabla_{e_1} e_1 = 0$. In questo caso:

$$\omega_{12}[e_2] = \prec \nabla_{e_1} e_1, e_1 \succ = 0$$

e

$$\omega_{12}[e_1] = \prec \nabla_{e_1} e_1, e_2 \succ = 0,$$

di conseguenza $\omega_{12} = 0$, ovvero $\gamma^* \omega_{12} = 0$, come richiesto. $\square$

COROLLARY 5.31. *Data una curva $\alpha$ su $\mathcal{M}$, allora questa è una geodetica se e solo se la curvatura geodetica è nulla lungo $\alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla proposizione precedente e dalla definizione di derivata covariante. $\square$

Un'interpretazione geometrica della curvatura geodetica è data dal seguente.

PROPOSITION 5.32. *Supponiamo che $\mathcal{M}$ sia orientabile, sia $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ una curva differenziabile, parametrizzata con l'ascissa curvilinea $s$. Sia $V$ una campo di vettori parallelo lungo $\gamma$ e sia $\varphi = Ang(V, \alpha'(0))$, misurato nell'orientazione data. Allora:*

$$k_g(s) = \frac{d\varphi}{ds}.$$

[18] Qui si sta utilizzando il teorema 1.7 del capitolo uno.

DIMOSTRAZIONE. Si scelgano due riferimenti mobili con orientamento positivo$\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ in un intorno di $\alpha(s)$, definiti come segue:

$$e_1 = V/|V|; \quad \bar{e}_1 = \alpha^{'}(s);$$

definiti inizialment in un tratto di $\alpha$ intorno ad $\alpha(s)$ e poi estesi ad un intorno di $\alpha$ in $\mathcal{M}$. Denotiamo $\omega_{12}$ e $\bar{\omega}_{12}$ le forme di connessione associate a $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, rispettivamente.

Ora $\varphi$ è l'angolo compreso tra $e_1$ ed $\bar{e}_1$, ed è definito a meno di una costante, ma $d\varphi$ è ben definito inoltre:

$$d\varphi = -\alpha^*\omega_{12} + \alpha^*\bar{\omega}_{12}.$$

Poiché $e_1$ è parallelo lungo $\alpha$ abbiamo che $\alpha^*\omega_{12} = 0$, considerato che $\bar{e}_1 = \alpha^{'}$, otteniamo:

$$k_g = (\alpha^*\bar{\omega}_{12})(d/ds) = d\varphi(d/ds) = \frac{d\varphi}{ds}.$$

$\square$

La dimostrazione della proposizione precedente contiene anche un'interpretazione della curvatura di Gauss in termini di trasporto parallelo. Proviamo a riassumerla. Consideriamo un punto $p \in \mathcal{M}$, ed un duo intorno $D \subseteq \mathcal{M}$ che sia omeomorfo ad un disco con bordo liscio $\partial D$. Sia $q \in \partial D$ e $V_0 \in T_q(\mathcal{M})$, un vettore unitario, trasportiamo $V$ parallelamente a se stesso lungo $\partial D$, ovvero consideriamo un campo di vettori parallelo tale che $V : [a, b] \to T\mathcal{M} : t \mapsto (\gamma(t), V(t))$ e che $V(0) = V_0$; con $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ una parametrizzazione del bordo $\partial D$, tale che $\gamma(a) = \gamma(b) = q$ e che sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea $s$. Quando il campo di vettori $V$ ritorna su $q$ formerà un angolo $\varphi$ con $V_0$. Consideriamo le riferimenti $\{e_1 = \gamma'(a),\ e_2\}$ e $\{\bar{e}_1 = V(a),\ \bar{e}_2\}$, definite lungo $\gamma$.Ora nella dimostrazione della proposizione precedente si trova che $d\varphi = \gamma^*\bar{\omega}_{12}$. Da cui:

$$-\int_{\partial D} \gamma^*\omega_{12} = \int_{\partial D} d\varphi = \varphi,$$

ma per il teorema di Stokes:

$$\varphi = -\int_{\partial D} \gamma^* \omega_{12} = -\int_D d\omega_{12} = \int_D K\sigma.$$

Per il teorema del valore medio del calcolo integrale, abbiamo che

$$K(p) = \lim_{D \to p} \frac{\varphi}{Area(D)},$$

Da cui si deduce che la curvatura di Gauss dà conto di quanto differisca dall'identità un trasposto parallelo lungo un piccolo cerchio attorno a $p$.

Con questo concludiamo la parte relativa ai teoremi ed alle definizioni, passiamo ora allo svolgimento degli esercizi.

## 5.2. Esercizi di geometria differenziale delle superfici.

Come d'abitudine passiamo alla parte riguardante gli esercizi.

Exercise. 5.1 (il toro piatto)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione definita da:

$$f(x, y) = (cos(x),\ sin(x),\ cos(y),\ sin(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

Si mostri che:

(1) $f$ è un'immersione e che $f(\mathbb{R}^2)$ è omeomorfo a $\mathbb{T}^2$ , ovvero il toro.
(2) La riferimento mobile$\{e_i = \partial_i f\}_{i \in \{1,2\}}$ in $f(\mathbb{R}^2)$ è ortonormale nella metrica indotta su $f(\mathbb{R}^2)$ da $\mathbb{R}^4$. Si calcolino inoltre $\omega_1$, $\omega_2$ e $\omega_{12}$.
(3) La curvatura gaussiana della metrica indotta è zero.

**Svolgimento:**

(1) Calcoliamo $df$, questo ci dà:

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -sen(x) & cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -sen(y) & cos(y) \end{pmatrix},$$

il rango di questa è due, dunque $df_p \neq 0$ per ogni punto di $\mathbb{R}^2$; di conseguenza questa è un'immersione. Inoltre abbiamo che $f(\mathbb{R}^2) = S^1 \times S^1$, e dunque visto l'esercizio 3.2, si ha che $f(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{T}^2$.

(2) Abbiamo che:

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{pmatrix} -sen(x) & cos(x) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f(x,y) = ( \begin{matrix} 0 & 0 & -sen(y) & cos(y) \end{matrix} ),$$

di conseguenza:

$$||\partial_1 f||^2 = [sen(x)]^2 + [cos(x)]^2 = 1,$$

$$||\partial_2 f||^2 = [sen(y)]^2 + [cos(y)]^2 = 1,$$

$$\prec \partial_1 f, \partial_2 f \succ = 0.$$

Posto $e_1 = \partial_1 f$ e $e_2 = \partial_2 f$ , abbiamo che:

$$de_1 = \begin{pmatrix} -cos(x)dx & -sen(x)dx & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$de_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -cos(y)dy & -sen(y)dy \end{pmatrix},$$

di conseguenza:

$$\omega_{12} = \prec de_1, e_2 \succ = 0 = -\omega_{21},$$

$$\omega_1 = dx,$$

$$\omega_2 = dy,$$

(3) Poiché la curvatura di Gauss $K$ è tale che:

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

$d\omega_{12} = 0$ e $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, allora $K = 0$.

Exercise. 5.2

Sia $\mathbb{H}^2_+$ il semipiano superiore di $\mathbb{R}^2$, ovvero:

$$\mathbb{H}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, y > 0\},$$

Si consideri il seguente prodotto scalare in $\mathbb{H}^2_+$, dato da:

$$(u \cdot v)_p = \frac{\prec u, v \succ}{y_p^2},$$

dove $\prec \cdot, \cdot \succ$ è il prodotto scalare canonico. Si provi che questa è una metrica Riemanniana in $\mathbb{H}^2_+$ la cui curvatura Gaussiana $K$ è $-1$; $\mathbb{H}^2_+$ con questa metrica è detto piano iperbolico.

**Svolgimento:**

Iniziamo con il dimostrare che $\cdot$ è un prodotto scalare. Questo è simmetrico, infatti:

$$(u \cdot v)_p = \frac{\prec u, v \succ}{y_p^2} = \frac{\prec v, u \succ}{y_p^2} = (v \cdot u)_p,$$

inoltre è bilineare:

$$(u \cdot [\alpha v + \beta w])_p = \frac{\prec u, \alpha v + \beta w \succ}{y_p^2} =$$

$$= \alpha \frac{\prec u, v \succ}{y_p^2} + \beta \frac{\prec u, w \succ}{y_p^2} = \alpha (u \cdot v)_p + \beta (u \cdot w)_p.$$

Ed ovviamente definita positiva, poiché $y_p^2 > 0$ per ogni $p$ e per ogni $u$ vale $\prec u, u \succ > 0$. Consideriamo il riferimento mobile:

$$f_1 = ye_1, \quad f_2 = ye_2,$$

questo è ortonormale poiché:

$$f_i \cdot f_j = \frac{y^2 \prec e_i, e_j \succ}{y^2} = \delta_i^j.$$

Dobbiamo calcolarci $\omega_1$e $\omega_2$, queste possono esser scritte nella forma:

$$\omega_i = a_1^i dx + a_2^i dy,$$

imponendo la condizione $\omega_i[f_j] = \delta_i^j$, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a_1^1 y = 1 & a_2^1 y = 0 \\ a_1^2 y = 0 & a_2^2 y = 1 \end{cases}$$

di conseguenza:

$$\omega_1 = \frac{dx}{y}, \quad \omega_2 = \frac{dy}{y},$$

differenziando:

$$d\omega_1 = -\frac{1}{y^2} dx \wedge dy,$$

$$d\omega_2 = 0.$$

Per definizione si ha:

$$y\omega_{12}[e_i] = \omega_{12}[f_i] = d\omega_i[f_1, f_2],$$

di conseguenza:

$$y\omega_{12}[e_1] = \frac{-y^2}{y^2} = -1, \quad y\omega_{12}[e_2] = 0,$$

finalmente otteniamo che $\omega_{12} = \omega_{12}[e_1]dx + \omega_{12}[e_2]dy = -\frac{dx}{y}$. Sussiste la relazione:

$$\frac{1}{y^2} dx \wedge dy = d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy,$$

da cui $K = -1$.

Exercise. 5.3

Sia $\mathcal{M}$ una varietà Riemanniana di dimensione due. Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$ una parametrizzazione di $\mathcal{M}$ tale che $f_u = df(\partial_1)$ e $f_v = df(\partial_2)$ siano ortogonali,

$(u,v) \in U$. Poniamo $E = \prec f_u, f_u \succ$ e $G = \prec f_v, f_v \succ$. Si consideri il riferimento mobile ortonormale $e_1 = f_u/\sqrt{E}$ e $e_2 = f_v/\sqrt{G}$. Si mostri che:

(1) Il riferimento duale è:

$$\omega_1 = \sqrt{E}du, \quad \omega_2 = \sqrt{G}dv.$$

(2) Le forme di connessione sono date da:

$$\omega_{12} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv, \quad \omega_{12} = -\omega_{21}.$$

(3) La curvatura gaussiana di $\mathcal{M}$ è:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}.$$

**Svolgimento:**

(1) Iniziamo con il calcolare il riferimento duale, poiché $\omega_i[e_j] = \delta_i^j$ , posto $\omega_i = a_i du + b_i dv$,otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{\sqrt{E}}du[f_u] + \frac{b_1}{\sqrt{E}}dv[f_u] & = 1 \\ \frac{a_1}{\sqrt{G}}du[f_v] + \frac{b_1}{\sqrt{G}}dv[f_v] & = 0 \\ \frac{a_2}{\sqrt{G}}du[f_v] + \frac{b_2}{\sqrt{G}}dv[f_v] & = 1 \\ \frac{a_1}{\sqrt{E}}du[f_u] + \frac{b_1}{\sqrt{E}}dv[f_u] & = 0 \end{cases},$$

Da cui otteniamo:

$$b_1 = a_2 = 0, \quad a_1 = \sqrt{E}, \quad b_2 = \sqrt{G};$$

quindi $\omega_1 = \sqrt{E}du$, mentre $\omega_2 = \sqrt{G}dv$.

(2) Per definizione abbiamo che

$$\omega_{12}[e_i] = d\omega_i[e_1, e_2],$$

dunque visto che:

$$d\omega_1 = -(\sqrt{E})_v du \wedge dv, \quad d\omega_2 = (\sqrt{G})_u du \wedge dv,$$

abbiamo:

$$d\omega_1[e_1, e_2] = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}, \quad d\omega_2 = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}};$$

quindi:

$$\frac{\omega_{12}[f_u]}{\sqrt{E}} = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}, \quad \frac{\omega_{12}[f_v]}{\sqrt{G}} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}},$$

$$\omega_{12} = \omega_{12}[f_u]du + \omega_{12}[f_v]dv = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv.$$

(3) Iniziamo con il notare che: $\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG} du \wedge dv$, resta da calcolare $d\omega_{12}$, questo è dato da:

$$d\omega_{12} = -\left(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v du \wedge dv + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u du \wedge dv =$$

$$= \left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\} du \wedge dv,$$

Ricordando che $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$, si ottiene:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\}.$$

Exercise. 5.4

Sia $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Si mostri che non esiste un campo di vettori non nullo $X$ in $S^2$.

**Svolgimento:**

Supponiamo che tale campo esista, allora il campo di vettori unitario $e_1 = X/||X||$ è ben definito in tutta $S^2$, inoltre è anche differenziabile. Consideriamo $e_2$ normale a $e_1$ e unitario, tale che la coppia $\{e_1, e_2\}$ abbia la stessa orientazione di $S^2$. Poiché

$K = 1$, abbiamo $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2 = -\sigma$, di conseguenza:

$$4\pi = \int_{S^2} \sigma = \int_{S^2} -d\omega_{12} = \int_{\partial S^2} \omega_{12} = \int_{\emptyset} \omega_{12} = 0.$$

Assurdo.

Exercise. 5.5

SI consideri $\mathbb{R}^2$ con il seguente prodotto scalare: Dato $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u, v \in T_p(\mathbb{R}^2)$, allora:

$$\prec u, v \succ_p = \frac{u \cdot v}{(g(p))^2},$$

dove $u \cdot v$ è il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un'applicazione non nulla. SI mostri che la curvatura gaussiana della metrica associata ad esso è:

$$K = g(g_{xx} + g_{yy}) - (g_x^2 + g_y^2).$$

**Svolgimento:**

Consideriamo il riferimento mobile:

$$e_1 = g(p)a_1, \quad e_2 = g(p)a_2,$$

questo è ovviamente un riferimento ortonormale. Iniziamo con il calcolarci $\omega_1$, $\omega_2$, queste sono le duali di $e_1$,$e_2$, quindi si deve avere: $\omega_i[e_j] = \delta_i^j$; dalla quale, poste $\omega_1 = a_1^1 dx + a_2^1 dy$ e $\omega_2 = a_1^2 dx + a_2^2 dy$, discende il sistema:

$$\begin{cases} a_1^1 g(p) = 1 & a_2^1 g(p) = 0 \\ a_1^2 g(p) = 0 & a_2^2 g(p) = 1 \end{cases},$$

da cui si deduce:

$$\omega_1 = \frac{dx}{g(p)}, \quad \omega_2 = \frac{dy}{g(p)};$$

differenziando otteniamo:

$$d\omega_1 = \frac{g_y}{g^2} dx \wedge dy, \quad d\omega_2 = \frac{g_x}{g^2} dx \wedge dy.$$

Di conseguenza:

$$g\omega_{12}[a_1] = \omega_{12}[e_1] = d\omega_1[e_1, e_2] = g_y,$$

$$g\omega_{12}[a_2] = \omega_{12}[e_2] = d\omega_2[e_1, e_2] = -g_x.$$

da cui risulta $\omega_{12} = \frac{g_y}{g}dx - \frac{g_x}{g}dy$, differenziando:

$$d\omega_{12} = -\left(\frac{g_{yy}}{g} - \frac{g_y^2}{g^2}\right)dx \wedge dy - \left(\frac{g_{xx}}{g} - \frac{g_x^2}{g^2}\right)dx \wedge dy =$$

$$-\frac{1}{g^2}\left[g\left(g_{yy} + g_{xx}\right) - \left(g_x^2 + g_y^2\right)\right]dx \wedge dy = -K\omega_1 \wedge \omega_2 =$$

$$= -\frac{1}{g^2}Kdx \wedge dy.$$

Da cui: $K = g(g_{xx} + g_{yy}) - (g_x^2 + g_y^2)$.

Exercise. 5.6

Sia $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie con metrica indotta. Dato $p \in \mathcal{M}$, $x \in T_p\mathcal{M}$ ed un campo di vettori tangenti a $\mathcal{M}$, si mostri che:

$$(\nabla_x Y)(p) = \pi_{T_p\mathcal{M}}\left(\frac{dY(\alpha(s))}{ds}\right)_{|0},$$

dove $\alpha : I \to \mathcal{M}$ è una curva differenziabile, $s \in I$, $\alpha$unitaria, $\pi_{T_p\mathcal{M}}$ è la proiezione su $T_p\mathcal{M}$ ed infine $\frac{dY}{ds}$ è l'usuale derivata di $\mathbb{R}^2$. Allora si concluda che $\gamma$, unitaria è una geodetica se e solo se il vettore $\frac{d^2\gamma}{(ds)^2}$ è ortogonale alla superficie.

**Svolgimento:**

$\gamma$ è una geodetica se e solo se $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Dato che

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \pi_{T_p\mathcal{M}}\left(\frac{d(\gamma')}{ds}\right) = \pi_{T_p\mathcal{M}}\left(\frac{d^2\gamma}{(ds)^2}\right) = 0,$$

da cui l'asserto.

Exercise. 5.7

Sia $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria con la metrica indotta da $\mathbb{R}^3$. Si mostri che:

(1) Le geodetiche di $S^2$ sono i cerchi di raggio massimo.

(2) La mappa antipodale

$$A : S^2 \to S^2$$

$$p \mapsto -p$$

è un'isometria.

(3) Il piano proiettivo reale $\mathbb{PR}^2$( considerato come sfera in cui vengono identificati i punti diametralmente opposti,) può essere dotato di una metrica in maniera tale che $\pi : S^2 \to \mathbb{PR}^2$ sia un'isometria locale.

**Svolgimento:**

(1) Iniziamo l'osservare che un eventuale rotazione della superficie non cambia la perpendicolarità di un vettore alla stessa, di conseguenza è sufficiente dimostrare che l'equatore è una geodetica ed in automatico tutte le circonferenze di raggio massimo sono delle geodetiche. Consideriamo la parametrizzazione di $S^2$, esclusi (0,0,1) e (0,0,-1), data da:

$$\Gamma(\theta, \varphi) = (cos(\theta)cos(\varphi), \ sen(\theta)cos(\varphi), \ sen(\varphi)). \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$$

un cerchi di raggio massimo può esser parametrizzato fissando uno dei due tra $\theta$ e $\varphi$. Consideriamo il riferimento mobile dato da:

$$f_1 = \partial_1 \Gamma(\theta, \varphi) = (-sen(\theta)cos(\varphi), cos(\theta)sen(\varphi), 0),$$

$$f_2 = \partial_2 \Gamma(\theta, \varphi) = (-cos(\theta)sen(\varphi), \ -sen(\theta)sen(\varphi), \ cos(\varphi)),$$

posti $e_1 = f_1/||f_1||$ ed $e_2 = f_2$ , questi sono un riferimento mobile ortonormale. In questa parametrizzazione per ottenere l'equatore è sufficiente porre $\varphi = 0$, di conseguenza la sua parametrizzazione diviene:

$$\gamma = (cos(\theta),\ sen(\theta),\ 0),$$

da cui

$$\gamma' = (-sen(\theta),\ cos(\theta),\ 0),$$

$$\gamma'' = -(cos(\theta),\ sen(\theta),\ 0),$$

abbiamo che $\prec \gamma'', e_1 \succ = \prec \gamma'', e_2 \succ = 0$, di conseguenza è normale alla superficie il che implica, per l'esercizio 5.6, che l'equatore è una geodetica.

(2) Siano $u,\ v \in \mathbb{R}^n$, allora:

$$\prec dA[u], dA[v] \succ = \prec A(u), A(v) \succ = \prec -u, -v \succ = \prec u, v \succ,$$

dunque $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : p \mapsto -p$ è un'isometria, in particolare questo continua a valere se $n = 3$.

(3) Dotiamo il proiettivo della metrica seguente, date due classi $[p]$, $[q]$ allora definiamo:

$$< [p], [q] > = \prec p^+, q^+ \succ,$$

dove $p^+$ è il membro della classe che ha prima coordinata non nulla positiva. Questo è evidentemente simmetrico, bilineare, definito positivo e ben definito. Consideriamo ora un qualsiasi punto $p$ di $S^2$, questo ha sicuramente almeno una coordinata non nulla, non è restrittivo supporre la prima, consideriamo $U = \{(x, y, z) \in S^2 |\ x_p x > 0\}$[19], questo è un intorno di $p$ in $S^2$. Si consideri $q \in U$, questo ha la prima coordinata dello stesso segno di $p$, dunque

$$< \pi(q), \pi(p) > = < [q], [p] > = \prec p^+, q^+ \succ = \prec p, q \succ,$$

in maniera similare si opera con gli altri casi.

[19] Nel caso la prima fosse nulla si considera la seconda e si prende come $U = \{(x, y, z) \in S^2 |\ y_p y > 0\}$, nel caso l'unica coordinata non nulla fosse la terza si considera $U = \{(x, y, z) \in S^2 |\ z_p z > 0\}$.

EXERCISE. 5.8

Sia $\mathcal{M}$ una varietà Riemanniana di dimensione due. Lo scopo dell'esercizio è mostrare che La curvatura gaussiana di $\mathcal{M}$ è nulla se e solo se è localmente euclidea, ovvero, se in un intorno di ciascun punto esiste un sistema di coordinate $(u, v)$ tale che la prima forma fondamentale associata sia $\mathbb{I} = du^2 + dv^2$. Ovviamente se $\mathbb{I}$ è come sopra allora vale $K = 0$. Per dimostrare il viceversa si proceda come segue:

(1) Si scelga un riferimento mobile $\{e_1, e_2\}$,in un intorno di $p \in \mathcal{M}$. Poiché $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, per il lemma di Poincaré esiste $\theta$ in un intorno di $p$ tale che $d\theta = \omega_{12}$.
(2) Si scelga Un'Altra riferimento $\{\bar{e}_1, \bar{e_2}\}$ ponendo $Ang(e_1, \bar{e_1}) = \theta$.Si mostri che la forma di connessione $\bar{\omega}_{12}$ è identicamente nulla.
(3) Si mostri che $\bar{\omega}_{12} = 0$, implica che $d\bar{\omega}_1 = d\bar{\omega}_2 = 0$, e si usi il lemma di Poincaré per ottenere il sistema di coordinate richiesto.

**Svolgimento:**

Per il 5.21, abbiamo la seguente correlazione tra $\omega_{12}$ e $\bar{\omega}_{12}$, posto che i due riferimenti abbaino stessa orientazione:

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} - \tau,$$

dove, per il lemma 5.22, abbiamo che $\tau = d\theta$, ma per ipotesi $d\theta = \omega_{12}$, di conseguenza $\bar{\omega}_{12} = 0$. Questo prova il punto 2. Possiamo scrivere $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{12}[\bar{e}_1]dx + \bar{\omega}_{12}[\bar{e}_2]dy$, di conseguenza:

$$0 = \bar{\omega}_{12}[\bar{e}_1] = d\bar{\omega}_1[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = a_1 dx \wedge dy[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = a_1,$$

in maniera identica si dimostra che $d\bar{\omega}_2 = 0$, il che implica che $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ sono esatte, per il lemma di Poincaré. quindi esistono $u$, $v$ tali che $du = \bar{\omega}_1$ e $dv = \bar{\omega}_2$ , inoltre scrivendo la metrica di questo riferimento otteniamo:

$$\mathbb{I} = \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 = du^2 + dv^2.$$

CAPITOLO 6

# Il Teorema di Gauss-Bonnet e il Teorema di Morse.

Questo è l'ultimo capitolo di questa trattazione. In questo capitolo si introdurrà il teorema di Gauss-Bonnet, uno dei più interessanti risultati della geometria, questo teorema stabilisce un collegamento entro la geometria differenziale e la topologia di una superficie. La dimostrazione di questo teorema fa uso di quanto è stato fatto nei capitoli precedenti, dall'esistenza di una partizione differenziabile dell'unità alle riferimenti mobili introdotte nel capitolo precedente, e si consiglia di vederla almeno una volta. La versione contenuta nel capitolo 6 del [**DoCDF**], è sostanzialmente quella dovuta a S.S.Chern. Andiamo ora a vedere i risulti e le definizioni più importanti riguardanti questo capitolo.

## 6.1. Definizioni e teoremi dell'ultimo capitolo.

Prima di iniziare a introdurre i concetti principali del capitolo, vediamo di fare qualche appunto di carattere generale. Iniziamo dicendo che d'ora in avanti, per tutta la durata di questa prima sezione, una qualsiasi varietà differenziabile verrà considerata dotata di metrica Riemanniana. D'ora in poi $\mathcal{M}$ indica una varietà differenziabile, compatta, orientata e di dimensione 2. Passiamo ora alle definizioni.

**6.1.1. Il Teorema di Gauss-Bonnet.** Iniziamo con l'introdurre il concetto di punto singolare in un campo di vettori.

Definition 6.1. Sia $X$ un campo di vettori differenziabile su $\mathcal{M}$; un punto $p \in \mathcal{M}$ è detto singolare per $X$ se e solo se $X(p) = 0$. Un punto singolare $p \in \mathcal{M}$ è detto isolato se esiste un suo intorno $V \subseteq \mathcal{M}$ tale che non contenga punti singolari per $X$

differenti da $p$. Per convenienza, in generale prenderemo $V$ omeomorfo ad un disco di $\mathbb{R}^2$.

Dato che $\mathcal{M}$ è compatta abbiamo che il numero di punti singolari isolati è finito. Dato un punto singolare isolato di un campo di vettori $X$, possiamo associargli un numero intero. Iniziamo con il considererà in $V$, un intorno del punto singolare $p$ che non contenga altri punti singolari. Consideriamo su $V \backslash \{p\}$ due riferimenti: $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, con medesima orientazione e con la seconda tale che $\bar{e}_1 = \frac{X}{||X||}$, tale che $\bar{e}_2$ sia ortogonale ad $\bar{e}_1$ e che diamo orientati come $\mathcal{M}$. Per quanto visto nel capitolo precedente:

$$\bar{\omega}_{12} - \omega_{12} = \tau,$$

e questa è definita in tutto $V \backslash \{p\}$.

DEFINITION 6.2. Definiamo l'indice di $X$ rispetto a $p$, come il numero reale $I_p^X$, o più semplicemente $I$, dato da:

$$\int_C \tau = 2\pi I.$$

Dove $C$ è una curva chiusa che sia il bordo di un compatto $K$ di $\mathcal{M}$, tale che $p \in K \subseteq V$.

LEMMA 6.3. *L'indice non dipende dalla scelta della curva $C$, inoltre $I \in \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Tralasceremo la dimostrazione del fatto che l'indice è un intero, assumeremo questo fatto come dato. Siano $\gamma_1$e $\gamma_2$ due curve chiuse e semplici attorno a $p$, come nella definizione di indice. Assumiamo inizialmente che esse non si intersechino e denotiamo $\Delta$ la regione compresa tra esse. Sia $I_1$ l'indice calcolato rispetto a $\gamma_1$ e $I_2$ l'indice calcolato rispetto a $\gamma_2$. Per il teorema di Stokes ed il fatto che $d\tau = 0$, otteniamo:

$$I_1 - I_2 = \int_{\gamma_1} \tau - \int_{\gamma_2} \tau = \int_{\Delta} d\tau = 0.$$

□

Il lemma appena visto non ci garantisce che l'indice è ben definito, infatti vi sarebbe ancora la dipendenza dell'indice dal riferimento mobile$\{e_i\}$, di questo ci occuppiamo con il lemma seguente.

LEMMA 6.4. *La definizione dell'indice non dipende dalla scelta del riferimento mobile. Più precisamente, sia $S_r = \partial B_r$ il bordo di un disco di raggio $r$ e centro $p$, consideriamo il riferimento mobile$\{\bar{e}_1, \bar{e_2}\}$ della definizione. Allora il limite*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \bar{\omega}_{12} = \bar{I},$$

*esiste, e $I = \bar{I}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $S_{r_1}$ e $S_{r_2}$ due cerchi concentrici, $r_2 < r_1$, e sia $\Delta$ la regione delimitata dai due. Per il teorema di Stokes:

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - \int_{S_{r_2}} \bar{\omega}_{12} = \int_{\Delta} d\bar{\omega}_{12}, \tag{6.1.1}$$

questo tende a zero al tendere a zro di $r_1$ e $r_2$, si noti che $\bar{\omega}_{12}$ non è definita in ; ciononostante, $d\bar{\omega}_{12} = -K\sigma$ è certamente definita dappertutto. Ne consegue che ogni successione

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12}, ..., \int_{S_{r_n}} \bar{\omega}_{12}, ...,$$

con $r_n \to 0$ è una successione di Cauchy e dunque convergente. Di conseguenza esiste il limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \bar{\omega}_{12} = \bar{I},$$

ora resta da mostrare che questo è $I$.

Consideriamo la (6.1.1), si fissi $r_1$ e si faccia tendere a zero $r_2$, otteniamo:

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} - 2\pi\bar{I} = \int_{B_{r_1}} d\bar{\omega}_{12} = -\int_{B_{r_1}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2.$$

D'altro canto, poiché $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + \tau$, abbiamo

$$\int_{S_{r_1}} \bar{\omega}_{12} = \int_{S_{r_1}} \omega_{12} + \int_{S_{r_1}} \tau = \int_{B_{r_1}} d\omega_{12} + \int_{S_{r_1}} \tau =$$

$$= -\int_{B_{r_1}} K\omega_1 \wedge \omega_2 + 2\pi I.$$

Dalle due precedenti otteniamo l'asserto. □

Infine abbiamo il seguente:

LEMMA 6.5. *L'indice non dipende dalla metrica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\prec, \succ_0$ e $\prec, \succ_1$ due metriche riemanniane su $\mathcal{M}$. Dato $t \in [0,1]$, sia

$$\prec, \succ_t = t \prec, \succ_1 + (1-t) \prec, \succ_0 .$$

Allora $\prec, \succ_t$ è ancora una metrica Riemanniana su $\mathcal{M}$. Le $\prec, \succ_t$ sono una famiglia di metriche Riemanniane, dipendenti dal solo parametro $t$, che inizia con $\prec, \succ_0$ e termina con $\prec, \succ_1$. Sia allora $I_t$ l'indice corrispondente alla metrica $\prec, \succ_t$, $I_t$ è una funzione continua di $t$, ma è anche a valori discreti in quanto $I_t \in \mathbb{Z}$, dunque è necesariamente costante. □

Enunciamo ora il teorema di Gauss-Bonnet.

THEOREM 6.6. *(di Gauss-Bonnet) Sia $\mathcal{M}$ una varietà di dimensione due compatta e orientata. Dato un capo di vettori $X$su $\mathcal{M}$con delle singolarità isolate $p_1, ..., p_k$ i cui indici sono $I_1, ..., I_k$. Allora per ogni metrica riemanniana su $\mathcal{M}$, abbiamo:*

$$\int_{\mathcal{M}} K\sigma = 2\pi \sum_{i=1}^{k} I_i, \tag{6.1.2}$$

*dove $K$ è la curvatura di Gauss della metrica e $\sigma$ l'elemento d'area.*

DIMOSTRAZIONE. Si consideri, in $\mathcal{M} \setminus (\bigcup_i \{p_i\})$ il riferimento mobile $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ , con $\bar{e}_1 = X/|X|$ ed $\bar{e}_2$ ortogonale ad $\bar{e}_1$ e nella stessa orientazione di $\mathcal{M}$. Denotiamo con $B_i$ la sfera di centro $p_i$ tale che non contenga altri punti singolari oltre a $p_i$. Per il teorema di Stokes, abbiamo che:

$$\int_{\mathcal{M} \setminus \bigcup_i B_i} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = -\int_{\mathcal{M} \setminus \bigcup_i B_i} d\bar{\omega}_{12} = \int_{\bigcup_i \partial B_i} \bar{\omega}_{12} = \sum_i \int_{\partial B_i} \bar{\omega}_{12},$$

dove $\partial B_i$ ha l'orientazione indotta da $B_i$. Facendo tendere il raggio di $B_i$ a zero otteniamo:

$$\int_{\mathcal{M}} K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = 2\pi \sum_i I_i.$$

□

Possiamo generalizzare il teorema a superfici con bordo.

THEOREM 6.7. *(di Gauss-Bonnet) Sia $\mathcal{M}$ una varietà con bordo orientata, compatta e di dimensione 2, sia $X$ un campo di vettori differenziabile su $\mathcal{M}$, trasversale a $\partial\mathcal{M}$, ovvero non è tangente ad $\partial\mathcal{M}$ in alcun punto. Supponiamo che $X$ abbia solo delle singolarità isolate $p_1, ..., p_k$, tutte non su $\partial\mathcal{M}$, e siano $I_1, ..., I_k$, rispettivamente, i loro indici. Allora per ogni metrica Riemanniana su $\mathcal{M}$ vale:*

$$\int_{\mathcal{M}} K\sigma + \int_{\partial\mathcal{M}} k_g ds = 2\pi \sum_{i=1}^{k} I_i, \tag{6.1.3}$$

*con $k_g$ la curvatura geodetica di $\partial\mathcal{M}$ e $s$ la sua lunghezza d'arco.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Notiamo che i primi membri delle (6.1.3) e (6.1.2), sono invarianti per diffeomorfismi nel caso delle superfici compatte e orientate, di conseguenza lo sono anche i secondi membri, che facciamo notare non dipendono dalla metrica utilizzata.

DEFINITION 6.8. Il numero $\sum_i I_i$ è detto caratteristica di Eulero-Poincaré ed è indicata con $\chi(\mathcal{M})$, questa, oltre ad essere invariante per diffeomorfismi, non dipende dalla metrica su $\mathcal{M}$.

Un teorema la cui dimostrazione verrà omessa è il seguente; questo verrà utilizzato nel seguito e fornisce comunque un dato dell'importanza della caratteristica di Eulero-Poincaré.

THEOREM 6.9. *Data un superficie compatta connessa ed orientata, $\mathcal{M}$; questa è omeomorfa ad una superficie $\mathcal{M}'$ se e solo se*

$$\chi(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{M}').$$

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

**6.1.2. Il Teorema di Morse.** Un teorema collegato a quello di Gauss-Bonnet è quello dovuto a M. Morse. Questo mette in stretta relazione la topologia di una superficie $\mathcal{M}^2$, data dalla sua caratteristica di Eulero-Poincaré, con i punti critici di una certa classe di funzioni. Denoteremo, da ora fino alla fine del capitolo, salvo specificazioni, con $\mathcal{M}$ una varietà orientata, compatta e di dimensione 2.

DEFINITION 6.10. Sia $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, il punto $p \in \mathcal{M}$ è detto critico se e solo se $df_p = 0$. Un punto critico è detto non degenere se e solo se esiste una parametrizzazione $g$ in un intorno di $p = g(0,0)$, tale che $Det(A) \neq 0$, dove :

$$A = H_g(f)[p] = \begin{pmatrix} \partial_1^2(f \circ g) & \partial_{12}(f \circ g) \\ \partial_{21}(f \circ g) & \partial_2^2(f \circ g) \end{pmatrix} (0,0).$$

LEMMA 6.11. *La definizione di punto critico non degenere non dipende dalla parametrizzazione $g$ utilizzata.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p$ un punto critico per $f$ nella parametrizzazione $g_\alpha$ e sia $g_\beta$ un'altra parametrizzazione in un intorno di $p$, allora:

$$H_{g_\beta} = [d(g_\alpha \circ g_\beta)] H_{g_\alpha} [d(g_\alpha \circ g_\beta^{-1})]^{-1},$$

Dunque per il teorema di Binet se $Det(H_{g_\alpha}) = 0$ allora $Det(H_{g_\beta}) = 0$. □

DEFINITION 6.12. Il gradiente di $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ è quel campo di vettori $\nabla f : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$, dato da:

$$\prec \nabla f, v \succ_p = df_p[v],$$

per ogni $v \in T_p\mathcal{M}$ e $\prec \cdot, \cdot \succ_p$ una metrica su $\mathcal{M}$.

Da cui si ottiene il seguente:

LEMMA 6.13. *Un punto $p$ è critico per $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}^n)$ se e solo se è un punto singolare per $\nabla\, f$.*

DIMOSTRAZIONE. Il punto $p$ è critico per $f$ se e solo se, fissata una parametrizzazione in un intorno di $p$, per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ vale:

$$0 = \partial_i f(p) = \prec \nabla\, f, e_i \succ,$$

e questo è vero se e solo se $\nabla\, f = 0$. $\square$

Ora ci serva una classificazione dei punti critici non degeneri, diamola nella seguente:

DEFINITION 6.14. Sia $p$ un punto critico non degenere di $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, sia $A$ la matrice $(\partial_{ij}(f \circ g)(p))_{i,j \in \{1,2\}}$ e $g$ una parametrizzazione in un intorno di $p$. Consideriamo l'espressione seguente:

$$d = h(x,y) - h(0,0) = \left[ \left(\partial_1^2 h\right)_{|0} x^2 + (\partial_{12} h)_{|0}\, xy + \left(\partial_2^2 h\right)_{|0} y^2 \right] + o(x^2 + y^2),$$

dove $h = f \circ g$, e nel passaggio tra secondo e terzo membro si è utilizzato uno sviluppo di Taylor. Allora se $Det(A) > 0$ diremo che:

- $p$ è un punto di minimo se $d > 0$, in qualche intorno di $p$.
- $p$ è un punto di massimo se $d < 0$, in qualche intorno di $p$.

invece se $Det(A) < 0$ è detto punto di sella.

Ora possiamo enunciare il Teorema di Morse.

THEOREM 6.15. *(di Morse) Sia $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su una superficie compatta ed orientata $\mathcal{M}$, tale che ogni suo punto critico sia non degenere. Denotiamo con $M, m$ e $s$ rispettivamente il numero dei punti di massimo,minimo e di sella di $f$. Allora il numero $M + m - s$ non dipende da $f$; Inoltre:*

$$M + m - s = \chi(\mathcal{M}).$$

DIMOSTRAZIONE. Si scelga una metrica Riemanniana su $\mathcal{M}$. Per questa dimostrazione si sfrutteranno i risultati contenuti nei lemmi e nelle proposizioni citate nel seguito. Poiché i punti critici di $f$ sono non degeneri, allora le singolarità di $\nabla f$ sono isolate e semplici. Dunque l'indice di $\nabla f$ è 1 se il punto è massimo o un minimo e $-1$ se il punto è di sella. Per il teorema di Gauss Bonnet abbiamo dunque che

$$2\pi \sum_i I_i = M + m - s,$$

e questa somma non dipende dalla metrica considerata ed è proprio la cartteristica di Eulero-Poincaré della varietà. $\square$

Diamo ancora qualche definizione.

DEFINITION 6.16. Sia $X$un campo di vettori differenziabile su $\mathcal{M}$, sia $p \in \mathcal{M}$ un punto singolare per $X$ ed infine sia $g : U \to \mathcal{M}$ una parametrizzazione in un intorno di $p = g(0,0)$. Nella base $\{\partial_1, \partial_2\}$, associata a $g$, possiamo scrivere $X$ come:

$$(X \circ g)(x, y) = \alpha(x, y)\partial_1 + \beta(x, y)\partial_2,$$

con $(x, y) \in U$. Dove $\alpha, \beta : U \to \mathbb{R}$ sono funzioni differenziabili, poiché $p$ è singolare allora $\alpha(0,0) = \beta(0,0) = 0$. Definiamo la matrice della parte lineare di $X$ come:

$$A_g = \begin{pmatrix} \partial_1\alpha & \partial_2\alpha \\ \partial_1\beta & \partial_2\beta \end{pmatrix} (0,0).$$

Diremo che $p$ è una singolarità semplice se e solo se $Det(A_g) \neq 0$.

LEMMA 6.17. *Il fatto che una singolarità sia semplice non dipende dalla parametrizzazione $g$ usata.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Possiamo chiederci come il fatto che $p$ sia un punto critico non degenere si rifletta su gradiente di $f$, la risposta è data dal seguente.

PROPOSITION 6.18. *Sia $p \in \mathcal{M}$ un punto critico per una funzione differenziabile $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, definita su una varietà Riemanniana $\mathcal{M}^2$. Allora $p$ è non degenere se e solo se è una singolarità semplice per $\nabla f$.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Inoltre si scopre che le singolarità semplici sono isolate.

LEMMA 6.19. *Sia $p \in \mathcal{M}$ una singolarità semplice per una campo di vettori differenziabile $X$. Allora $p$ è una singolarità isolata.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

COROLLARY 6.20. *I punti critici non degeneri di una funzione $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ sono isolati.*

DIMOSTRAZIONE. Discende direttamente dai lemmi precedenti. □

Per il lemma 6.19 ha senso parlare di un indice rispetto ad una singolarità semplice.

PROPOSITION 6.21. *Sia $p \in \mathcal{M}$ un punto singolare semplice per un campo di vettori $X$. L'indice di $X$ in $p$ è sia $1$, nel caso il determinante della parte lineare di $X$ sia positivo, sia $-1$, nel caso il determinante della parte lineare di $X$ sia negativo.*

DIMOSTRAZIONE. Omessa. □

Con questi lemmi necessari alla dimostrazione del lemma di Morse si conclude la parte teorica dell'ultimo capitolo, passiamo ora agli esercizi.

## 6.2. Esercizi sui teoremi di Morse e di Gauss-Bonnet.

EXERCISE. 6.1

Si calcoli la caratteristica di Eulero Poincaré dei seguenti:

(1) Un ellissoide.
(2) $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$.

**Svolgimento:**

(1) Per quanto visto la caratteristica di Poincaré è invariante per omeomorfismi, dunque la caratteristica di Poincaré dell'ellissoide $\mathcal{E}$ è la stessa della sfera unitaria $S^2$. Sappiamo inoltre che la curvatura di Gauss della sfera unitaria è $K = 1$, di conseguenza:

$$4\pi = \int_{S^2} \sigma = \int_{S^2} K\sigma = 2\pi\chi(\mathcal{M}),$$

da cui:

$$\chi(\mathcal{E}) = \chi(S^2) = 2.$$

(2) Definiamo anzitutto l'applicazione segno, data da:

$$sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ y \mapsto \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases},$$

questa è costante, dunque continua in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, l'unico punto di discontinuità è 0; inoltre gode della proprietà $sgn(y) = sgn(sgn(y))$. Adesso consideriamo le applicazioni $\varrho$ e $\varsigma$:

$$\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto sgn(y)\sqrt{|y|},$$

$$\varsigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto sgn(y)y^2.$$

Le due applicazioni appena definite sono sicuramente continue in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, in quanto prodotto di applicazioni continue, inoltre $\varrho(0) = \varsigma(0) = 0$; calcoliamo il limite destro e sinistro delle due:

$$\lim_{x\to 0^+} \varrho(x) = \lim_{x\to 0^+} sgn(x)\sqrt{|x|} = 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \varrho(x) = \lim_{x\to 0^-} sgn(x)\sqrt{|x|} = -1 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \varsigma(x) = \lim_{x\to 0^+} sgn(x)x^2 = 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \varsigma(x) = \lim_{x\to 0^-} sgn(x)x^2 = -1 \cdot 0 = 0.$$

Dunque sono entrambe continue, infine $\varrho(\varsigma(x)) = \varrho(sgn(x)x^2) = sgn(sgn(x))|x| = sgn(x)|x| = x$, in maniera simile $\varsigma(\varrho(y)) = \varsigma(sgn(y)\sqrt{|y|}) = sgn(sgn(y))|y| = sgn(y)|y| = y$, dunque sono un l'inversa dell'altra. Definiamo la seguente funzione:

$$\varphi : S^2 \to \mathcal{M} : (x, y, z) \mapsto (x, \varrho(y), \sqrt[3]{z}),$$

questa è continua e biunivoca, la sua inversa è data da:

$$\psi : \mathcal{M} \to S^2 : (x, y, z) \mapsto (x, \varsigma(y), z^3).$$

Resta da verificare che dato $(x, y, z) \in S^2$ allora $\varphi(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{M}$, ma poiché $(x, y, z) \in S^2$ abbiamo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

da cui:

$$\alpha^2 + \beta^4 + \gamma^6 = x^2 + (sgn(y)\sqrt{|y|})^4 + (\sqrt[3]{z})^6 = x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Dunque $\varphi$ è un omeomorfismo tra $S^2$ ed $\mathcal{M}$, di conseguenza:

$$2 = \chi(S^2) = \chi(\mathcal{M}).$$

Exercise. 6.2

Si dimostri che non esiste una metrica Riemanniana sul toro $\mathbb{T}$ tale che $K$ sia non nulla e non cambi segno in $\mathbb{T}$.

**Svolgimento:**

Supponiamo che tale metrica esista, allora $K$ sarà o positiva in tutto il toro o negativa sullo stesso. Supponiamola positiva. Inoltre La caratteristica di Poincaré del toro piatto, e dunque del toro, è 0, poiché la sua curvatura di Gauss è nulla (vedi esercizio 5.1). Di conseguenza:

$$0 < \int_{\mathbb{T}} K\sigma = \chi(\mathbb{T}) = 0.$$

Assurdo.

Exercise. 6.3

Sia $\mathcal{M}$ una varietà compatta, orientabile, connessa e di dimensione 2. Supponiamo di aver dimostrato che $\chi(\mathcal{N}) = \chi(\mathcal{M})$ implichi $\mathcal{N} \stackrel{\sim}{=} \mathcal{M}$. SI mostri che le condizioni seguenti sono equivalenti:

(1) Esiste un campo di vettori differenziabile $X$ non nullo in tutti i punti di $\mathcal{M}$.
(2) $\chi(\mathcal{M}) = 0$
(3) $\mathcal{M}$ è omeomorfa al toro.

**Svolgimento:**

1. $\implies$ 2. Poiché $X$ è non nullo allora non ha punti singolari, di conseguenza, denotato con $I_i^X$ l'indice di $X$ rispetto all'iesimo punto singolare, si ha:

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_{i \in \emptyset} I_i^X = 0.$$

2. $\implies$ 3. Poiché $\chi(\mathbb{T}) = 0$ questo implica che $\chi(\mathbb{T}) = \chi(\mathcal{M})$ dunque $\mathcal{M} \cong \mathbb{T}$.

3. $\implies$ 1. Per il teorema 3.21, abbiamo che $\mathcal{M}$ è diffeomorfa al toro piatto; denotiamo $\psi : T \to \mathcal{M}$ il diffeomorfismo tra i due. Il toro piatto è parametrizzato da:

$$T(\theta, \varphi) = (cos\theta, sen\theta, cos\varphi, sen\varphi), \quad \varphi, \theta \in \mathbb{R},$$

abbiamo che il campo di vettori $X = \partial_1 T$ è non nullo sul toro piatto, poiché $\psi$ è un diffeomorfismo allora $d\psi_p$ è non degenere per ogni $p$ del toro piatto, di conseguenza $d\psi[X] : \mathcal{M} \to T\mathcal{M} : p \to d\psi_p[X_p]$ è non nullo in tutta $\mathcal{M}$.

Exercise. 6.4

Sia $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che $\mathcal{M}$ sia compatta, orientata e non omeomorfa alla sfera. Si mostri che allora esistono dei punti in cui $K$ è negativa, positiva e nulla.

**Svolgimento:**

Poiché $K$ è una funzione continua su un compatto, essa ammette massimo e minimo. Se il massimo è positivo ed il minimo negativo abbiamo concluso, possiamo dunque limitarci a supporre che entrambi siano positivi, ed operando in maniera simile si tratta il caso in cui entrambi siano negativi. Qualora $K$ sia positiva abbiamo che $\int_{\mathcal{M}} K\sigma > 0$, di conseguenza $\chi(\mathcal{M}) > 0$. Poiché la superficie è regolare possiamo trovare una parametrizzazione $S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\partial_1 S$ e $\partial_2 S$ siano sempre linearmente indipendenti, dunque resta ben definito $N = \partial_1 S \times \partial_2 S$, questo è un campo di vettori sulla superficie ed inoltre è non nullo a causa dell'indipendenza si

$\partial_1 S$ e $\partial_2 S$, di conseguenza:

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_{i \in \emptyset} I_i^N = 0.$$

Assurdo.

Exercise. 6.5 ( La sella di scimmia)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Sia $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Si mostri che:

(1) $p$ è un punto critico di isolato per $f$.
(2) $p$ è un punto critico degenere.
(3) L'indice di $\nabla f$ in $p$ è uguale a -2.

**Svolgimento:**

(1) Calcoliamo $\partial_1 f$,$\partial_2 f$ ed imponiamoli uguali a 0, in questo modo si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 0 & \Longrightarrow x^2 = y^2 \\ -6xy = 0 & \Longrightarrow x = 0 \vee y = 0 \end{cases},$$

da cui consegue che l'unico punto critico di $f$ è $p$.

(2) Calcoliamo adesso le derivate seconde di $f$, otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} f & \partial_{12} f \\ \partial_{21} f & \partial_{22} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix},$$

calcolando in $p$ la matrice hessiana otteniamo la matrice nulla, il che vuol dire che $p$ è degenere.

(3) Consideriamo $\gamma = (cos(t), sen(t))$, questa è una curva chiusa intorno a $p$, l'indice di $\nabla f$ rispetto a $p$ è dato da:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \theta = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left(2\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\frac{-[sen(t)]^2 - [cos(t)]^2}{1} dt = -2\frac{2\pi}{2\pi} = -2.$$

EXERCISE. 6.6

Sia $x : \mathcal{M}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'immersione di una superficie in $\mathbb{R}^3$, e sia $h_\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ la funzione di altezza, $h_\nu(p) = \prec x(p), \nu \succ$, $p \in \mathcal{M}$, di $x$ relativamente ad un vettore $\nu \in \mathbb{R}^3$. ($h_\nu$ misura l'altezza del punto $x(p)$ relativamente al piano passante per l'origine e perpendicolare a $\nu$.)

(1) Si mostri che un punto $p$ è critico se e solo se $T_p(\mathcal{M}) \perp \nu$.
(2) Si mostri che un punto critico è non degenere per $h_\nu$ se e solo se la curvatura di Gauss $K(p)$ è non nulla.
(3) Per dimostrare questo punto assumiamo la seguente versione del teorema di Sard. Sia $f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^n$ una funzione differenziabile e sia $q \in \mathcal{N}$; diremo che $q$ è un valore regolare per $f$ se per ogni $p \in f^{-1}(q)$ si ha $df_p$ è non singolare[1]. Il teorema di Sard afferma che l'insieme dei valori regolari di $f$ è aperto e denso in $\mathcal{N}$. SI usino il teorema di Sard e il punto precedente per mostrare che esiste un insieme aperto e denso $U \subseteq S^2$ tale che se $\nu \in U$, tutti i punti critici di $h_\nu$sono non degeneri.

**Svolgimento:**

(1) Scegliamo una parametrizzazione $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$ in un intorno di $g(0,0) = p$. Si ha che $p$ è singolare per $h_\nu$ se e solo se $\partial_1(h_\nu \circ g)(0,0) = 0$ e $\partial_2(h_\nu \circ g)(0,0) = 0$, di conseguenza:

$$0 = \partial_1(h_\nu \circ g)(0,0) = \prec \partial_1(x \circ g)_{|(0,0)}, \nu \succ,$$

$$0 = \partial_2(h_\nu \circ g)(0,0) = \prec \partial_2(x \circ g)_{|(0,0)}, \nu \succ,$$

poiché ogni vettore di $T_p\mathcal{M}$ è combinazione lineare di $\partial_1(x \circ g)_{|(0,0)}$ e $\partial_2(x \circ g)_{|(0,0)}$, abbiamo che $p$ è singolare se e solo se $T_p\mathcal{M} \perp \nu$.

[1] Si noti che se $q \notin f(\mathcal{M})$ allora è sicuramente un valore regolare di $f$.

(2) Consideriamo $\partial_{ij}(h_\nu \circ g)$, questo è dato da:

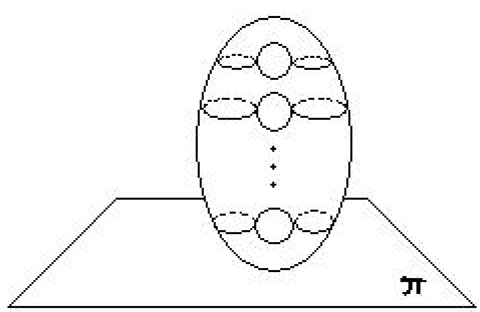
$$\partial_{ij}(h \circ g) = \prec \partial_{ij}(x \circ g), \nu \succ,$$

ma questa non è altro che l'elemento $ij$ della matrice della seconda forma fondamentale della superficie in $p$, dunque l'hessiano di $h$ è nullo se e solo se è nullo il deteminate della seconda forma fondamentale rispetto alla parametrizzazione $g$, ovvero se è nulla la curvatura.

(3) Consideriamo l'applicazione di Gauss $e_3 : U \to S^2$, la matrice del differenziale di questa è la matrice della seconda forma fondamentale, quindi i punti dove essa è degenere sono gli stessi in cui $h_\nu$ ammette dei punti critici degeneri. Per il teorema di Sard abbiamo che l'insieme dove il differenziale è non singolare è denso e aperto, da cui segue la tesi.

Exercise. 6.7

L' $n$ toro, ovvero il toro con $n$ buchi, è una superficie $\mathcal{M}$ compatta ed orientabile diffeomorfa alla superficie in figura. Si consideri la funzione di altezza definita nell'esercizio precedente e si scelga $\nu$ tale che tutti i punti critici di $h_\nu$ non degeneri. Si usi il teorema di Morse per mostrare che la caratteristica di Eulero del $n$ toro è $2-2n$.




**Svolgimento:**

La funzione $h_\nu$, per quanto visto nell'esercizio precedente, è degenere in $p$ se e solo se $K(p) = 0$, di conseguenza per evitare che $h_\nu$ abbia punti degeneri è sufficiente che il vettore $\nu$ giaccia nel piano tangente alla superficie in quei punti, se l'n toro è fatto come in figura, allora il piano perpendicolare a $\nu$, per far si che $h_\nu$ non sia degenere, deve esser parallelo a $\pi$. Notiamo che i punti in cui $h_\nu$ è degenerare sono quelli dove $T_p\mathcal{M}$ è parallelo a $\pi$, e di quesi ve ne sono esattamente due per ogni foro più uno in "cima" ed un nel "fondo" del toro. Ovvero piazzato un riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ tale che $e_1$, $e_2$ giacciano in $\pi$ e che $e_3$ sia parallelo a $\nu$ e diretto come in figura, supponendo che $\pi$sia tangente al n toro, allora si ha che la funzione di altezza ha un minimo nel punto di tangenza, un massimo nel punto del toro più lontano, quello con terza coordinata maggiore, e di conseguenza dei punti di sella in tutti gli altri punti critici. Dunque si hanno $2n$ punti di sella, un massimo ed un minimo di conseguenza:

$$\chi(\mathcal{M}) = 1 + 1 - 2n = 2 - 2n,$$

per il teorema di Morse.

Exercise. 6.8

Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$, sia $q \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{M}$ e sia $f_q : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ la funzione che dato $p \in \mathcal{M}$, ad esso associa $f_q(p)$ che è la distanza di $p$ da $q$ in $\mathbb{R}^3$. Si mostri che:

(1) $f_q$ è differenziabile.
(2) $p \in \mathcal{M}$ è un punto critico per $f_q$ se e solo se il segmento $\overline{pq}$ è perpendicolare a $\mathcal{M}$.
(3) Il punto critico $p$ è degenere se e solo se $f_q(p) = 1/k_i$ , con $i \in \{1, 2\}$, e $k_1$, $k_2$ le curvature principali di $\mathcal{M}$ in $p$ relative alla normale $\overrightarrow{pq}$.

**Svolgimento:**

(1) $f_q(p) = \prec p-q, p-q \succ = \prec p, p \succ -2 \prec p, q \succ + \prec q, q \succ$, e questa è indubbiamente un'applicazione differenziabile.

(2) Scelta una parametrizzazione $p(u,v)$ in un intorno di $p_0 = p(0,0)$, calcoliamo $\partial_1 f_q(p(u,v))_{|(0,0)}$ e $\partial_2 f_q(p(u,v))_{|(0,0)}$.

$$\partial_1 f_q(p(u,v))_{|(0,0)} = 2 \prec \partial_1 p, p-q \succ_{|(0,0)},$$

$$\partial_2 f_q(p(u,v))_{|(0,0)} = 2 \prec \partial_2 p, p-q \succ_{|(0,0)},$$

questi sono entrambi nulli se e solo se $p-q$ è ortogonale a $\partial_1$ e $\partial_2$, ovvero è ortogonale a $\mathcal{M}$, e questo è vero se e solo se $\overline{pq}$ è ortogonale a $\mathcal{M}$.

(3) Sia $N = \lambda(p-q)$ e $\lambda^{-1} = ||p-q||$ calcoliamo le derivate seconde di $f_q$.

$$\partial_{11} f_q = 2(\prec \partial_{11} p, p-q \succ + \prec \partial_1 p, \partial_1 p \succ) =$$

$$= 2(\lambda \prec \partial_{11} p, N \succ + \prec \partial_1 p, \partial_1 p \succ) = 2(\lambda e + E),$$

$$\partial_{12} f_q = 2(\prec \partial_{12} p, p-q \succ + \prec \partial_1 p, \partial_2 p \succ) =$$

$$= 2(\lambda \prec \partial_{12} p, N \succ + \prec \partial_1 p, \partial_2 p \succ) = 2(\lambda f + F),$$

$$\partial_{22} f_q = 2(\prec \partial_{22} p, p-q \succ + \prec \partial_2 p, \partial_2 p \succ) =$$

$$= 2(\lambda \prec \partial_{22} p, N \succ + \prec \partial_2 p, \partial_2 p \succ = 2(\lambda g + G),$$

dove $E, F$ e $G$ indicano i coefficienti della prima forma fondamentale e $e, f$ e $g$ quelli della seconda. Si ha dunque che il punto $p_0$ è degenere se vale in $(0,0)$:

$$4[(\lambda e + E)(\lambda g + G) - (\lambda f + F)^2) = 0,$$

ovvero:

$$\lambda^2(eg - f^2) + \lambda(eG + gE - 2fF) + (EG - F^2) = 0,$$

le soluzioni di questa sono tali che:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(EG - F^2)}{(eg - f^2)} = \frac{1}{k_1}\frac{1}{k_2},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(eG + gE - 2fF)}{(eg - f^2)} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

dunque si ha che $p_0$ è degenere se e solo se $f_q(p) = ||p - q|| = 1/k_i$, $i \in \{1, 2\}$.

# Indice analitico

# Bibliografia


[DoCDF] Manfredo P. Do Carmo, Differential forms and Applications , Springer-Verlag, Berlin-New York, 1994.

[DoCDG] Manfredo P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.

[LoiT] Andrea Loi, Appunti di Topologia Generale, -,-,2009.

[WarFDM] Frank W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (Second Edition), Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1986.