UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Il teorema di immersione isometrica di Nash

Relatore:
Prof. Andrea Loi

Candidato:
Angelo Atzeri

Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è quello di dimostrare l'esistenza di un embedding isometrico di una varietà riemanniana compatta M, di dimensione n, in uno spazio euclideo di dimensione sufficientemente grande (la cui dimensione dipenderà dalla dimensione della varietà): dal momento che stiamo considerando varietà compatte sarà sufficiente dimostrare l'esistenza di una immersione isometrica che sia iniettiva. Una volta verificata l'esistenza di un tale embedding isometrico, un altro problema (che non verrà qui trattato) è quello di stabilire la minima dimensione dello spazio euclideo per cui un tale embedding esiste: chiaramente tale dimensione minima dipenderà dalla regolarità richiesta per l'embedding.

Il problema dell'embedding isometrico ebbe origine dallo sviluppo storico della geometria differenziale: i primi lavori in questo campo si occupavano infatti dello studio di curve e superfici nello spazio e di sottovarietà di spazi euclidei.

Inizialmente i matematici si occuparono di risolvere il problema dell'embedding isometrico a livello locale, cioè si tentò di capire se per ogni $p \in M$ esistesse un aperto $U \subset M$ contenente p che potesse essere embedded in modo isometrico in un dato spazio euclideo (anche in questo caso la dimensione minima dello spazio euclideo dipenderà dalla regolarità richiesta per l'embedding). La prima pubblicazione relativa alla risoluzione del problema locale è opera di Schläfli [23] il quale congetturò che fosse possibile trovare un embedding localmente isometrico in uno spazio euclideo di dimensione $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (la dimensione sembrò plausibile dal momento che il numero di componenti indipendenti del tensore metrico in ogni punto è proprio uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$).

Il problema locale (almeno per metriche reali-analitiche) fu risolto nel caso bidimensionale nel 1926 da Janet [15], mentre Cartan [5] risolse il problema locale per varietà di dimensione qualunque nel 1927.

Il problema di trovare un embedding isometrico globale è la naturale estensione del problema locale, ma non fu formulato precisamente finché Weyl diede la definizione di varietà differenziabile nel 1912 [25], definizione che diventò poi di uso comune grazie ai lavori di Whitney negli anni $'30$.

Il risultato globale fu dimostrato da John Nash [19] nel 1954 usando metodi completamente innovativi: dimostrò che ogni varietà compatta con una metrica di classe C^k, $k \geq 3$, può essere embedded isometricamente in $\mathbb{R}^N$ con $N = \frac{n(3n+11)}{2}$. La dimensione dello spazio euclideo è stata poi ridotta nel corso degli anni, in particolare grazie ai lavori di Gromov [7], che per $k{>}2$ trovò un embedding isometrico per $N = n^2 + 10n + 3$ e per $k \geq 4$ trovò un embedding isometrico per $N = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$.

La parte analitica più complicata della dimostrazione di Nash fu poi rivisita e modellata in un teorema (metodo) più generale detto il teorema della funzione implicita di Nash-Moser. Solo nel 1987 Matthias Günther [10]-[12] scoprì che era possibile eludere le difficoltà incontrate da Nash nella dimostrazione, in maniera tale che non fosse più richiesto l'utilizzo del metodo di Nash-Moser: usando questa osservazione Günther trovò embedding isometrici nello spazio euclideo di dimensione $N = max\{\frac{n(n+3)}{2} + 5, \frac{n(n+5)}{2}\}$.

Gromov usò particolari metodi per trovare embedding nel caso bidimensionale e dimostrò che ogni varietà compatta può essere embedded isometricamente in $\mathbb{R}^5$: questo risultato non può essere migliorato in quanto la metrica standard sul piano proiettivo reale non può essere embedded isometricamente in $\mathbb{R}^4$. Plausibilmente è possibile ridurre la dimensione dello spazio euclideo a 4 per superfici orientate, ma non non sono possibili ulteriori riduzioni dal momento che le superfici compatte con curvatura non positiva non possono essere embedded isometricamente in $\mathbb{R}^3$.

La tesi è suddivisa in 3 capitoli. Il primo capitolo presenta dei richiami sulle varietà differenziabili e sui fibrati e contiene una dimostrazione del teorema di Whitney. Nel secondo capitolo, dopo aver presentato i concetti di trasversalità e di spazio dei jet, viene dimostrata, sotto particolari condizioni, la densità dell'insieme degli embedding nello spazio delle funzioni C^∞. Nell'ultimo capitolo, dopo aver espresso rigorosamente il problema dell'embedding isometrico, si danno le definizioni di mappe free e full e si dimostra che queste mappe sono dense nell'insieme delle funzioni $C^r(M, \mathbb{R}^N)$, con M varietà compatta,sotto particolari particolari condizioni. Infine, dopo aver enunciato il teorema della funzione implicita di Nash e il teorema di Nash-Kuiper, si dimostra il teorema dell'embedding isometrico di Nash nel caso di varietà compatte.

Capitolo 1

Richiami geometria differenziale

1.1 Varietà differenziabili

1.1.1 Definizioni

Definizione 1.1.1. *Uno spazio topologico X è uno spazio di Hausdorff se per ogni x e y appartenenti a X, con $x \neq y$, esistono due aperti U e V di X tali che $x \in X$, $y \in Y$ e $X \cap Y = \emptyset$.*

Definizione 1.1.2. *Uno spazio topologico X soddisfa il secondo assioma di numerabilità se esiste una base numerabile o finita per la topologia di X.*

Definizione 1.1.3. *Uno spazio topologico X è localmente euclideo di dimensione n se per ogni punto $x \in X$ esiste un insieme aperto U di X contenente x omeomorfo ad un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$.*
Indichiamo con $\varphi : U \to V$, con V aperto di $\mathbb{R}^n$, l'omeomorfismo della definizione. La coppia (U, φ) è detta carta locale.

Definizione 1.1.4 (Varietà topologica)**.** *Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico M che soddisfa le seguenti tre condizioni:*

a) M è localmente euclideo di dimensione n;

b) M è di Hausdorff;

c) M soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Definizione 1.1.5. *Siano* $U \subset \mathbb{R}^n$ *e* $V \subset \mathbb{R}^n$ *due insiemi aperti. Diremo che una mappa* $F : U \to V$ *è un diffeomorfismo di classe* C^r *se:*

(i) F *è un omeomorfismo;*

(ii) sia F *che* F^{-1} *sono di classe* C^r*, con* $r \geq 1$.

Nel caso in cui $r = \infty$ *utilizzeremo semplicemente il termine diffeomorfismo.*

Definizione 1.1.6. *Sia* M *una varietà topologica. Diremo che le carte locali* (U, φ) *e* (V, ψ)*, con* $U \cap V \neq \emptyset$ *sono* C^∞ *compatibili se le funzioni* $(\varphi \circ \psi^{-1})$ *e* $(\psi \circ \varphi^{-1})$ *sono diffeomorfismi tra sottoinsiemi aperti* $\varphi(U \cap V)$ *e* $\psi(U \cap V)$ *di* $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.7. *Una struttura differenziabile o* C^∞ *(liscia) su una varietà topologica* M *è una famiglia* $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *di carte locali tali che:*

a) gli U_α *sono un ricoprimento di* M*;*

b) per ogni α *e* β *le carte locali* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *e* (U_β, φ_β) *sono* C^∞ *compatibili;*

c) qualunque carta locale (V, ψ) *compatibile con ogni* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *di* $\mathcal{U}$ *è ancora un elemento di* $\mathcal{U}$.

Definizione 1.1.8 (Varietà differenziabile)**.** *Una varietà differenziabile o varietà* C^∞ *è una coppia* $(M, \mathcal{U})$ *dove* M *è una varietà topologica ed* $\mathcal{U}$ *è una struttura differenziabile su* M.

Osservazione 1.1.1. *Un insieme aperto* U *di una varietà liscia* M *è ancora una varietà liscia la cui struttura differenziabile consiste delle carte locali* (V', ψ') *ottenute da ogni carta locale* (V, ψ) *di* M *che interseca* U *come* $V' = V \cap U$ *e* $\psi' = \psi|_{V'}$*. Chiaramente risulta che* $dim(M) = dim(U)$.

Definizione 1.1.9. *Siano* M *ed* N *due varietà differenziabili, sia* $W \subset M$ *un aperto di* M *e sia* $F : W \to N$ *una funzione. Diremo che* F *è una mappa* C^r *di* W *in* N *se per ogni* $p \in M$ *esiste una carta locale* (U, φ) *di* P *e una carta locale* (V, ψ) *di* $F(p)$*, con* $F(U) \subset V$ *tale che* $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ *sia una funzione* C^r *tra sottoinsiemi di spazi euclidei.*

Indicheremo con $C^r(M,N)$ *l'insieme di tutte le mappe di classe* C^r *da* M *a* N, *con* $r \in \{0,1,...,\infty\}$.

Definizione 1.1.10 (Topologia debole su $C^k(M,N)$)**.** *La topologia debole o dei compatto-aperti sull'insieme* $C^r(M,N)$ *è generata dall'insieme così definito: sia* $f \in C^r(M,N)$ *e siamo* (U,φ) *e* (V,ψ) *carte locali su* M *ed* N *rispettivamente; sia* $K \subset U$ *un compatto tale che* $f(K) \subset V$ *e sia* ϵ>0. *Definiamo una sottobase*

$$\mathcal{N}^r(f;(U,\varphi),(V,\psi),K,\epsilon)$$

per la topologia debole, come l'insieme delle mappe $g: M \to N$ *di classe* C^r *tali che* $g(K) \subset U$ *e*

$$\|D^k(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)\| < \epsilon$$

per ogni $x \in \varphi(K)$ *e* $k = 0,1,...,r$.
La topologia debole su $C^r(M,N)$ *è generata da insiemi di questo tipo e definisce lo spazio topologico* $C^r_W(M,N)$.

Definizione 1.1.11. *Sia* M *uno spazio topologico e sia* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* M. *Diremo che la famiglia* $\mathcal{U}$ *è localmente finita se ogni punto* $p \in M$ *ha un intorno che interseca* U_i *solo per un numero finito di* i.

Definizione 1.1.12 (Topologia forte su $C^k(M,N)$, o topologia di Whitney)**.** *Consideriamo un insieme localmente finito di carte* $\Phi = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ *su* M. *Sia* $K = \{K_i\}_{i\in\Lambda}$ *una famiglia di insiemi compatti di* M *tali che* $K_i \subset U_i$. *Sia* $\Psi = \{(V_i,\psi_i)\}_{i\in\Lambda}$ *una famiglia di carte su* N *e sia* $\epsilon = \{\epsilon_i\}_{i\in\Lambda}$ *una famiglia di numeri positivi. Se* $f \in C^r(M,N)$ *porta ciascun* K_i *in* V_i, *definiamo una base*

$$\mathcal{N}^r(f;\Phi,\Psi,K,\epsilon)$$

per la topologia forte, come l'insieme delle mappe $g: M \to N$ *di classe* C^r *tali che per ogni* $i \in \Lambda$ *si ha che* $g(K_i) \subset V_i$ *e*

$$\|D^k(\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i \circ g \circ \varphi_i^{-1})(x)\| < \epsilon_i$$

per ogni $x \in \varphi_i(K_i)$ *e* $k = 0, 1, ..., r$.
La topologia forte su $C^r(M, N)$ *è generata da insiemi di questo tipo e definisce lo spazio topologico* $C^r_S(M, N)$.

Osservazione 1.1.2. *Le topologie forte e debole su* $C^r(M, N)$ *coincidono nel caso in cui* M *sia una varietà differenziabile compatta.*

Definizione 1.1.13. *Siano* M *ed* N *due varietà differenziabili. Diremo che una mappa* $F : M \to N$ *di classe* C^∞ *è un diffeomorfismo se* F *è un omeomorfismo ed* F^{-1} *è* C^∞. *Le varietà differenziabili* M *ed* N *sono dette diffeomorfe se esiste un tale diffeomorfismo.*

1.1.2 Spazio tangente a una varietà in un suo punto

Sia M una varietà liscia di dimensione n. Dato un punto $p \in M$ possiamo definire $C^\infty(p)$ come l'insieme delle classi di equivalenza i cui elementi sono funzioni lisce il cui dominio di definizione è un intorno aperto di p e che coincidono in un intorno di p. Gli oggetti così ottenuti sono detti germi delle funzioni C^∞.
Scelta una carta locale (U, φ) di p è facile verificare che $\varphi^* : C^\infty(\varphi(p)) \to C^\infty(p)$ definita come $\varphi^*(f) = (f \circ \varphi)$ è un isomorfismo dell'algebra dei germi delle funzioni C^∞ in $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ sull'algebra $C^\infty(p)$.

Definizione 1.1.14. *Definiamo lo spazio tangente* T_pM *a* M *in* p *come l'insieme di tutte le mappe* $X_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ *che soddisfano per ogni* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $f, g \in C^\infty(p)$ *le seguenti condizioni*

(i) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$;

(ii) $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$.

Lo spazio tangente T_pM *dotato delle operazioni*

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f;$$

$$(\alpha X_p)f = \alpha(X_p f).$$

è uno spazio vettoriale reale.
Un vettore tangente ad M in p è un qualsiasi $X_p \in T_pM$.

Teorema 1. *Sia $F : M \to N$ una mappa liscia tra varietà differenziabili. Allora per ogni $p \in M$ la mappa $F^* : C^\infty(F(p)) \to C^\infty(p)$ definita come $F^*(f) = (f \circ F)$ è un omomorfismo di algebre. Tale omomorfismo induce un omomorfismo $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ tra gli spazi vettoriali duali definito come $dF_p(X_p)f = X_p(F^*f)$. L'omomorfismo dF_p è detto differenziale di F.*
Se $F : M \to M$ è l'identità, sia F^* che dF_p sono isomorfismi identità. Se $H = G \circ F$ è composizione di mappe C^∞ allora $H^* = F^* \circ G^*$ e $dH_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.

Corollario 1.1.1. *Se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo di M su un insieme aperto $U \subset N$ e $p \in M$, allora $df_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ è un isomorfismo.*

Osservazione 1.1.3. *Sfruttando il fatto che un insieme aperto U di M^n è una varietà di dimensione n, si può dimostrare che, se (U, φ) è una carta su M allora φ induce un isomorfismo $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ dello spazio tangente in ogni $p \in M$ su $T_a\mathbb{R}^n$, con $a = \varphi(p)$. La mappa φ^{-1}, d'altro canto, mappa $T_a\mathbb{R}^n$ isomorficamente su T_pM. Dunque le immagini $E_{ip} = d\varphi_p^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$ con $i = 1, ..., n$, della base naturale $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ in ogni $a \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ determinano in $p = \varphi^{-1}(a) \in M$ una base $E_{1p}, ..., E_{np}$ di T_pM, detta base coordinata di T_pM.*
La dimensione dello spazio vettoriale T_pM è dunque uguale alla dimensione della varietà M, cioè $dim(T_pM) = dim(M)$.

1.1.3 Rango di una mappa, immersioni e sommersioni

Sia $F : M^n \to N^m$ una mappa liscia di varietà C^∞ e sia $p \in M$. Se (U, φ) e (V, ψ) sono carte locali per p ed $F(p)$ rispettivamente e $F(U) \subset V$, allora F ha la seguente espressione in coordinate locali

$$\widetilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

Definizione 1.1.15. *Il rango di F in p è definito come il rango di $\widetilde{F}$ in $\varphi(p)$. Quindi il rango di F in p è il rango in $a = \varphi(p)$ della matrice Jacobiana*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(a) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(a) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(a) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(a) \end{pmatrix}$$

della mappa $\widetilde{F}(x^1, ..., x^n) = (f^1(x^1, ..., x^n), ..., f^m(x^1, ..., x^n))$.
La definizione appena data è indipendente dalla scelta del sistema di coordinate.

Osservazione 1.1.4. *Di fondamentale importanza è il caso in cui il rango di una applicazione differenziabile tra varietà lisce sia costante. Il "Teorema del rango" può essere riformulato in questo modo: sia* $F : M^n \to N^m$ *definita come in precedenza e sia* $rg(F) = k$ *in ogni punto* $p \in M$. *Se* $p \in M$ *allora esistono carte locali* (U, φ) *e* (V, ψ) *per* p *e* $F(p)$ *tali che* $\varphi(p) = (0, ..., 0)$, $\psi(F(p)) = (0, ..., 0)$ *e* $\widetilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ *è dato da*

$$\widetilde{F}(x^1, ..., x^n) = (x^1, ..., x^k, 0, ..., 0)$$

Da ciò deriva immediatamente che, condizione necessaria affinché $F : M \to N$ *sia un diffeomorfismo è che* $dim(M) = dim(N) = rg(F)$.

Osservazione 1.1.5. *Sia* $F : M^n \to N^m$ *una mappa liscia e siano* (U, φ) *e* (V, ψ) *carte locali su* M *ed* N *per* p *e* $F(p)$ *rispettivamente, tali che* $F(U) \subset V$. *La matrice associata associata all'applicazione lineare* $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *rispetto alle basi coordinate di* T_pM *e* $T_{F(p)}N$ *definite nell'osservazione 1.1.3 è la matrice Jacobiana del cambio di coordinata in* p *rispetto ai sistemi di coordinate scelti.*

Teorema 2. *Sia* $F : M^n \to N^m$ *una funzione liscia tra varietà differenziabili. Il rango di* F *in* p *è la dimensione dell'immagine di* $df_p(T_pM)$. *L'omomorfismo* df_p *è iniettivo se e solo se il* $rg(F) = n$, *mentre* df_p *è suriettivo se e solo se* $rg(F) = m$.

Definizione 1.1.16. *Sia* $F : M^n \to N^m$ *una mappa* C^∞ *tra varietà lisce, con* $n \leq m$. *Diremo che* F *è un'immersione di* M *in* N *se* $rg(F) = n$ *in ogni punto di* M[1]. *Se un'immersione è iniettiva, diremo che l'immagine* $\overline{M} = F(M)$, *dotata della topologia*

[1] In modo equivalente, F è un'immersione se l'omomorfismo dF_p è iniettivo per ogni $p \in M$.

e della struttura C^∞ che rende $F : M \to \overline{M}$ un diffeomorfismo, è una sottovarietà (o sottovarietà immersa).

Osservazione 1.1.6. *L'immersione canonica è la mappa di inclusione standard da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^l$ con $l \geq k$, che associa a $(a_1, ..., a_k)$ il vettore $(a_1, ..., a_k, 0, ..., 0)$.*

Definizione 1.1.17. *Un embedding è una immersione iniettiva $F : M^n \to N^m$ che è un omeomorfismo di M in N,cioè F è un omeomorfismo di M sulla sua immagine $\overline{M} = F(M)$ dotata della sua topologia come sottospazio di N. L'immagine di un embedding è detta sottovarietà embedded.*
L'insieme degli embedding da M in N di classe C^k è indicato come $Emb_k(M, N)$.

Definizione 1.1.18. *Sia $F : M^n \to N^m$ una mappa liscia di varietà C^∞ con $n \geq m$. Diremo che F è una sommersione di M in N se $rg(F) = m$ in ogni punto di M*[2].

Osservazione 1.1.7. *La sommersione canonica è la mappa di proiezione standard da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^l$ con $k \geq l$, che associa a $(a_1, ..., a_k)$ il vettore $(a_1, ..., a_l)$.*

Definizione 1.1.19. *Siano M ed N due varietà lisce aventi la stessa dimensione e sia f una mappa C^∞ tra esse. Se, considerato $p \in M$, esiste un aperto U di p che viene mandato diffeomorficamente da f in un aperto V di $y = f(p)$, diremo che f è un diffeomorfismo locale in p.*

Osservazione 1.1.8. *Condizione necessaria affinchè f sia un diffeomorfismo locale in p è che $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ sia un isomorfismo.*

Teorema 3 (Teorema della funzione inversa)**.** *Sia $f : M \to N$ una funzione liscia il cui differenziale df_p in un punto p sia un isomorfismo. Allora f è un diffeomorfismo locale in p.*

Osservazione 1.1.9. *Abbiamo visto nell'osservazione 1.1.5 che l'applicazione lineare df_p è rappresentata da una matrice rispetto alle basi coordinate di T_pM e $T_{f(p)}N$. Questa trasformazione lineare è non singolare quando il determinante della sua matrice è non nullo.*

[2] In modo equivalente, F è una sommersione se l'omomorfismo dF_p è suriettivo per ogni $p \in M$.

Quindi il teorema della funzione inversa ci dice che capire se una funzione è un diffeomorfismo locale in un punto p del dominio si riduce a capire quando il determinante dell'applicazione df_p è non nullo.

1.1.4 Sottovarietà

Il termine sottovarietà è usato in più di un senso in letteratura: tutti comunque ci riterremo concordi nel dire che una sottovarietà M di una varietà differenziabile N è un sottoinsieme di N che è ancora una varietà differenziabile.

Definizione 1.1.20. *Sia N una varietà differenziabile di dimensione m e sia $0 \leq n \leq m$. Si dice che un sottoinsieme M della varietà liscia N ha la "proprietà dell'n-sottovarietà" se ogni $p \in M$ ha una carta locale (U, φ) su N con coordinate locali $x^1, ..., x^m$ tali che*

(i)) $\varphi(p) = (0, ..., 0)$;

(ii) $\varphi(U) = C_\epsilon^m(0)$;

(iii) $\varphi(U \cap M) = \{x \in C_\epsilon^m(0) | x^{n+1} = ... = x^m = 0\}$.

Se M ha questa proprietà, carte locali di questo tipo verranno dette carte locali adattate relative a M.
Si noti che non tutte le sottovarietà immerse godono di questa proprietà.

Sia $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $n \leq m$ la proiezione sulle prime n coordinate.

Lemma 1. *Sia $M \subset N$ un sottoinsieme con la "proprietà dell'n-sottovarietà". Allora M con la topologia indotta è una varietà topologica di dimensione n e ciascuna delle carte locali adattate (U, φ) di N definisce carte locali $(V, \overline{\varphi})$ su M come $V = U \cap M$ e $\overline{\varphi} = (\pi \circ \varphi)|_V$. Queste carte locali su M sono C^∞ compatibili ogni qualvolta si intersechino e determinano una struttura C^∞ su M rispetto alla quale l'inclusione $i : M \to N$ è un embedding.*

Definizione 1.1.21. *Una sottovarietà regolare di una varietà liscia N è un qualsiasi sottospazio M che gode della "proprietà dell'n-sottovarietà" e con struttura differenziabile corrispondente a quella che le carte locali adattate determinano su esso.*

Teorema 4. *Se $F : M \to N$ è una immersione iniettiva ed M è compatta allora F è un embedding.*

Dimostrazione. F è una mappa continua dallo spazio compatto M allo spazio di Hausdorff $\overline{M} = F(M)$. Sia $K \subset M$ un sottoinsieme chiuso di M: allora K è compatto dal momento che un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto. Inoltre si ha che $F(K)$ è compatto poiché immagine di un compatto tramite un'applicazione continua. L'insieme $F(K)$ è un sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff e dunque un chiuso poiché sottoinsiemi compatti di spazi di Hausdorff sono chiusi.
Risulta quindi che F porta sottoinsiemi chiusi di M in sottoinsiemi chiusi di $\overline{M}$ ed essendo iniettiva porta anche sottoinsiemi aperti di M in sottoinsiemi aperti di $\overline{M}$. Allora anche la funzione F^{-1} è continua e dunque $F : M \to \overline{M}$ è un omeomorfismo e quindi un embedding. □

Teorema 5. *Siano M^n ed N^m due varietà lisce e sia $F : M \to N$ una mappa C^∞. Supponiamo che F abbia rango costante k su M e che sia $q \in F(M)$. Allora $F^{-1}(q)$ è una sottovarietà regolare chiusa di M di dimensione $n - k$.*

Dimostrazione. Sia $A = F^{-1}(q)$: A è chiuso dal momento che è la controimmagine di q, sottoinsieme chiuso di N, e la controimmagine di un chiuso attraverso una mappa continua è un sottoinsieme chiuso di M.
Dobbiamo ora dimostrare che A gode della proprietà della sottovarietà per la dimensione $n - k$. Sia $p \in A$: dal momento che F ha rango costante k su un intorno di p, deriva dal teorema del rango che possiamo trovare carte locali (U, φ) e (V, ψ) di p e q rispettivamente tali che $\varphi(p)$ e $\psi(q)$ siano le origini in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, $\varphi(U) = C^n_\epsilon(0)$, $\psi(V) = C^m_\epsilon(0)$, e in coordinate locali $(x^1, ..., x^n)$, $(y^1, ..., y^m)$ $F|_U$ sia dato dalla mappa

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = \widetilde{F}(x^1, ..., x^n) = (x^1, ..., x^k, 0, ..., 0)$$

Ciò vuol dire che gli unici punti di U che vanno a finire tramite F su q sono quelli che hanno le prime k coordinate uguali a 0, cioè

$$(A \cap U) = \varphi^{-1}(\varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}(0)) =$$
$$= \varphi^{-1}(\widetilde{F}^{-1}(0)) = \varphi^{-1}\{x \in C^n_\epsilon(0) | x^1 = ... = x^k = 0\}$$

da cui

$$\varphi(A \cap U) = \{x \in C^n_\epsilon(0) | x^1 = ... = x^k = 0\}$$

Quindi A è una sottovarietà regolare di dimensione $n-k$ dal momento che gode della proprietà della sottovarietà. □

Corollario 1.1.2. *Se $F : M^n \to N^m$ è una mappa liscia tra varietà, con $m \leq n$ e se $rg(F) = m$ in ogni punto di $A = F^{-1}(a)$, allora A è una sottovarietà regolare e chiusa di M di dimensione $n-m$.*

Definizione 1.1.22. *Sia $f : M \to N$ una mappa liscia tra due varietà differenziabili. Un punto $a \in N$ è detto valore regolare per f se $df_p : T_pM \to T_aN$ è suriettiva per ogni punto $p \in M$ tale che $f(p) = a$.*
Un punto $y \in N$ che non è un valore regolare per f è detto valore critico.
Un qualsiasi punto che non appartiene all'immagine di f viene automaticamente classificato come un valore regolare.

Osservazione 1.1.10. *Se dim(M)>dim(N), la regolarità di $y \in N$ significa che f è una sommersione in ogni punto $p \in f^{-1}(y)$.*
Se $dim(M) = dim(N)$, la regolarità di $y \in N$ significa che f è un diffeomorfismo locale per ogni punto $p \in f^{-1}(y)$.
Se dim(M)<dim(N), allora ogni punto in $f(M)$ è un valore critico per f e i valori regolari sono quelli che non stanno nell'immagine di f.

1.1.5 Varietà determinate da zeri di funzioni indipendenti

Gli argomenti di questo paragrafo sono contenuti in [9].
Supponiamo che $g_1, ..., g_l$ siano funzione lisce a valori reali su una varietà differenziabile M^n con $n \geq l$. Vogliamo capire sotto quali condizioni l'insieme Z degli zeri comuni a queste l funzioni è un oggetto geometrico significativo.
Possiamo rispondere a questo quesito considerando la mappa

$$g = (g_1, ..., g_l) : M \to \mathbb{R}^l$$

Dal momento che $Z = g^{-1}(0)$, Z è una sottovarietà di M se 0 è un valore regolare per g. Possiamo riformulare la condizione di regolarità per 0 in termini delle funzioni g_i; dal momento che ogni g_i è una mappa liscia di M in $\mathbb{R}$, il differenziale in un punto P è una mappa lineare $d(g_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}$, cioè $d(g_i)_p$ è un funzionale lineare sullo spazio vettoriale T_pM.
E' facilmente verificabile che $dg_p : T_pM \to \mathbb{R}^l$ è suriettiva se e solo se gli l funzionali $d(g_1)_p$, ..., $d(g_l)_p$ sono linearmente indipendenti in P. In questo caso diremo che le l funzioni $g_1, ..., g_l$ sono linearmente indipendenti in p. Per il corollario 1.1.2 risulta dunque dimostrata la seguente proposizione:

Proposizione 1.1.1. *Se le funzioni $g_1, ..., g_l$ lisce a valori reali su M^n sono linearmente indipendenti in ogni punto in cui esse si annullano contemporaneamente, allora l'insieme Z dei loro zeri comuni è una sottovarietà di M di dimensione $n - l$.*

Definizione 1.1.23. *Sia Z una sottovarietà di una varietà differenziabile M. Possiamo definire la codimensione di Z in M come*

$$cod(Z) = dim(M) - dim(Z)$$

Abbiamo visto che l funzioni indipendenti su M determino (cut out) una sottovarietà di codimensione l.
Il viceversa dell'affermazione precedente non è in generale vero, ma valgono i due seguenti teoremi inversi parziali.

Teorema 6. *Sia y un valore regolare di una mappa liscia $f : M \to N$; allora la sottovarietà $f^{-1}(y)$ può essere determinata da funzioni indipendenti.*

Dimostrazione. Sia h un diffeomorfismo tra un intorno W di y e un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^l$, con $h(y) = 0$. Posto $g = h \circ f$, risulta chiaramente che 0 è un valore regolare per g e dunque le funzioni coordinate $g_1, ..., g_l$ di g sono le funzioni cercate. $\square$

Teorema 7. *Ogni sottovarietà di M è localmente determinata da funzioni indipendenti.*

Proposizione 1.1.2. *Sia $y \in N$ un valore regolare per una mappa liscia $f : M \to N$ e sia Z la controimmagine di tale valore. Allora il nucleo di $df_p : T_pM \to T_yN$ in ogni punto $p \in f^{-1}(y)$ coincide con lo spazio tangente a Z, cioè con T_pZ*

Dimostrazione. Dal momento che f è costante in Z, risulta che df_p è zero su T_pZ. Ma l'applicazione lineare $df_p : T_pM \to T_yN$ è suriettiva, quindi deriva dal "teorema della dimensione" che la dimensione del nucleo è data da

$$dim(T_pM) - dim(T_yN) = dim(M) - dim(N) = dim(Z)$$

Risulta quindi che T_pZ è un sottoinsieme del nucleo che ha la stessa dimensione del nucleo stesso; dunque $ker(f) = T_pZ$. □

1.1.6 Il teorema di Whitney

Definizione 1.1.24. *Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è detto di misura nulla se per ogni $\epsilon>0$ esiste un insieme numerabile di aperti $U_i \subset \mathbb{R}^n$ tali che $A \subset \bigcup_i U_i$ e $\sum_i volume(U_i)<\epsilon$.[24]*

Definizione 1.1.25. *Un sottoinsieme A di una varietà differenziabile M di dimensione n ha misura nulla se per ogni carta (U, φ) di M, l'insieme $\varphi(A \cap U)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^n$.[16]*

Osservazione 1.1.11. *Si può dimostrare affinché $A \subset M$ abbia misura nulla è sufficiente dimostrare la condizione precedente per una singola famiglia di carte di M il cui dominio copra A.*

Teorema 8. *Siano M^n ed N^m varietà lisce con $n<m$ e sia $F : M \to N$ una funzione liscia. Allora l'insieme $F(M)$ ha misura nulla in N.*

Teorema 9 (Teorema di Whitney)**.** *Una varietà compatta M di dimensione n ha un embedding C^∞ in $\mathbb{R}^N$, con $N>2n+1$, e un'immersione C^∞ in $\mathbb{R}^N$, con $N>2n$.[1]*

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è quella di dimostrare inizialmente che esiste un embedding (risp. immersione) di M in uno spazio euclideo qualunque, senza tener conto della dimensione. Successivamente si dimostra che la proiezione della sottovarietà risultante in uno spazio euclideo di una dimensione più bassa è ancora un embedding

(risp. immersione) se la dimensione non è troppo piccola.
Dal momento che M è compatta possiamo considerare un ricoprimento finito di M tramite carte locali (U_i, φ_i), con $i = 1, 2, ..., r$ e $\varphi_i = (x_i^1, ..., x_i^n) : U_i \to B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, tale che gli insiemi $W_i = \varphi_i^{-1}(B_{\frac{1}{3}}(0))$ siano ancora un ricoprimento di M.
Consideriamo una funzione liscia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che assume valore 1 in $\overline{B_{\frac{1}{3}}(0)}$, assume valore 0 fuori da $B_{\frac{2}{3}}(0)$ e assume valori compresi tra 0 e 1 in $B_{\frac{2}{3}}(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{3}}(0)}$. Per ogni i possiamo definire tramite f una funzione liscia su M in questo modo:

$$\widetilde{(f \circ \varphi_i)}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin U_i \\ (f \circ \varphi_i)(x) & x \in U_i \end{cases}$$

D'ora in poi indicheremo $\widetilde{f \circ \varphi_i}$ semplicemente come $f \circ \varphi_i$.
Possiamo ora definire la funzione $F : M \to \mathbb{R}^{r(n+1)}$ come:

$$F = (f \circ \varphi_1, ..., f \circ \varphi_r, \varphi_1(f \circ \varphi_1), \varphi_2(f \circ \varphi_2), ..., \varphi_r(f \circ \varphi_r))$$

Voglio dimostrare che la funzione F così definita è una immersione iniettiva: essendo M compatta, per il teorema 4, risulterà che F è un embedding. Dimostriamo innanzitutto l'iniettività: supponiamo che $F(x) = F(y)$. Dal momento che i W_i costituiscono un ricoprimento di M, si avrà che $x \in W_i$ per almeno un indice i; si ha che $1 = (f \circ \varphi_i)(x) = (f \circ \varphi_i)(y)$, e dunque, per definizione di f, risulta che $y \in W_i$. Risulta inoltre che $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, e sfruttando il fatto che φ_i è un omeomorfismo su W_i risulta che $x = y$. Dunque la funzione F è iniettiva.
Inoltre, in W_i, la funzione F ha alcune delle sue componenti $\varphi_i(f \circ \varphi_i) = \varphi_i$ e queste ultime hanno derivata nella carta φ_i uguale all'identità di ordine n. Il rango della matrice Jacobiana associata ad F è dunque uguale a n e la funzione F è dunque un immersione.
Abbiamo a questo punto trovato un embedding $F : M \to \mathbb{R}^N$ della nostra varietà compatta M in uno spazio euclideo sufficientemente grande.
Resta da dimostrare che se $N > 2n + 1$ ed M^n è una sottovarietà compatta di $\mathbb{R}^N$, allora esiste $v \in S^{N-1}$ tale che la proiezione ortogonale π_v sul sottospazio di dimensione $N - 1$ ortogonale a v data da

$$\pi_v(x) = x - <x, v> v$$

sia tale che $(\pi_v \circ F)$ sia un embedding su M. In modo simile dovremo dimostrare che, se $N{>}2n$, esiste $v \in S^{N-1}$ tale che $(\pi_v \circ F)$ sia un'immersione su M. Per dimostrare ciò consideriamo innanzitutto la funzione h da $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus \Delta$ [3] in S^{N-1} definita da

$$h(x,y) = \frac{x-y}{|x-y|}$$

Vogliamo verificare sotto quali condizioni la funzione $(\pi_v \circ F)$ sia iniettiva: si ha che

$$(\pi_v \circ F)(x) = (\pi_v \circ F)(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$F(x) - <F(x), v>v = F(y) - <F(y), v>v$$
$$\Updownarrow$$
$$F(x) - F(y) - <F(x) - F(y), v>v = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\pi_v(F(x) - F(y)) = 0 \Leftrightarrow (F(x) - F(y)) \parallel v$$

Se $v \notin h((F(M) \times F(M)) \setminus \Delta)$ si ha che $v \neq \frac{F(x)-F(y)}{|F(x)-F(y)|}$ e ciò è equivalente a $F(x) - F(y) \neq |F(x) - F(y)|v$: in questo caso dunque $(F(x) - F(y)) \nparallel v$. Quindi se $v \notin h((F(M) \times F(M)) \setminus \Delta)$ allora $(\pi_v \circ F)$ è iniettiva.
Sia k la funzione da $SM = \{(F(p), w) | F(p) \in F(M), w \in T_{F(p)}(M), |w| = 1\}$, il fibrato tangente unitario, a S^{N-1} definita da

$$k(F(p), w) = w$$

Vogliamo verificare sotto quali condizioni $(\pi_v \circ F)$ sia una immersione, cioè sotto quali condizioni $d(\pi_v \circ F)_p$ sia iniettiva. Preso $u \in T_pM$ risulta che $d(\pi_v \circ F)_p(u) = \pi_v(dF_p(u))$: quindi $d(\pi_v \circ F)_p$ è iniettivo se e solo se $\pi_v(dF_p(u)) \neq 0$ per ogni $u \neq 0$, cioè se $dF_p(u) \nparallel v$.
Risulta quindi che se $v \notin k(SM)$ allora $(\pi_v \circ F)$ è una immersione.
Ricordiamo che $(F(M) \times F(M)) \setminus \Delta$ è una varietà differenziale di dimensione $2n$, SM è una varietà di dimensione $2n - 1$ e S^{N-1} è una varietà di dimensione $N - 1$.
Risulta dal teorema 8 che, se $N - 1{>}2n - 1$, cioè se $N{>}2n$, allora esiste $v \in S^{N-1}$ che non si trova nell'immagine di k e dunque $(\pi_v \circ F)$ è l'immersione cercata.

[3] L'insieme Δ è la diagonale, cioè $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}^N\}$

Se invece $N-1 > max\{2n, 2n-1\}$, cioè $N > 2n+1$, discende sempre dal teorema 8 che esiste $v \in S^{N-1}$ che non si trova nell'immagine sia di h che di k, dunque $(\pi_v \circ F)$ è un'immersione iniettiva su una varietà differenziabile compatta e dunque un embedding per il teorema 4.

$\square$

Osservazione 1.1.12. *Nel 1944 lo stesso Whitney migliorò i risultati sugli embedding e le immersioni sopra dimostrati trovando, per una varietà differenziabile M^n, un embedding [26] in $\mathbb{R}^{2n}$ e una immersione [27] in $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

1.2 Fibrati

Gli argomenti riportati in questo paragrafo sono tratti da [22].

Definizione 1.2.1. *Una varietà fibrata è una terna (E, π, M) dove E ed M sono varietà differenziabili e $\pi : E \to M$ è una sommersione suriettiva.*
La varietà E è detta spazio totale, M è detta spazio base e π è detta proiezione.
Per ogni punto $p \in M$, il sottoinsieme $\pi^{-1}(p)$ di E è detto fibra di p ed indicato con E_p.

Osservazione 1.2.1. *Denoteremo spesso una varietà fibrata (E, π, M), quando non vi è rischio di confusione, con lo stesso simbolo usato per la sua proiezione.*
Dal momento che la proiezione π di una varietà fibrata (E, π, M) è una sommersione, risulta dal corollario 1.1.2 che la fibra E_p è una sottovarietà di E, la cui dimensione, detta dimensione della fibra di π, è data da $dim(E_p) = dim(E) - dim(M)$.

Ad esempio, se M ed N sono varietà lisce, allora $(M \times N, \pi^1, M)$, con π^1 proiezione sulla prima coordinata, è una varietà fibrata detta varietà fibrata banale.

Definizione 1.2.2. *Sia (E, π, M) una varietà fibrata con $dim(M) = m$ e $dim(E) = m+n$ e sia $y : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ una carta locale su un insieme aperto $U \subset E$. Il sistema di coordinate y è detto sistema di coordinate adattate se, ogni qualvolta $a, b \in U$ e $\pi(a) = \pi(b) = p$, si abbia che $\pi^1(y(a)) = \pi^1(y(b))$, dove $\pi^1 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ è la proiezione sulle prime m coordinate.*

Osservazione 1.2.2. *Il significato di questa definizione è che tutti i punti che sono nella stessa fibra* $E_p \cap U$ *hanno le prime* m *coordinate uguali, e sono distinguibili solamente per le ultime* n *coordinate.*

Definizione 1.2.3. *Sia* (E, π, M) *una varietà fibrata. Una banalizzazione globale di* π *è una coppia* (F, t) *dove* F *è una varietà, detta fibra tipo di* π*, e* $t : E \to M \times F$ *è un diffeomorfismo che soddisfa alla condizione* $(\pi^1 \circ t) = \pi$*.*
Una varietà fibrata che ha almeno una banalizzazione è detta banale.

Definizione 1.2.4. *Sia* (E, π, M) *una varietà fibrata e* $p \in M$*. Una banalizzazione locale di* π *attorno a* p *è una terna* (W_p, F_p, t_p) *con* W_p *un intorno di* p*,* F_p *una varietà e* $t_p : \pi^{-1}(W_p) \to W_p \times F_p$ *un diffeomorfismo che soddisfa alla condizione* $(\pi^1 \circ t_p) = \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}$*.*
Una varietà fibrata che ha almeno una banalizzazione locale attorno ad ogni punto dello spazio base è detta localmente banale ed è indicata col termine fibrato.

Definizione 1.2.5. *Una mappa* $\phi : M \to E$ *è detta sezione di* π *se soddisfa la condizione* $(\pi \circ \phi) = id_M$*. L'insieme di tutte le sezioni di* π *è indicato con* $\Gamma(\pi)$*.*

Osservazione 1.2.3. *Per il fibrato banale nella forma* $(M \times F, \pi^1, M)$ *una sezione è proprio il grafico di una funzione* $f : M \to F$ *definito da* $graph_f(p) = (p, f(p))$*.*

Definizione 1.2.6. *Sia* (E, π, M) *una varietà fibrata. Una sezione locale di* π *è una mappa* $\phi : W \to E$ *dove* W *è una sottovarietà aperta di* M *che soddisfa la condizione* $(\pi \circ \phi) = id_W$*. L'insieme di tutte le sezioni locali di* π *con dominio* W *viene indicato con* $\Gamma_W(\pi)$ *e l'insieme di tutte le sezioni locali senza tener conto del dominio sarà indicato con* $\Gamma_{loc}(\pi)$*. Se* $p \in M$*, l'insieme di tutte le sezioni locali di* π *il cui dominio contiene* p *è indicato con* $\Gamma_p(\pi)$*.*

Definizione 1.2.7. *Sia* $\phi \in \Gamma_p(\pi)$ *allora il germe di* ϕ *in* p *è il sottoinsieme di* $\Gamma_p(\pi)$ *che contiene quelle sezioni locali* ψ *che hanno la proprietà che, per qualche intorno* W *di* p*, si abbia* $\psi|_W = \phi|_W$ *(chiaramente l'intorno* W *dipenderà da* p*). Il germe di* ϕ *in* p *è indicato con* $[\phi]_p$*.*
Si ha chiaramente che la relazione "ha lo stesso germe in p*" è una relazione di equivalenza.*

Definizione 1.2.8. *Se (E, π, M) e (H, ρ, N) sono fibrati, allora un morfismo di fibrati da π a ρ è una coppia $(f, \widetilde{f})$, con $f : E \to H$ e $\widetilde{f} : M \to N$, tale che $(\rho \circ f) = (\widetilde{f} \circ \pi)$. La mappa $\widetilde{f}$ è detta la proiezione di f.*

Definizione 1.2.9. *Un fibrato vettoriale è una quintupla (E, π, M, σ, μ) dove*

1) *(E, π, M) è un fibrato;*

2) (a) *$\sigma : E \times E \to E$ soddisfa per ogni $p \in M$ la condizione $\sigma(E_p \times E_p) \subset E_p$;*

   (b) *$\mu : \mathbb{R} \times E \to E$ soddisfa per ogni $p \in M$ la condizione $\mu(\mathbb{R} \times E_p) \subset E_p$;*

   (c) *per ogni $p \in M$, la terna $(E_p, \sigma|_{(E_p \times E_p)}, \mu|_{(\mathbb{R} \times E_p)})$ è uno spazio vettoriale reale;*

3) *per ogni $p \in M$ esiste una banalizzazione locale $(W_p, \mathbb{R}^n, t_p)$, detta banalizzazione locale lineare, tale che per ogni $q \in W_p$ la composizione tra $t_p|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$ e $\pi^2 : \{q\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia un isomorfismo lineare.*

Definizione 1.2.10. *Un morfismo di fibrati vettoriali da π a ρ è un morfismo di fibrati $(f, \widetilde{f})$ che ha la proprietà che, per ogni $p \in M$, $f|_{E_p} : E_p \to H_{\widetilde{f}(p)}$ è una applicazione lineare.*

1.3 Varietà riemanniane e tensore di curvatura

1.3.1 Campi di vettori

Un campo di vettori X su una varietà differenziabile M^n è una funzione che assegna ad ogni punto $p \in M$ un elemento $X_p \in T_pM$: il dominio della funzione è chiaramente la varietà M mentre il codominio è l'insieme TM di tutti i vettori tangenti in ogni punto di M, cioé $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.
Ad un campo di vettori X può essere richiesto di soddisfare una qualche condizione di regolarità, cioè di essere continuo o differenziabile. Per $p \in M$ siano (U, φ) carte locali per p e sia $\{E_{1p}, ..., E_{np}\}$ la corrispondente base di T_pM. Allora X_p, l'immagine di p tramite X, potrà essere scritto come $X_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i E_{ip}$. Se p varia su U, le componenti $\alpha^1, ..., \alpha^n$ sono funzioni ben definite del punto p date dalle funzioni delle coordinate locali

$\alpha^i = \alpha^i(x^1, ..., x^n)$ su $\varphi(U)$, con $i = 1, ..., n$. Diremo che il campo di vettori X è di classe C^k con $k \geq 0$, se queste funzioni sono di classe C^k su U per ogni carta (U, φ) di M. Solitamente col termine campo di vettori intenderemo un campo di vettori di classe C^∞ e denoteremo l'insieme di tutti i campi di vettori C^∞ su M con $\mathfrak{X}(M)$.

Osservazione 1.3.1. *Si può dimostrare che l'insieme TM può essere dotato di una struttura differenziabile che la rende una varietà liscia. Dunque possiamo considerare un campo di vettori come un'applicazione tra le varietà differenziabili M e TM per le quali è nota la definizione di funzione di classe C^k.*

Esempio 1. *Data una carta locale (U, φ) su una varietà M^n, sappiamo che U è ancora una varietà di dimensione n. I campi di vettori $E_i = d\varphi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$ con $i = 1, ..., n$, hanno componenti $\alpha^j = \delta^j_i$. Queste componenti sono costanti e dunque di classe C^∞ su U. L'insieme $E_1, ..., E_n$ è una base di T_pM per ogni $p \in U$.*

Definizione 1.3.1. *Sia M una varietà liscia. E' possibile definire una mappa $[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ come*

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

Tale applicazione è detta commutatore di campi di vettori.

1.3.2 Campi di covettori e mappe

Sia M una varietà e sia $p \in M$. Denoteremo con T^*_pM lo spazio duale di T_pM: quindi $\sigma_p \in T^*_pM$ è una applicazione lineare da T_pM in $\mathbb{R}$.
Data una base $E_{1p}, ..., E_{np}$ di T_pM esiste un unica base duale $\omega^1_p, ..., \omega^n_p$ che soddisfa la condizione $\omega^i_p(E_{jp}) = \delta^i_j$. Le componenti di σ_p relative a questa base sono uguale ai valori di σ_p sui vettori di base $E_{1p}, ..., E_{np}$ e dunque

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{n} \sigma_p(E_{ip})\omega^i_p$$

Definizione 1.3.2. *Un campo di covettori è una funzione σ che assegna ad ogni punto $p \in M$ un elemento $\sigma_p \in T^*_pM$. Diremo che tale campo di covettori è di classe C^k se per ogni carta (U, φ) di base coordinata $E_1, ..., E_n$ le funzioni $\sigma(E_i)$, con $i = 1, ..., n$ sono di*

classe C^k su U.
Solitamente quando ci riferiremo a un campo di covettori intenderemo un campo di covettori di classe C^∞.

Abbiamo visto che una mappa liscia $F : M \to N$ tra due varietà differenziabili induce la mappa lineare $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ la quale determina a sua volta una applicazione lineare $F^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$ data dalla formula

$$F^*(\sigma_{F(p)})(X_p) = \sigma_{F(p)}(dF_p(X_p))$$

Osservazione 1.3.2. *In generale dF_p non mappa campi di vettori su M in campi di vettori su N, mentre ogni covettore su N di classe C^r determina unicamente un campo di covettori della stessa classe su M attraverso l'equazione precedente.*

1.3.3 Metriche e varietà riemanniane

Definizione 1.3.3. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una mappa $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare se è lineare in entrambi gli argomenti, cioè se, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed ogni $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ si ha*

$$\Phi(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha\Phi(v_1, w) + \beta\Phi(v_2, w)$$
$$\Phi(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha\Phi(v, w_1) + \beta\Phi(v, w_2)$$

Definizione 1.3.4. *Una forma bilineare $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ è detta simmetrica se, per ogni $v, w \in V$, $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$.*

Definizione 1.3.5. *Una forma bilineare $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ è detta definita positiva se, per ogni $v \in V$, $\Phi(v, v) \geq 0$ e $\Phi(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0$.*

Definizione 1.3.6. *Una forma bilineare $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica e definita positiva è detta prodotto scalare su V.*

Definizione 1.3.7. *Un campo Φ di forme bilineari di classe C^k su una varietà M è una funzione che assegna a ciascun punto p di M una forma bilineare Φ_p su T_pM, cioè una mappa $\Phi_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, tale che per ogni carta locale (U, φ) le funzioni $\alpha_{ij} = \Phi(E_i, E_j)$ definite da Φ e dai vettori coordinati $E_1, ..., E_n$ sono di classe C^k.*

Osservazione 1.3.3. *Le funzioni* $\alpha_{ij} = \Phi(E_i, E_j)$ *su* U *sono dette componenti di* Φ *nella carta locale* (U, φ)*. Inoltre* Φ *oltre ad essere* $\mathbb{R}$*-bilineare è anche* $C^\infty(U)$*-bilineare, cioè per ogni* $f \in C^\infty(U)$ *si ha*

$$\Phi(fX, Y) = f\Phi(X, Y) = \Phi(X, fY)$$

Definizione 1.3.8. *Sia* $F : M \to N$ *una funzione liscia tra varietà e sia* Φ *una forma bilineare su* N*. Possiamo definire una forma bilineare* $F^*\Phi$ *su* M *definendo* $(F^*\Phi)_p$ *in ogni* $p \in M$ *come*

$$(F^*\Phi)(X_p, Y_p) = \Phi(dF_p(X_p), dF_P(Y_p))$$

Teorema 10. *Se* $F : M \to N$ *è una immersione e se* Φ *è un prodotto scalare su* N *allora* $F^*\Phi$ *è un prodotto scalare su* M*.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $F^*\Phi$ è bilineare, simmetrica e definita positiva.
La bilinearità di $F^*\Phi$ deriva dalla bilinearità di Φ e dalla linearità di dF_p. Per quanto riguarda la simmetria si ha, presi $X_p, Y_p \in T_pM$, che

$$\begin{aligned}(F^*\Phi)(X_p, Y_p) &= \Phi(dF_p(X_p), dF_p(Y_p)) = \\ &= \Phi(dF_p(Y_p), dF_p(X_p)) = (F^*\Phi)(Y_p, X_p)\end{aligned}$$

Resta da dimostrare che $F^*\Phi$ è definita positiva. Preso $X_p \in T_pM$ risulta che $F^*\Phi(X_p, X_p) = \Phi(dF_p(X_p), dF_p(X_p) \geq 0$ con uguaglianza valida solo se $dF_p(X_p) = 0$. Dal momento che F è una immersione $dF_p(X_p) = 0$ se e solo se $X_p = 0$ e dunque $F^*\Phi$ è definita positiva.

□

Definizione 1.3.9. *Una varietà* M *su cui è definito un campo di forme* Φ *bilineari, simmetriche e definite positive è detta varietà riemanniana e* Φ *è detto metrica riemanniana.*
Denoteremo con $Met(M)$ *l'insieme di tutte le metriche su* M*.*

Definizione 1.3.10. *Due varietà riemanniane* (M_1, g_1) *e* (M_2, g_2) *sono dette isometriche se esiste un diffeomorfismo* $F : M_1 \to M_2$ *tale che* $F^* g_2 = g_1$. *Il diffeomorfismo* F *sarà detto isometria.*

1.3.4 Tensori su varietà

Definizione 1.3.11. *Sia* V *uno spazio vettoriale reale. Un tensore* Φ *su* V *è una mappa multilineare*

$$\Phi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s} \to \mathbb{R}$$

con V^* *spazio duale di* V, r *ordine di covarianza e* s *ordine di controvarianza. Per un fissato* (r, s) *indicheremo con* $\mathscr{T}_s^r(V)$ *l'insieme di tutti i tensori su* V *di ordine covariante* r *e di ordine controvariante* s.

Osservazione 1.3.4. *Lo spazio* $\mathscr{T}_s^r(V)$ *dotato delle operazioni*

$$(\Phi_1 + \Phi_2)(v_1, ..., v_r, \sigma_1, ..., \sigma_s) = \Phi_1(v_1, ..., v_r, \sigma_1, ..., \sigma_s) + \Phi_2(v_1, ..., v_r, \sigma_1, ..., \sigma_s)$$
$$(\alpha\Phi)(v_1, ..., v_r, \sigma_1, ..., \sigma_s) = \alpha(\Phi(v_1, ..., v_r, \sigma_1, ..., \sigma_s))$$

è uno spazio vettoriale reale di dimensione n^{r+s}, *dove* $n = dim(V)$.

Definizione 1.3.12. *Un campo di tensori* C^∞ *covariante di ordine* r *su una varietà liscia* M *è una funzione* Φ *che assegna ad ogni punto* $p \in M$ *un elemento* $\Phi_p \in \mathscr{T}(T_pM)$ *avente la proprietà che dati* $X_1, ..., X_r$ *campi di vettori* C^∞ *su un insieme aperto* U *di* M *allora* $\Phi(X_1, ..., X_r)$ *è una funzione* C^∞ *su* U.

Osservazione 1.3.5. *Un campo di tensori* C^∞ *covariante di ordine* r *non è solo* $\mathbb{R}$-*lineare ma anche* $C^\infty(M)$-*lineare in ogni argomento, cioè per ogni* $f \in C^\infty(M)$ *si ha*

$$\Phi(X_1, ..., fX_i, ..., X_r) = f\Phi(X_1, ..., X_i, ..., X_r)$$

Definizione 1.3.13. *Sia* $F : M \to N$ *una applicazione liscia tra varietà differenziabili e sia* dF_p *il differenziale di* F *in* p. *La mappa* F *induce una mappa* $F^* : \mathscr{T}^r(N) \to \mathscr{T}^r(M)$, *definita per* Φ r *tensore su* N *come*

$$F^*\Phi_p(X_{1p},...,X_{rp}) = \Phi_{F(p)}(dF_p(X_{1p}),...,dF_p(X_{rp})).$$

Definizione 1.3.14. *Diremo che $\Phi \in \mathscr{T}^r(M)$ è simmetrico se per ogni $1 \leq i,j \leq r$ abbiamo*

$$\Phi(X_1,...,X_i,...,X_j,...,X_r) = \Phi(X_1,...,X_j,...,X_i,...,X_r)$$

1.3.5 Connessioni e tensore di curvatura

Definizione 1.3.15. *Una connessione C^∞ ∇ su una varietà M è una applicazione $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ denotata con $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ tale che per ogni $f,g \in C^\infty(M)$ e $X,X',Y,Y' \in \mathfrak{X}(M)$ si abbia*

$$\nabla_{fX+gX'}Y = f\nabla_X Y + g\nabla_{X'}Y$$

$$\nabla_X(fY+gY') = f\nabla_X Y + g\nabla_X Y' + (Xf)Y + (Xg)Y'$$

Definizione 1.3.16. *Sia M una varietà differenziabile dotata di una connessione lineare ∇ e consideriamo una carta (U,φ). Le funzioni Γ^k_{ij} che compaiono nell'equazione*

$$\nabla_{E_i}E_j = \sum_k \Gamma^k_{ij}E_k$$

sono dette coefficienti di Christoffel della connessione lineare ∇.

Definizione 1.3.17. *Una connessione C^∞ ∇ sulla varietà riemanniana (M,g) è detta connessione riemanniana se soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

(ii) $Xg(Y,Y') = g(\nabla_X Y, Y') + (Y, \nabla_X Y')$

Osservazione 1.3.6. *Nel caso di una connessione riemanniana si può verificare facilmente tramite la proprietà (i) che i coefficienti di Christoffel sono simmetrici, cioè $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.*

Teorema 11 (Teorema fondamentale della geometria riemanniana)**.** *Sia (M,g) una varietà riemanniana allora esiste un'unica connessione riemanniana su M.*

Definizione 1.3.18. *Dati* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *possiamo definire il campo di vettori* $R(X, Y) \cdot Z$ *come*

$$R(X,Y) \cdot Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Osservazione 1.3.7. *L'equazione precedente definisce una applicazione multilineare* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, *cioè* $R(X, Y) \cdot Z$ *è* $\mathbb{R}$*-lineare in ogni argomento. Risulta inoltre che questa mappa è* $C^\infty(M)$*-lineare sebbene non lo sia nessuno degli operatori utilizzati nella sua definizione.*
Possiamo anche pensare a $R(X, Y)$ *come ad un operatore che ad ogni campo di vettori* Z *assegna il campo di vettori* C^∞ $R(X, Y) \cdot Z$.

Corollario 1.3.1. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana. La formula* $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y) \cdot Z, W)$ *definisce un tensore* C^∞ *covariante di ordine* 4. *Questo tensore dipende solo dalla metrica riemanniana su* M*: se* M_1 *e* M_2 *sono varietà riemanniane e* $F : M_1 \to M_2$ *è una isometria, allora* $F^* R_2 = R_1$.

Definizione 1.3.19. *L'operatore* $R(X, Y)$ *è detto operatore di curvatura mentre il tensore* $R(X, Y, Z, W)$ *è detto tensore di curvatura di Riemann.*

Osservazione 1.3.8. *Siano* $E_1, ..., E_n$ *i vettori coordinati su un insieme aperto* U *di* M^n. *Allora il tensore di curvatura di Riemann è univocamente determinato su* U *dall'insieme delle* n^4 *funzioni* R^j_{ikl} *e* R_{ijkl} *date da*

$$R(E_k, E_l)E_i = \sum_j R^j_{ikl} E_j$$
$$R(E_k, E_l, E_i, E_j) = R_{ijkl} = \sum_s g_{js} R^s_{ikl}$$

con $g_{js} = g(E_j, E_s)$.

Capitolo 2

Trasversalità e teoria dei Jets

2.1 Trasversalità

Sia $f : M \to N$ una mappa liscia tra varietà differenziabili. Presa in considerazione $Z \subset N$ una sottovarietà, vogliamo capire se l'insieme dei $p \in M$ tali che $f(p) \in Z$, cioè $f^{-1}(Z)$ è un oggetto geometrico significativo.
Ricordiamo che l'essere una sottovarietà è una caratteristica locale: cioè $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà se e solo se per ogni $p \in f^{-1}(Z)$ esiste un intorno U in M contentente p tale che $f^{-1}(Z) \cap U$ è una varietà. Questa osservazione ci consente di ridurre lo studio della relazione $f(p) \in Z$ al caso più semplice in cui Z è un singolo punto.
Preso $y = f(p)$, per il teorema 7 possiamo scrivere Z in un intorno di y come l'insieme degli zeri comuni di un insieme di funzioni indipendenti $g_1, ..., g_l$, dove l è la codimensione della sottovarietà Z in N. Allora intorno a p, la controimmagine $f^{-1}(Z)$ è l'insieme degli zeri comuni delle funzioni $(g_1 \circ f), ..., (g_l \circ f)$. Indichiamo con g la sommersione $(g_1, ..., g_l)$ definita in un intorno di y. Allora, considerata la mappa $g \circ f : W \to \mathbb{R}^l$, risulta che $(g \circ f)^{-1}(0)$ è una varietà quando 0 è un valore regolare di $g \circ f$.
Sebbene la mappa g sia piuttosto arbitraria, la condizione che 0 sia un valore regolare per $g \circ f$ può essere facilmente riformulata in termini dei soli f e Z. Dal momento che

$$d(g \circ f)_p = dg_y \circ df_p$$

la mappa lineare $d(g \circ f)_p : T_pM \to \mathbb{R}^l$ è suriettiva se e solo se dg_y porta l'immagine di df_p su tutto $\mathbb{R}^l$. Ma $dg_y : T_yN \to \mathbb{R}^l$ è una trasformazione lineare suriettiva il cui nucleo è il sottospazio T_yZ: quindi dg_y porta un sottospazio di T_yN su $\mathbb{R}^l$ (in modo suriettivo) se e solo se quel sottospazio e T_yZ generano tutto T_yN. Concludiamo che $(g \circ f)$ è una sommersione nel punto $p \in f^{-1}(Z)$ se e solo se

$$df_p(T_pM) + T_yZ = T_yN$$

Definizione 2.1.1. *Sia $f : M \to N$ una mappa liscia tra varietà differenziabili e sia $Z \subset N$ una sottovarietà di N. Diremo che f è trasversale alla sottovarietà Z, in simboli $f \pitchfork Z$, se*

$$df_p(T_pM) + T_yZ = T_yN$$

per ogni $p \in f^{-1}(Z)$.
Se la precedente definizione è verificata solo per punti in $K \subset M$ diremo che f è trasversale a Z lungo K e scriveremo $f \pitchfork_K Z$.

Dai ragionamenti precedenti risulta quindi dimostrato il seguente teorema:

Teorema 12. *Se una mappa liscia $f : M \to N$ è trasversale a una sottovarietà $Z \subset N$, allora l'insieme $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà di M. Inoltre la codimensione di $f^{-1}(Z)$ in M è uguale alla codimensione di Z in N.*

Osservazione 2.1.1. *Per quanto riguarda l'affermazione appena fatta sulla codimensione di $f^{-1}(Z)$, si ha che siamo stati in grado di scrivere localmente $f^{-1}(Z)$ come l'insieme degli zeri comuni alle l funzioni linearmente indipendenti $(g_1 \circ f), ..., (g_l \circ f)$. Quindi la codimensione di $f^{-1}(Z)$ in M è l, che era anche la codimensione di Z in N.*

Osservazione 2.1.2. *Quando Z è una sottovarietà formata da un singolo punto y, lo spazio tangente a Z è il sottospazio zero di T_yN, per cui la condizione di trasversalità tra f e Z si traduce nella condizione $df_p(T_pM) = T_yN$ per ogni $p \in f^{-1}(y)$, che è equivalente a dire che y è un valore regolare per f.*
Dunque la nozione di trasversalità include la definizione di regolarità come suo caso particolare.

Esempio 2. *Indichiamo con Z la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ costituita dall'asse delle x. Come semplice esempio di trasversalità possiamo considerare quello tra la mappa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(t) = (0, t)$ e la sottovarietà Z (Figura 2.1); al contrario la mappa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(t) = (t, t^2)$ non è in nessun caso trasversale alla sottovarietà Z (Figura 2.2).*

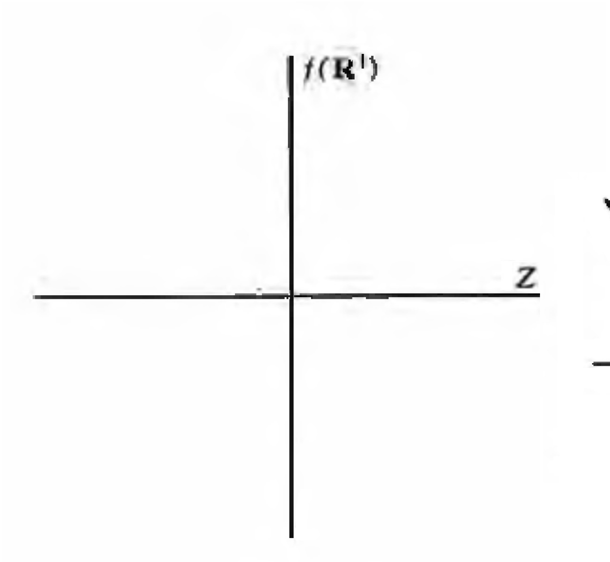


Figura 2.1

Figura 2.2

Vogliamo ora analizzare un caso particolare di funzione liscia trasversale a una varietà: si tratta del caso della funzione inclusione i di una sottovarietà $X \subset N$ con un'altra sottovarietà $Z \subset N$. Dire che un punto $x \in X$ appartiene alla controimmagine $i^{-1}(Z)$ è equivalente a dire che $x \in X \cap Z$. Si noti che il differenziale $di_x : T_xX \to T_xN$ è semplicemente l'inclusione di T_xX in T_xN. Ne deriva che $i \pitchfork Z$ se e solo se

$$T_xX + T_xZ = T_xN$$

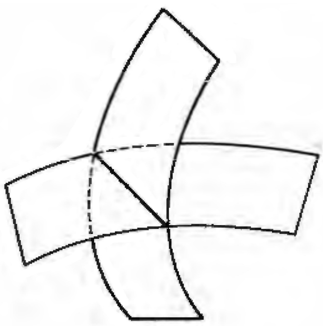
per ogni $x \in X \cap Z$.

Curve trasversali in $\mathbb{R}^2$

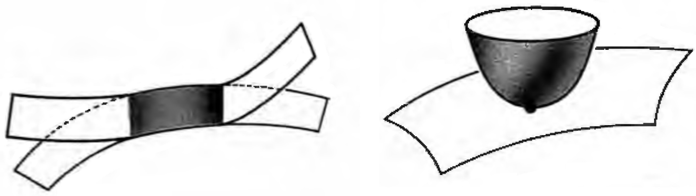
Curve non trasversali in $\mathbb{R}^2$

Curve e superficie trasversali in $\mathbb{R}^3$

Curve e superficie non trasversali in $\mathbb{R}^3$



Superfici trasversali in $\mathbb{R}^3$



Superfici non trasversali in $\mathbb{R}^3$

Il teorema 12 viene riformulato come:

Teorema 13. *L'intersezione di due sottovarietà trasversali è ancora una sottovarietà. Inoltre* $cod(X \cap Z) = cod(X) + cod(Z)$.

Osservazione 2.1.3. *L'additività della codimensione è un banale calcolo. Poniamo* $dim(N) = S$, $dim(X) = L$, $dim(Z) = K$ *e* $dim(X \cap Z) = H$; *dal teorema precedente risulta che:*

$$\begin{gathered}
cod_X(X \cap Z) = cod_N(Z) \\
L - H = cod_N(Z) \\
L - S + S - H = cod_N(Z) \\
S - H = (S - L) + cod_N(Z) \\
cod_N(X \cap Z) = cod_N(X) + cod_N(Z)
\end{gathered}$$

Osservazione 2.1.4. *La trasversalità tra due sottovarietà* X *e* Z *della sottovarietà* N *dipende anche dallo spazio ambiente; ad esempio, i due assi coordinati si intersecano trasversalmente in* $\mathbb{R}^2$, *ma non quando li consideriamo come sottovarietà di* $\mathbb{R}^3$.
In generale, se la somma delle dimensioni di X *e* Z *non è almeno la dimensione di* N, *l'unica possibilità che* X *e* Z *siano trasversali è che non abbiano alcun punto di intersezione: ad esempio, se* X *e* Y *sono due curve in* $\mathbb{R}^3$, *allora* $X \pitchfork Z$ *implica che* $X \cap Z = \emptyset$.

Esistono proprietà di una mappa che non vengono alterate se la mappa viene deformata in modo liscio.
Intuitivamente, una mappa liscia $f_1 : M \to N$ è una deformazione di un'altra mappa $f_0 : M \to N$ se queste due posso essere sovrapposte tramite una famiglia di mappe $f_t : M \to N$ che si evolvono in modo liscio.

Definizione 2.1.2. *Sia* I *l'intervallo* $[0, 1]$ *in* $\mathbb{R}$. *Diremo che* f_0 *e* f_1 *sono omotope, e scriveremo* $f_0 \sim f_1$, *se esiste una mappa liscia* $F : M \times I \to N$ *tale che* $F(x, 0) = f_0(x)$ *e* $F(x, 1) = f_1(x)$. *La funzione* F *è dette omotopia tra* f_0 *e* f_1.

Osservazione 2.1.5. *L'omotopia è una relazione di equivalenza sull'insieme delle mappe lisce dalla varietà differenziabile M alla varietà differenziabile N: la classe di equivalenza a cui appartiene una mappa è detta classe di omotopia.*

Le proprietà di una mappa che rimangono inalterate quando questa viene viene leggermente deformata sono dette proprietà stabili e l'insieme delle mappe che possiedono una data proprietà stabile è detta classe stabile di mappe.

Definizione 2.1.3. *Una proprietà è stabile a patto che ogni qualvolta $f_0 : M \to N$ possiede tale proprietà e $f_t : M \to N$ è una omotopia di f_0, allora, per qualche ϵ, ciascuna f_t, con $t<\epsilon$, possiede la proprietà.*

Osservazione 2.1.6. *Consideriamo, ad esempio, curve del piano, cioè mappe lisce da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$.*
La proprietà che una curva passi attraverso un determinato punto non è stabile (Figura 2.3): infatti, attraverso una piccola variazione è possibile modificare una curva qualsiasi per evitare che passi per quel determinato punto. Neppure la proprietà di una curva di intersecare l'asse x è in generale una proprietà stabile (Figura 2.4).
Invece, l'intersezione trasversale con l'asse x è una proprietà stabile (Figura 2.5).

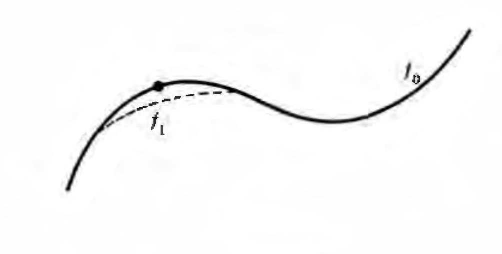


Figura 2.3

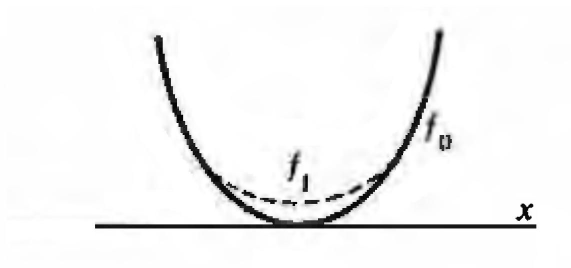


Figura 2.4

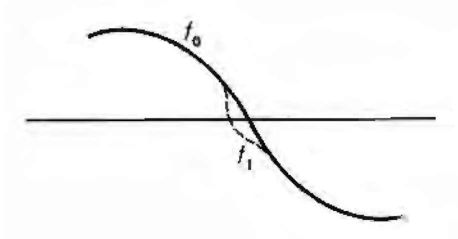


Figura 2.5

Teorema 14. *Le seguenti classi di funzioni lisce da una varietà compatta M a una varietà N sono classi stabili:*

(a) diffeomorfismi locali;

(b) immersioni;

(c) sommersioni;

(d) mappe trasversali a qualsiasi sottovarietà $Z \subset N$;

(e) embedding;

(f) diffeomorfismi.

Dimostrazione. Dimostreremo solo i casi (b), (c) e (d).
Cominciamo dal caso (b). Se f_t è una omotopia dell'immersione f_0, dobbiamo trovare un ϵ>0 tale che $d(f_t)_p$ sia iniettiva per tutti i punti (p, t) in $M \times [0, \epsilon] \subset M \times I$. La compattezza di M implica che ogni intorno aperto di $M \times \{0\}$ in $M \times I$ contenga $M \times [0, \epsilon]$, se ϵ è sufficientemente piccolo. Dunque non ci resta da dimostrare che ogni punto $(p_0, 0)$ ha un intorno U in $M \times I$ tale che $d(f_t)_p$ è iniettiva per $(p, t) \in U$.
L'iniettività di $d(f_0)_{p_0}$ implica che la sua matrice Jacobiana $m \times n$

$$(\frac{\partial(f_0^i)}{\partial x^j}(p_0))$$

contiene una sottomatrice $n \times n$ con determinante non nullo. Ma ciascuna derivata parziale

$$\left(\frac{\partial(f_t^i)}{\partial x^j}(p)\right)$$

è una funzione continua su $M \times I$. Dal momento che anche la funzione determinante è continua, quella stessa sottomatrice $n \times n$ sarà non singolare per tutti i punti (p, t) in un intorno di $(p_0, 0)$. Dunque le immersioni sono stabili.
La dimostrazione del caso (c) è analoga a quella delle immersioni.
Per quanto riguarda il caso (d), cioè quello della stabilità di una mappa trasversale a una sottovarietà $Z \subset N$, basta notare che la condizione di trasversalità può essere localmente tradotta in una condizione di sommersione. Dunque la dimostrazione segue naturalmente dal punto (c).

□

Osservazione 2.1.7. *La nozione di stabilità ci da una migliore comprensione della nozione di trasversalità. Ad esempio, perché due curve in* $\mathbb{R}^3$ *non si intersecano mai trasversalmente ad eccezione di quando non si intersecano del tutto? La risposta formale è che* $1+1<3$*, ma c'è una ragione più geometrica. Tramite una piccola deformazione di entrambe le curve infatti, queste due possono essere rese con intersezione vuota: la loro intersezione non è dunque stabile (Figura 2.6, Figura 2.7).*
Lo stesso principio spiega tutte le esclusioni automatiche dalla definizione di trasversalità relative alle dimenzioni. Se $dim(M) + dim(Z) < dim(N)$*, e* $f : M \to N$ *copre parte di* Z*, allora* f *può essere perturbata in maniera tale che l'immagine di* f *non intersechi* Z*. Quindi non esiste mappa* f *che intersechi stabilmente* Z*.*

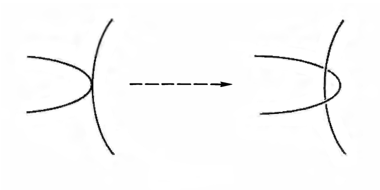


Figura 2.6

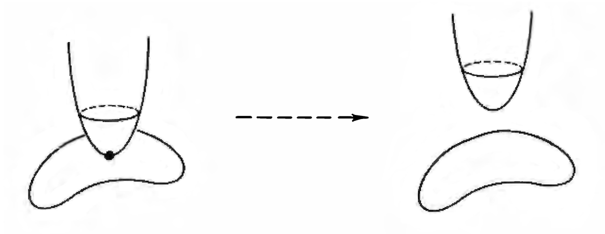


Figura 2.7

Definizione 2.1.4. *Siano M ed N due varietà lisce, $K \subset M$ e Z una sottovarietà di N. Definiamo*

$$\pitchfork_K^r (M,N;Z) = \{f \in C^r(M,N) | f \pitchfork_K Z\}$$
$$\pitchfork^r (M,N;Z) = \{f \in C^r(M,N) | f \pitchfork Z\}$$

Definizione 2.1.5. *Un sottoinsieme A di uno spazio X è detto residuale se A contiene l'intersezione di un insieme numerabile di insiemi aperti e densi.*

Teorema 15. *Siano M ed N due varietà lisce e sia Z una sottovarietà di N. Sia $1 \leq r \leq \infty$, allora*

(a) l'insieme $\pitchfork^r (M,N;Z)$ è residuale (e quindi denso) in $C^r(M,N)$ sia per la topologia forte che per quella debole;

(b) supponiamo inoltre che Z sia chiuso in N. Se $L \subset M$ è chiuso (rispettivamente compatto), allora $\pitchfork_L^r (M,N;Z)$ è denso e aperto in $C_S^r(M,N)$ (rispettivamente in $C_W^r(M,N)$). [13]

Definizione 2.1.6. *Un sottoinsieme M di uno spazio topologico X è detto localmente chiuso in un punto $p \in M$ se esiste un intorno U di p in X tale che $M \cap U$ è un sottoinsieme chiuso del sottospazio U. Il sottoinsieme M è detto localmente chiuso in X se è localmente chiuso per ogni $p \in M$.*

Definizione 2.1.7. *Due sottovarietà $U, V \subset \mathbb{R}^n$, con $V \subset \overline{U} \backslash U$ soddisfano la condizione di Whitney (b) se per ogni coppia di successioni di punti $u_i \in U$ e $v_i \in V$ che convergono a $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$, la direzione limite definita dai segmenti $[u_i, v_i]$ (se esiste), deve appartenere alla posizione limite dei sottospazi tangenti $T_{u_i}U$, a condizione che anche quest'ultima esista.*
Questa condizione è invariante per diffeomorfismi, per cui si applica anche a sottovarietà di una data varietà ambiente X.

Definizione 2.1.8. *Sia X una varietà liscia che diremo spazio ambiente. Un sottoinsieme localmente chiuso $M \subset X$ è detto sottovarietà stratificata di X se può essere*

rappresentato come unione disgiunta localmente finita di sottovarietà lisce di X, dette strati, di differenti dimensioni, in maniera tale che la chiusura di ciascuno strato consista di se stesso e dell'unione di qualche altro strato di dimensione strettamente inferiore e per esso valga la condizione di Whitney (b).
Una qualsiasi rappresentazione $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ di questo tipo è detta stratificazione di M e le sottovarietà M_α sono dette strati.
Un sottoinsieme $M \subset X$ è detto stratificabile se esiste una sua partizione di questo tipo. Se la partizione di M è fissata indicheremo con $\mathcal{M}$ l'insieme di tutti gli strati.

Definizione 2.1.9. *Sia $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ una stratificazione di un sottoinsieme M di una varietà liscia X tramite gli strati M_α e indichiamo con $n_\alpha = dim(M_\alpha)$.*
La dimensione della sottovarietà stratificata M è il massimo tra le dimensioni n_α dei suoi strati. I punti lisci della varietà stratificata M sono quelli che appartengono allo strato di dimensione massima e il complementare di tale insieme, cioè l'unione di tutti gli strati di dimensione inferiore, è detto scheletro della stratificazione.

Definizione 2.1.10. *Sia N una varietà liscia, sia $f : N \to X$ una mappa differenziabile e sia $M \subset X$ una sottovarietà stratificata con stratificazione $\mathcal{M}$. Diremo che la mappa f è trasversale a M se questa è trasversale a ciascuno degli strati di $\mathcal{M}$, in simboli*

$$f \pitchfork (M, \mathcal{M}) \Leftrightarrow \forall M_\alpha \in \mathcal{M} \quad f \pitchfork M_\alpha$$

Teorema 16. *Se una mappa liscia $f : N \to X$ è trasversale a uno strato $M_\alpha \in \mathcal{M}$ in un punto $p \in M_\alpha$, allora è trasversale anche a tutti gli strati che contengono M_α nella loro chiusura, in tutti i punti sufficientemente vicini a p.*

Definizione 2.1.11. *Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare di rango k. Le differenze $(m-k)$ e $(n-k)$ sono dette coranghi di f nel dominio e nel codiminio rispettivamente. Chiaramente i coranghi sono correlati alla dimensione del nucleo i tramite le formule $m - k = i$ e $n - k = n - m + i$.*

Esempio 3. *Consideriamo l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$: denoteremo questo spazio con $L(m, n)$. Chiaramente ogni applicazione lineare in $L(m, n)$*

potrà essere rappresentata da una matrice rispetto alle basi scelte nel dominio e nel codominio della funzione.
La matrice associata a ciascuna applicazione lineare f può essere posta, mediante una scelta favorevole delle basi nella forma

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove E_k è la matrice identità di rango k (con $k = rg(f)$).
L'insieme di tutte le matrici di rango k in $L(m,n)$ è una sottovarietà liscia, la cui codimensione è uguale al prodotto dei coranghi.

La partizione dello spazio di tutte le applicazioni lineari (matrici) $L(m,n)$ in sottovarietà L_k di applicazioni (matrici) di differenti ranghi è detta stratificazione naturale e le varietà L_K sono dette strati.

Definizione 2.1.12. *Sia $f : M^n \to N^m$ una mappa liscia e sia $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ il suo differenziale in p.*
Diremo che il punto p è nella classe Σ^i per f, se la dimensione del nucleo di df_p è uguale a i.Tutti i punti della classe Σ^i per f formano un sottoinsieme di M, detto l'insieme Σ^i per f ed indicato con $\Sigma^i(f)$.

Teorema 17 (Formula del corango)**.** *Per una mappa generica* [1] *tutti gli insiemi $\Sigma^i(f)$ sono sottovarietà lisce del dominio. La codimensione della varietà $\Sigma^i(f)$ è uguale al prodotto dei coranghi, cioè:*

$$dim(M) - dim(\Sigma^i(f)) = (m-k)(n-k)$$

Se il numero è negativo allora l'insieme è vuoto.[2]

[1] L'insieme delle mappe che non soddisfano la tesi di questo teorema è, nel peggiore dei casi, un unione numerabile di insiemi chiusi e mai densi nello spazio delle funzioni lisce; inoltre, se M p compatta, allora l'insieme delle funzioni generiche in questo contesto è aperto e sempre denso

2.2 Teoria dei jets

Le nozioni qui contenute sono presenti in [22].

2.2.1 Fibrato dei Jet di primo ordine

Dato un fibrato (E, π, M) vogliamo definire il jet di una sezione ϕ in un punto p: dal momento che alcuni fibrati non hanno sezioni globali dobbiamo necessariamente utilizzare sezioni locali.
L'approccio che porteremo avanti è quello di trovare una relazione di equivalenza sull'insieme delle sezioni locali definite in un intorno di un dato punto dello spazio base.
La classe di equivalenza verrà definita in termini delle coordinate locali, e perciò dovremo assicurarci che non sia rilevante la scelta del sistema di coordinate.

Lemma 2. *Sia (E, π, M) un fibrato e sia $p \in M$ e siano $\phi, \psi \in \Gamma_p(\pi)$ tali che $\phi(p) = \psi(p)$. Siano (x^i, u^α) e (y^j, v^β) due sistemi di coordinate adattate attorno a $\phi(p)$ e supponiamo che*

$$\frac{\partial(u^\alpha \circ \phi)}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial(u^\alpha \circ \psi)}{\partial x^i}|_p$$

per $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq \alpha \leq n$

Allora

$$\frac{\partial(v^\beta \circ \phi)}{\partial y^j}|_p = \frac{\partial(v^\beta \circ \psi)}{\partial y^j}|_p$$

per $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq \beta \leq n$.

Definizione 2.2.1. *Sia (E, π, M) un fibrato e sia $p \in M$. Diremo che le sezioni locali $\phi, \psi \in \Gamma_p(\pi)$ sono 1-equivalenti in p se $\phi(p) = \psi(p)$ e se in qualche sistema di coordinate adattate (x^i, u^α) attorno a $\phi(p)$ si ha:*

$$(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i})|_p = (\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^i})|_p$$

per $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq \alpha \leq n$. La classe di equivalenza contenente ϕ è detta l'1-jet di ϕ in p e denotato con $j^1_p \phi$.

L'insieme di tutti gli 1-jet di sezioni locali di π ha una struttura naturale di varietà differenziabile.

Definizione 2.2.2. *La varietà degli* 1*-jet di* π *è l'insieme*

$$\{j^1_p\phi | p \in M \wedge \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$$

Denoteremo questo insieme con $J^1\pi$*. Le funzioni* π_1 *e* $\pi_{1,0}$ *sono dette proiezioni sulla base e sullo spazio totale e sono definite da*

$$\begin{aligned} \pi_1 \colon J^1\pi &\to M \\ j^1_p\phi &\mapsto p \\ \pi_{1,0} \colon J^1\pi &\to E \\ j^1_p\phi &\mapsto \phi(p) \end{aligned}$$

Definizione 2.2.3. *Sia* (E, π, M) *un fibrato e sia* (U, u) *un sistema di coordinate adattate su* E*, dove* $u = (x^i, u^\alpha)$*. Il sistema di coordinate indotto* (U^1, u^1) *su* $J^1\pi$ *è definito da*

$$\begin{gathered} U^1 = \{j^1_p\phi | \phi(p) \in U\} \\ u^1 = (x^i, u^\alpha, u^\alpha_i) \end{gathered}$$

dove $x^i(j^1_p\phi) = x^i(p)$*,* $u^\alpha(j^1_p\phi) = u^\alpha(\phi(p))$ *e le* $m \times n$ *funzioni* $u^\alpha_i : U^1 \to \mathbb{R}$ *sono definite da*

$$u^\alpha_i(j^1_p\phi) = (\tfrac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i})|_p$$

e sono dette derivate coordinate.

Proposizione 2.2.1. *Dato un atlante di carte adattate* (U, u) *su* E*, il corrispondente insieme di carte* (U^1, u^1) *è un atlante finito-dimensionale* C^∞ *su* $J^1\pi$*.*

Teorema 18. *Lo spazio totale* $J^1\pi$ *di* $\pi_{1,0}$ *è una varietà.*

2.2.2 Fibrato dei Jet di secondo ordine

Se (E, π, M) è un fibrato possiamo definire la varietà dei jet di secondo ordine $J^2\pi$ usando considerazioni analoghe a quelle usate per definire $J^1\pi$. Gli elementi di $J^2\pi$ saranno 2-jet $j^2_p\phi$ di sezioni locali $\phi \in \Gamma_p(\pi)$, dove un 2-jet è una classe di equivalenza contenente quelle sezioni locali che hanno lo stesso valore e le stesse prime due derivate in p.

Dobbiamo innanzitutto assicurarci che, essendo la relazione di equivalenza definita per mezzo di coordinate, questa non dipenda dalla scelta effettuata.

Lemma 3. *Sia (E, π, M) un fibrato e sia $p \in M$. Supponiamo che $\phi, \psi \in \Gamma_p(\pi)$ siano tali che $\phi(p) = \psi(p)$ e siano (x^i, u^α) e (y^j, v^β) due sistemi di coordinate adattate attorno a $\phi(p)$. Se*

$$\frac{\partial(u^\alpha \circ \phi)}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial(u^\alpha \circ \psi)}{\partial x^i}|_p$$
$$\frac{\partial^2(u^\alpha \circ \phi)}{\partial x^i \partial x^j}|_p = \frac{\partial^2(u^\alpha \circ \psi)}{\partial x^i \partial x^j}|_p$$

per $1 \leq i, j \leq m$ e $1 \leq \alpha \leq n$, allora

$$\frac{\partial(v^\beta \circ \phi)}{\partial y^k}|_p = \frac{\partial(v^\beta \circ \psi)}{\partial y^k}|_p$$
$$\frac{\partial^2(v^\beta \circ \phi)}{\partial y^k \partial y^l}|_p = \frac{\partial^2(v^\beta \circ \psi)}{\partial y^k \partial y^l}|_p$$

per $1 \leq k, l \leq m$ e $1 \leq \beta \leq n$.

Definizione 2.2.4. *Sia (E, π, M) un fibrato e sia $p \in M$. Diremo che le sezioni locali $\phi, \psi \in \Gamma_p(\pi)$ sono 2-equivalenti se $\phi(p) = \psi(p)$ e se, in qualche sistema di coordinate adattate (x^i, u^α) attorno a $\phi(p)$ si ha*

$$(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i})|_p = (\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^i})|_p$$
$$(\frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j})|_p = (\frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j})|_p$$

per $1 \leq i, j \leq m$ e $1 \leq \alpha \leq n$. La classe di equivalenza che contiene ϕ è detta il 2-jet di ϕ in p ed è denotata con $j^2_p\phi$.

Definizione 2.2.5. *La varietà dei* 2*-jet di* π *è l'insieme*

$$\{j_p^2\phi | p \in M \wedge \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$$

Denoteremo questo insieme con $J^2\pi$*. Le funzioni* π_2*,* $\pi_{2,0}$ *e* $\pi_{2,1}$ *sono dette proiezioni sulla base, sullo spazio totale e sugli* 1*-jet e sono definite da*

$$\begin{aligned}
\pi_2 \colon J^2\pi &\to M \\
j_p^2\phi &\mapsto p \\
\pi_{2,0} \colon J^2\pi &\to E \\
j_p^2\phi &\mapsto \phi(p) \\
\pi_{2,1} \colon J^2\pi &\to J^1\pi \\
j_p^2\phi &\mapsto j_p^1\phi
\end{aligned}$$

Definizione 2.2.6. *Sia* (E, π, M) *un fibrato e sia* (U, u) *un sistema di coordinate adattate su* E*, con* $u = (x^i, u^\alpha)$*. Il sistema di coordinate indotto* (U^2, u^2) *è definito da*

$$\begin{aligned}
U^2 &= \{j_p^2\phi | \phi(p) \in U\} \\
u^2 &= (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha)
\end{aligned}$$

dove $x^i(j_p^2\phi) = x^i(p)$*,* $u^\alpha(j_p^2\phi) = u^\alpha(\phi(p))$*,* $u_i^\alpha(j_p^2\phi) = u_i^\alpha(j_p^1\phi)$ *e le nuove funzioni* $u_{ij}^\alpha : U^2 \to \mathbb{R}$ *sono* $\frac{1}{2}mn(m+1)$ *e sono definite da*

$$u_{ij}^\alpha(j_p^2\phi) = (\tfrac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j})|_p$$

Le funzioni u_i^α *e* u_{ij}^α *sono dette derivate coordinate.*

Osservazione 2.2.1. *Il motivo per cui le funzioni* u_{ij}^α *sono solo* $\frac{1}{2}mn(m+1)$ *e non* m^2n *deriva dal fatto che risulta* $u_{ij}^\alpha = u_{ji}^\alpha$*.*

Proposizione 2.2.2. *Dato un atlante* (U, u) *di carte adattate su* E*, il corrispondente insieme di carte* (U^2, u^2) *è un atlante finito dimensionale* C^∞ *su* $J^2\pi$*.*

Teorema 19. *Lo spazio totale* $J^2\pi$ *di* $\pi_{2,1}$ *è una varietà.*

2.3 Trasversalità, teoria dei jet e embedding

Definizione 2.3.1. *Sia $f : M^n \to N^m$ una mappa liscia. L'estensione k-jet della mappa f è la mappa da M allo spazio dei k-jet da M a N, che associa ad ogni punto $p \in M$ il k-jet di f in quel punto; l'estensione k-jet è denotata come $j^k f : M \to J^k(M, N)$ ed è data da $j^k f(p) = j^k_p f$.*

Osservazione 2.3.1. *Si noti che l'estensione $j^k f$ è una sezione liscia del fibrato naturale $J^k(M, N) \to M$.*

Teorema 20 (Teorema di trasversalità forte di Thom)**.** *Sia M una varietà chiusa e Σ una sottovarietà chiusa dello spazio dei jet $J^k(M, N)$. Allora l'insieme delle mappe $f : M \to N$ le cui k-estensioni sono trasversali a Σ è un insieme aperto e denso nello spazio delle funzioni lisce da M in N.[2]*

Teorema 21. *Sia M una varietà differenziabile compatta di dimensione n. L'insieme delle immersioni $C^k(M, \mathbb{R}^N)$ è denso nell'insieme delle mappe C^k da M in $\mathbb{R}^N$ se $N \geq 2n$, mentre l'insieme l'insieme degli embedding $C^k(M, \mathbb{R}^N)$ è denso nell'insieme delle mappe C^k da M in $\mathbb{R}^N$ se $N \geq 2n + 1$.[1]*

Dimostrazione. Occupiamoci innanzitutto del risultato riguardante le immersioni: la condizione che una mappa liscia $f : M \to \mathbb{R}^N$ sia una immersione può essere espressa in termini dei suoi 1-jet. Consideriamo la varietà differenziabile $J^1(M, \mathbb{R}^N)$ e consideriamo su essa la sottovarietà Σ costituita da tutte le classi di equivalenza le cui funzioni rappresentanti hanno rango $k = 0, 1, ..., n - 1$, cioè le classi di equivalenza che contengono le funzioni che non sono immersioni da M a $\mathbb{R}^N$.
La condizione da imporre affinché f sia una immersione è che la sua 1-estensione eviti la sottovarietà Σ di $J^1(M, \mathbb{R}^N)$.
La varietà Σ è una varietà stratificata i cui strati Σ_k sono le classi di equivalenza di funzioni che hanno rango $k = 0, ..., n - 1$. Il più grande di questi strati è Σ_{n-1} e ha codimensione in p pari a $(n - k)(N - k) = [n - (n - 1)][N - (n - 1)] = (N - n + 1)$ e dunque dimensione in p pari a $Nn - N + n - 1$. Da ciò risulta che la dimensione di Σ_{n-1} (che è uguale per definizione alla dimensione di Σ) è uguale a $Nn - N + 2n - 1$.

Se la somma tra la dimensione della sezione $j^1 f$ e Σ_{n-1} è inferiore della dimensione dello spazio $J^1(M, \mathbb{R}^N)$, allora dalla trasversalità deriva che $(j^1 f)(M) \cap \Sigma = \emptyset$, e ciò è vero quando

$$n + Nn - N + 2n - 1 < n + Nn$$
$$N > 2n - 1$$

cioè quando $N \geq 2n$. Deriva quindi dal teorema di trasversalità forte di Thom (teorema 20) che l'insieme delle immersioni da M in $\mathbb{R}^N$ è denso nell'insieme delle mappe lisce da M in $\mathbb{R}^N$ se $N \geq 2n$.

Invece, la condizione che la f sia iniettiva è equivalente al fatto che la mappa F da $M \times M \to \mathbb{R}^N$ data da $F(x, y) = f(x) - f(y)$ non abbia 0 nella sua immagine: ciò è vero in generale se $2n < N$, e quindi se $N \geq 2n + 1$. Risulta quindi che l'insieme degli embedding da M in $\mathbb{R}^N$ è denso nell'insieme delle mappe lisce da M in $\mathbb{R}^N$ se $N \geq 2n+1$.

$\square$

Capitolo 3

Il teorema di immersione isometrica di Nash

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di dimensione n. Considerata una mappa $F = (F^1, ..., F^N) : M \to \mathbb{R}^N$, esiste un tensore metrico indotto su M da F dato in coordinate locali da

$$(g_F)_{ij} = <\tfrac{\partial F}{\partial x^i}, \tfrac{\partial F}{\partial x^j}> = \sum_{r=1}^{N} \tfrac{\partial F^r}{\partial x^i} \tfrac{\partial F^r}{\partial x^j}$$

Quest'ultima è una metrica riemanniana a condizione che F sia una immersione (teorema 10).
Il problema dell'embedding isometrico è quello di trovare una immersione iniettiva F tale che $g_F = g$.

3.1 Mappe free

L'approccio usato da Nash (lo stesso usato anche da altri autori successivi) è quello di considerare il problema di perturbare una data immersione isometrica (o embedding) per ottenere un determinato e sufficientemente piccolo cambiamento nella metrica.
Sia $F : M \to \mathbb{R}^N$ l'immersione isometrica (o embedding) considerata e sia h il cambiamento della metrica richiesto (cioè un tensore simmetrico su M): possiamo provare a scegliere una mappa $V : M \to \mathbb{R}^N$ tale che $g_{F+V} = g_F + h$, che è equivalente a

$$\sum_{r=1}^{N} \tfrac{\partial F^r}{\partial x^i} \tfrac{\partial V^r}{\partial x^j} + \sum_{r=1}^{N} \tfrac{\partial V^r}{\partial x^i} \tfrac{\partial F^r}{\partial x^j} + \sum_{r=1}^{N} \tfrac{\partial V^r}{\partial x^i} \tfrac{\partial V^r}{\partial x^j} = h_{ij}$$

cioè a un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che deve essere soddisfatto dalla variazione V.
Nash apportò una notevole semplificazione al problema, considerando solo variazioni che fossero normali all'embedding F, e quindi impose le ulteriori condizioni

$$\sum_{r=1}^{N} V^r \frac{\partial F^r}{\partial x^j} = 0$$

con $j = 1, ..., n$. Differenziando queste equazioni rispetto a x_i si ottiene:

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{\partial V^r}{\partial x^i} \frac{\partial F^r}{\partial x^j} = -\sum_{r=1}^{N} V^r \frac{\partial^2 F^r}{\partial x^i \partial x^j}$$

Sostituendo infine quest'ultimo risultato nell'equazione della perturbazione otteniamo:

$$-2\sum_{r=1}^{N} V^r \frac{\partial^2 F^r}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial V^r}{\partial x^i} \frac{\partial V^r}{\partial x^j} = h_{ij}$$

L'ultimo termine a primo membro è quadratico in V e quindi, se V è piccolo, risulta essere trascurabile. E' importante notare che i rimanenti termini dell'equazione precedente non costituiscono più un sistema di equazioni alle derivate parziali di prim'ordine ma un sistema di equazioni algebrico e lineare per le componenti della perturbazione V. Scrivendo il corrispondente problema infinitesimale che si ottiene considerando il problema di perturbazione per th_{ij} quando $t \to 0$, allora la variazione infinitesimale $W = \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0}$ soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{N} W^r \frac{\partial^2 F^r}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{1}{2} h_{ij} \\ \sum_{r=1}^{N} W^r \frac{\partial F^r}{\partial x^j} = 0 \end{cases}$$

Abbiamo dunque in ogni punto della varietà M un sistema di $\frac{n(n+3)}{2}$ equazioni lineari nelle N incognite W^r: n di queste equazioni provengono dalla condizione che la variazione sia normale all'embedding, mentre le rimanenti $\frac{n(n+1)}{2}$ provengono dall'equazione per ogni componente del tensore simmetrico h_{ij}. Questo sistema non può essere risolto in generale quanto $N < \frac{n(n+3)}{2}$, mentre se $N > \frac{n(n+3)}{2}$ allora la soluzione non sarà unica. Se $N \geq \frac{n(n+3)}{2}$ allora la soluzione esiste a condizione che gli $\frac{n(n+3)}{2}$ vettori $\frac{\partial F}{\partial x^i}$, con $i = 1, ..., n$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}$, con $1 \leq i \leq j \leq n$ siano linearmente indipendenti.

Definizione 3.1.1. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n; un'applicazione liscia $F : M \to \mathbb{R}^N$ è detta free se gli $(n + s_n)$ ($s_n = \frac{n(n+1)}{2}$) vettori in $\mathbb{R}^N$*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x^i}(p) & i = 1, ..., n \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(p) & 1 \leq i \leq j \leq n \end{array}$$

sono linearmente indipendenti per ogni $p \in M$.
Indicheremo con $Free(M, \mathbb{R}^N)$ l'insieme di tutte le mappe lisce e free da M a $\mathbb{R}^N$.

Teorema 22. *Sia M una varietà differenziabile compatta di dimensione n con un embedding free reale-analitico F da M in $\mathbb{R}^N$. Se h è un campo di tensori simmetrico di tipo $(2, 0)$ su M di ordine C^k, con $k \geq 3$, sufficiente piccolo in C^3, allora esiste una mappa $V : M \to \mathbb{R}^N$ di ordine C^k tale che $g_{F+V} = g_F + h$.*

Osservazione 3.1.1. *La condizione di reale-analiticità per F può essere indebolita: il teorema resta valido se F è semplicemente C^∞, o meno regolare nel caso in cui la metrica che stiamo cercando di ottenere sia meno regolare.*

Osservazione 3.1.2. *La regolarità di V garantita dal teorema 22 sembra essere a prima vista peggiore di quanto ci si aspetti: infatti, dal momento che la metrica g è costruita a partire dalle derivate prime dell'embedding F, poiché la metrica è di classe C^k ci aspetteremmo che l'embedding sia di classe C^{k+1}. Questo ragionamento non è vero in generale e la regolarità non può essere migliorata senza l'aggiunta di ulteriori ipotesi.*
Per verificare ciò considereremo l'espressione del tensore di curvatura intrinseco della metrica indotta. Per definizione le derivate covarianti del campo di vettori $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ sono date da

$$\nabla_{\partial_i} \partial_k = \Gamma^p_{ik} \partial_p$$

dove i simboli di Christoffel Γ^p_{ik} sono dati da

$$\Gamma^p_{ik} = \frac{1}{2} g^{pq} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{kq} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{iq} - \frac{\partial}{\partial x^q} g_{ik}\right)$$

Il tensore di curvatura è allora dato da

$$R_{ijkl} = g(\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k, \partial_l) =$$
$$= (\tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^q_{ik} - \tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^q_{jk} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^q_{jp} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^q_{ip})g_{ql}$$

Il tensore di curvatura coinvolge le derivate seconde del tensore metrico, dunque ci aspettiamo che sia di classe C^{k-2} se la metrica è C^k.
Possiamo calcolare la curvatura intrinseca anche tramite la curvatura estrinseca tramite l'equazione di Gauss: si ha

$$R_{ijkl} = (II^\alpha_{ik}II^\beta_{jl} - II^\alpha_{jk}II^\beta_{il})<\nu_\alpha, \nu_\beta>$$ [1]

La seconda forma fondamentale è definita in termini delle derivate seconde dell'embedding e dunque non sarà peggiore di C^{k-1} se l'embedding è di classe C^{k+1}.
Per dimostrare che l'embedding non può essere C^{k+1} dobbiamo mostrare l'esistenza di una metrica per la quale la curvatura intrinseca è sicuramente non più regolare di C^{k-2}.
A tal proposito, nel caso bidimensionale, consideriamo la metrica $g = e^{2f(x)}(dx^2 + dy^2)$ dove f è di classe C^k; risulta che la curvatura scalare è data da

$$R = -e^{-2f}f''$$

che non è migliore di C^{k-2}. In dimensioni più alte considereremo il prodotto di questa metrica con una metrica piatta.

Osservazione 3.1.3 (Perdita di differenziabilità)**.** *Vogliamo provare a capire quali siano le difficoltà che si incontrano nella dimostrazione del teorema 22. All'inizio di questa sezione abbiamo impostato il sistema di equazioni per il problema di perturbazione e abbiamo dimostrato (almeno nel caso in cui l'immersione che stiamo perturbando è free) che esiste una soluzione del problema infinitesimale. Solitamente in queste circostanze vorremmo applicare un teorema della funzione implicita per mostrare che effettivamente una soluzione esiste.*
Delineiamo meglio il problema: abbiamo fissato un embedding di partenza F che è free e che possiamo supporre essere abbastanza regolare (anche reale-analitico). Consideriamo

[1] La seconda forma fondamentale è definita come $\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = -II^\alpha_{ij}\nu_\alpha + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F}{\partial x^j}$, dove ν_α, $\alpha = 1, ..., N-n$, sono una base dello spazio normale alla mappa F e Γ^k_{ij} sono i coefficienti della connessione.

l'applicazione che porta una sezione V di classe C^k sul fibrato normale di $F(M)$ nel tensore simmetrico $h = g_{F+V} - f_F$ di classe C^{k-1}. Quella appena considerata è una mappa liscia dallo spazio di Banach [2] $C^k(M, NM)$ allo spazio di Banach $C^{k-1}(S_2M)$, dove S_2M è il fibrato dei 2-tensori simmetrici su M. Abbiamo calcolato la derivata di questa mappa nella zero-section: sembra che abbiamo appena mostrato che la derivata è suriettiva, ma in realtà abbiamo mostrato che ogni perturbazione infinitesima della metrica può essere ottenuta tramite una variazione infinitesima nel fibrato normale, ma la nostra espressione precedente mostra che se h è C^{k-1} allora anche la variazione W è C^{k-1} e non C^k. La derivata della mappa precedente tra spazi di Banach non è suriettiva e dunque non possiamo applicare il teorema della funzione implicita per spazi di Banach [3] per trovare una mappa locale inversa. Abbiamo invece dimostrato che la funzione derivata in un sottoinsieme delle variazioni delle metriche C^k è suriettiva, ma ciò non basta poiché la mappa non ci da una variazione C^k della metrica in generale. Questo fenomeno è noto come perdita di differenziabilità ed è la difficoltà chiave che Nash è riuscito a superare e che è andata a costituire il teorema della funzione implicita di Nash-Moser o teorema della funzione implicita "hard".

Teorema 23 (IFT, Implicit function theorem)**.** *Siam M una varietà liscia compatta di dimensione n. Per ogni metrica indotta da $z \in Free(M, \mathbb{R}^N)$ esiste un aperto $\mathcal{U}^{\infty}_{g_z}$ di g_z in $Met(M)$ tale che ogni metrica in tale intorno è indotta da un embedding da M in $\mathbb{R}^N$, cioè per ogni $g' \in \mathcal{U}^{\infty}_{g_z}$ esiste $z' \in Emb(M, \mathbb{R}^N)$ tale che $g_{z'} = g'$.[8]*

[2] Uno spazio vettoriale X è detto di Banach se X è normato e completo.

[3] Siano X e Y due spazi di Banach e sia U un insieme aperto dell'origine in X. Sia $F : U \to Y$ una funzione continuamente differenziabile e supponiamo che l'applicazione lineare $F'(0)$ sia iniettiva e suriettiva. Allora esiste un intorno aperto V di $F(0)$ in Y e una funzione continuamente differenziabile $G : V \to X$ con la proprietà che $F(G(y)) = y$. Inoltre $G(y)$ è l'unica soluzione sufficientemente piccola dell'equazione $F(x) = y$.

Teorema 24. *Sia M una varietà differenziabile compatta di dimensione n e poniamo $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Se $N \geq s_n + 2n$ allora $Free(M, \mathbb{R}^N)$ è denso in $C^\infty(M, \mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. La condizione che una mappa liscia $f : M \to \mathbb{R}^N$ sia free può essere espressa in termini dei suoi 2-jet. Consideriamo la varietà differenziabile $J^2(M, \mathbb{R}^N)$ e consideriamo su essa la sottovarietà Σ costituita da tutte le classi di equivalenza le cui funzioni rappresentanti hanno rango $k = 0, 1, ..., \frac{n(n+3)}{2} - 1$, cioè le classi di equivalenza che contengono le funzioni che non sono free da M a $\mathbb{R}^N$. La condizione da imporre è che l'2-estensione dell'applicazione f eviti la sottovarietà Σ di $J^2(M, \mathbb{R}^N)$.
La varietà Σ è una varietà stratificata i cui strati Σ_k sono le classi di equivalenza di funzioni che hanno rango $k = 0, ..., \frac{n(n+3)}{2} - 1$.
Posto $r_n = \frac{n(n+3)}{2}$, il più grande di questi strati è $\Sigma_{r_n - 1}$ e ha codimensione in p pari a $(r_n - k)(N - k) = [r_n - (r_n - 1)][N - (r_n - 1)] = (N - r_n + 1)$ e dunque dimensione in p pari a $Nr_n - N + r_n - 1$. Da ciò risulta che la dimensione di $\Sigma_{r_{n-1}}$ (che è uguale per definizione alla dimensione di Σ) è uguale a $n + Nr_n - N + r_n - 1$.
Se la somma tra la dimensione della sezione $j^2 f$ e $\Sigma_{r_n - 1}$ è inferiore della dimensione dello spazio $J^2(M, \mathbb{R}^N)$, allora dalla trasversalità deriva che $(j^2 f)(M) \cap \Sigma = \emptyset$, e ciò è vero quando

$$\begin{aligned} 2n + Nr_n - N + r_n - 1 &< n + Nr_n \\ N &> n + \tfrac{n(n+3)}{2} - 1 \\ N &> \tfrac{n(n+5)}{2} - 1 \end{aligned}$$

cioè quando $N \geq \frac{n(n+5)}{2}$. Deriva quindi dal teorema di trasversalità forte di Thom (teorema 20) che l'insieme delle mappe free da M in $\mathbb{R}^N$ è denso nell'insieme delle mappe lisce da M in $\mathbb{R}^N$ se $N \geq \frac{n(n+5)}{2} = s_n + 2n$.

□

3.2 Mappe full

Definizione 3.2.1. *Sia M una varietà differenziabile compatta di dimensione n. Una mappa liscia $f = (f_1, ..., f_m) : M \to \mathbb{R}^m$ è detta full se le forme bilineari simmetriche*

$$<\frac{\partial f_k}{\partial x^i}, \frac{\partial f_k}{\partial x^j}> \qquad k = 1, ..., m$$

generano lo spazio delle forme bilineari simmetriche in ogni punto p della varietà M. Indicheremo con $Full(M, \mathbb{R}^m)$ l'insieme di tutte le mappe lisce e full da M a $\mathbb{R}^m$.

Osservazione 3.2.1. *Nash dimostrò che si possono trovare mappe full con $m = \frac{n(n+3)}{2}$. Dunque, sotto questa condizione, ciascuna metrica può essere espressa come combinazione lineare con coefficienti C^r delle forme bilineari simmetriche sopra indicate.*

Teorema 25 (Nash twist)**.** *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta. Se $f = (f_1, ..., f_m) : M \to \mathbb{R}^m$ è un embedding full allora esiste un intorno C^0 U_g^0 di g tale che ogni $g' \in U_g^0$ può essere C^∞ approssimata da g_y, dove $y : M \to \mathbb{R}^{2m}$ è un embedding.*

Dimostrazione. Dal momento che f è full potremo scrivere la metrica g come

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (a^k)^2 \frac{\partial f_k}{\partial x^i} \frac{\partial f_k}{\partial x^j}$$

con $a^k \in C^r(M)$.

Definiamo una mappa $y_\lambda : M \to \mathbb{R}^{2m}$ come:

$$y_\lambda^k = \frac{a^k}{\lambda} \sin(\lambda f_k) \qquad k = 1, ..., m$$
$$y_\lambda^{m+k} = \frac{a^k}{\lambda} \cos(\lambda f_k) \qquad k = 1, ..., m$$

Intuitivamente dunque la mappa y_k prende ciascuna componente di $f = (f_1, ..., f_m)$, la avvolge attorno a una circonferenza di raggio $\frac{1}{\lambda}$ e scala infine il risultato tramite il peso a^k.

Vogliamo calcolare ora la metrica indotta da y_λ, che indicheremo con g_λ. Si ha che

$$(g_\lambda)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial y_\lambda^k}{\partial x^i} \frac{\partial y_\lambda^k}{\partial x^j} + \frac{\partial y_\lambda^{m+k}}{\partial x^i} \frac{\partial y_\lambda^{m+k}}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^{m} [(a^k)^2 \cos^2(\lambda f_k) \frac{\partial f_k}{\partial x^i} \frac{\partial f_k}{\partial x^j} +$$
$$+ \frac{a^k \sin(\lambda f_k) \cos(\lambda f_k)}{\lambda} \left(\frac{\partial a^k}{\partial x^i} \frac{\partial f_k}{\partial x^j} + \frac{\partial a^k}{\partial x^j} \frac{\partial f_k}{\partial x^i}\right) +$$

$$+\frac{\sin^2(\lambda f_k)}{\lambda^2}\frac{\partial a^k}{\partial x^i}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}+(a^k)^2\sin^2(\lambda f_k)\frac{\partial f_k}{\partial x^i}\frac{\partial f_k}{\partial x^j}+$$
$$-\frac{a^k\sin(\lambda f_k)\cos(\lambda f_k)}{\lambda}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^i}\frac{\partial f_k}{\partial x^j}+\frac{\partial a^k}{\partial x^j}\frac{\partial f_k}{\partial x^i}\right)+$$
$$+\frac{\cos^2(\lambda f_k)}{\lambda^2}\frac{\partial a^k}{\partial x^i}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}]=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}[(a^k)^2\frac{\partial f_k}{\partial x^i}\frac{\partial f_k}{\partial x^j}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial a^k}{\partial x^i}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}]=$$
$$=g_{ij}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a^k}{\partial x^i}\frac{\partial a^k}{\partial x^j}$$

Dunque, se λ è grande, g_λ è una buona approssimazione per g. □

Osservazione 3.2.2. *Analogamente, considerato un embedding full $f : M \to \mathbb{R}^m$ e la varietà riemanniana (M, g_f) allora esiste un intorno C^0 $U^0_{g_f}$ di g_f tale che ogni $g' \in U^0_{g_f}$ può essere C^∞ approssimata da g_y, dove $y : M \to \mathbb{R}^{2m}$ è un embedding.*

Teorema 26. *Sia M una varietà differenziabile compatta di dimensione n e poniamo $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Se $N \geq s_n + n$ allora $Full(M, \mathbb{R}^N)$ è denso in $C^\infty(M, \mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. La condizione che una mappa liscia $f : M \to \mathbb{R}^N$ sia full può essere espressa in termini dei suoi 1-jet. Consideriamo la varietà differenziabile $J^1(M, \mathbb{R}^N)$ e consideriamo su essa la sottovarietà Σ costituita da tutte le classi di equivalenza per cui lo spazio generato dai loro elementi metrici abbia rango $k = 0, 1, ..., \frac{n(n+1)}{2} - 1$ nello spazio delle forme bilineari simmetriche. La condizione da imporre è che l'1-estensione dell'applicazione f eviti la sottovarietà Σ di $J^1(M, \mathbb{R}^N)$.

La varietà Σ è una varietà stratificata i cui strati Σ_k sono le classi di equivalenza di funzioni per cui lo spazio generato dai loro elementi metrici abbia rango $k = 0, ..., \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Posto $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$, il più grande di questi strati è Σ_{s_n-1} e ha codimensione in p pari a $(s_n - k)(N - k) = [s_n - (s_n - 1)][N - (s_n - 1)] = (N - s_n + 1)$ e dunque dimensione in p pari a $Nn - N + s_n - 1$. Da ciò risulta che la dimensione di $\Sigma_{s_{n-1}}$ (che è uguale per definizione alla dimensione di Σ) è uguale a $n + Nn - N + s_n - 1$.

Se la somma tra la dimensione della sezione $j^1 f$ e Σ_{s_n-1} è inferiore della dimensione dello spazio $J^1(M, \mathbb{R}^N)$, allora dalla trasversalità deriva che $(j^1 f)(M) \cap \Sigma = \emptyset$, e ciò è vero quando

$$2n + Nn - N + s_n - 1 < n + Nn$$

$$N>n+\tfrac{n(n+1)}{2}-1$$
$$N>\tfrac{n(n+3)}{2}-1$$

cioè quando $N \geq \frac{n(n+3)}{2}$. Deriva quindi dal teorema di trasversalità forte di Thom (teorema 20 che l'insieme delle mappe full da M in $\mathbb{R}^N$ è denso nell'insieme delle mappe lisce da M in $\mathbb{R}^N$ se $N \geq \frac{n(n+3)}{2} = s_n + n$.

□

3.3 Il teorema di immersione isometrica di Nash

Per la dimostrazione del teorema di immersione isometrica di Nash sarà necessario l'ausilio del seguente teorema:

Teorema 27 (Nash-Kuiper)**.** *Ogni varietà riemanniana chiusa di dimensione n ha un embedding isometrico di classe C^1 in $\mathbb{R}^{2n}$.[18]*

Teorema (Teorema di immersione isometrica di Nash)**.** *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di dimensione n. Se $N \geq 3s_n + 4n$, con $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$, allora esiste un embedding isometrico f di M in $\mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione. Essendo M una varietà riemanniana compatta di dimensione n, il teorema di Whitney (teorema 9) ci assicura l'esistenza di un embedding $w : M \to \mathbb{R}^{2n}$.
Se consideriamo l'embedding canonico $i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{s_n+n}$, possiamo applicare il teorema 26 all'embedding $i \circ w : M \to \mathbb{R}^{s_n+n}$ e risulta che esiste $F_1 \in Full(M, \mathbb{R}^{s_n+n}) \cap Emb(M, \mathbb{R}^{s_n+n})$.
Si ha che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $F = \lambda F_1$ sia g-short, cioè $g - g_F \in Met(M)$.
Consideriamo l'embedding canonico $j : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{s_n+2n}$. Risulta dal teorema 27 che esiste $f_1 \in Emb_1(M, \mathbb{R}^{s_n+2n})$ tale che $g_{f_1} = g - g_F$.
Per il teorema 24 esiste una successione di $z_j \in Free(M, \mathbb{R}^{s_n+2n}) \cap Emb(M, \mathbb{R}^{s_n+2n})$ tale che $z_j \to_{C^1} f_1$, e ciò implica che $g_{z_j} \to_{C^0} g_{f_1}$; si ha quindi che $g - g_{z_j} \to_{C^0} g_F$ e dunque esiste $z \in Free(M, \mathbb{R}^{s_n+2n}) \cap Emb(M, \mathbb{R}^{s_n+2n})$ tale che $g - g_z \in \mathcal{U}^0_{g_F}$.
Sfruttando il teorema 25 possiamo affermare l'esistenza di una successione di embedding $y_j \in Emb(M, \mathbb{R}^{2s_n+2n})$ tali che $g_{y_j} \to_{C^\infty} g - g_z$, da cui $g - g_{y_j} \to_{C^\infty} g_z$ e dunque esiste

$y \in Emb(M, \mathbb{R}^{2s_n+2n})$ tale che $g - g_y \in \mathcal{U}^{\infty}_{g_z}$. Quindi per il teorema 23 risulta che esiste $z' \in Emb(M, \mathbb{R}^{s_n+2n})$ tale che $g_{z'} = g - g_y$.

Considerando infine l'embedding $f = (y, z')$, si ha che

$$f \in Emb(M, \mathbb{R}^{2s_n+2n} \times \mathbb{R}^{s_n+2n} = \mathbb{R}^{3s_n+4n} = \mathbb{R}^{\frac{n(3n+11)}{2}})$$

ed inoltre $g_f = g_y + g_{z'} = g_y + g - g_y = g$ e dunque il teorema è dimostrato.

$\square$

Bibliografia

[1] Ben Andrews; Notes on the isometric embedding problem and the Nash-Moser implicit function theorem.

[2] Vladimir Arnold, Sabir Gusein-Zade, Alexander Varchenko; Singularities of differential maps, Volume 1; Birkhäuser; 1985.

[3] William M. Boothby; An introduction to differentiable manifolds and riemmanian geometry; Academic Press; 2nd edition 2002.

[4] Nicolas Bourbaki; General Topology, Chapters 1-4; Springer; 1989.

[5] Elie Cartan; Sur la possibilité de plonger un espace Riemannian donné dans un espace euclidien; Annales de la Société Polonaise de Mathétique, 6, pp. 1–7; 1927.

[6] Michail Gromov, Vladimir Rokhlin; Embeddings and immersion in Riemannian geometry; Russian Math surveys; 1970.

[7] Michail Gromov; Isometric embeddings and immersions, Soviet Mathematics Doklady 11, pp. 794–797; 1970.

[8] Michail Gromov; Partial differential relations; Springer-Verlag; 1986.

[9] Victor Guillemin, Alan Pollack; Differential topology; Prentice-Hall; 1974.

[10] Matthias Günther; Isometric embeddings of Riemannian manifolds; Proceedings of ICM Kyoto, pp. 1137–1143; 1990.

[11] Matthias Günther,; On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds; Annals of global analysis and geometry, Vol. 7, Issue 1, pp. 69-77; 1989.

[12] Matthias Günther; Zum einbettungssatz von J. Nash; Mathematische Nachrichten, Vol. 144, Issue 1, pp. 165–187; 1989.

[13] Morris W. Hirsch; Differential Topology; Springer-Verlag; 1976.

[14] Yulij Ilyashenko, Sergei Yakovenko; Concerning the Hilbert 16th problem; American Mathematical Society; 1995;

[15] Maurice Janet; Sur la possibilité de plonger un espace Riemannien donne dans une espac euclidien; Annales de la Société Polonaise de Mathétique, 5, pp. 422-430; 1926.

[16] John Lee; Introduction to smooth manifolds; Springer; 2000.

[17] Andrea Loi; Introduzione alla topologia generale; Aracne; 2013.

[18] John Nash; C^1 isometric imbeddings, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 60, No. 3, pp. 383-396; 1954.

[19] John Nash; The imbedding problem for Riemannian manifolds; Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 63, No. 1, pp. 20–63; 1956.

[20] Carlo Pagani, Sandro Salsa; Analisi matematica, volume 2; Masson; 1998.

[21] Michael Renardy, Robert Rogers; An introduction to partial differential equations; Springer; 2000.

[22] David John Saunders; The geometry of jet bundles; Cambridge University Press; 1989.

[23] Ludwig Schläfli; Nota alla memoria del Sig. Beltrami, “Sugli spazii di curvatura constante”; Annali di matematica pura ed applicata, volume 5, Issue 1, pp. 170-193; 1871–1873.

[24] Michael Spivak; Calculus on manifolds; Addison-Wesley publishing company; 1965.

[25] Hermann Weyl; Die idee der Riemannschen fläche", Göttingen Lecture notes; 1911–12.

[26] Hassler Whitney; The self-intersection of a smooth n-manifold in 2n-space, Annals of Mathematics 45, pp. 220–246; 1944.

[27] Hassler Whitney; The singularities of a smooth n-manifold in (2n-1)-space, Annals of Mathematics 45, pp. 247-293; 1944.