Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Teoremi del punto fisso e applicazioni

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Annamaria Busia

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è analizzare alcuni teoremi del punto fisso e illustrarne due possibili applicazioni. Nella prima parte ci si propone di dare una dimostrazione alternativa del teorema del punto fisso di Brouwer, dalla già nota dimostrazione della Topologia Algebrica [3], seguita da una sua generalizzazione nota come teorema del punto fisso di Kakutani.
Lo schema seguito per la dimostrazione dell'esistenza di un punto fisso per funzioni continue (ciò che è affermato nel teorema di Brouwer) parte dal teorema di Stokes per le forme differenziali [2] a cui è dedicato il primo capitolo. Il teorema di Stokes è necessario per la dimostrazione dell'esistenza di un punto fisso per funzioni differenziabili, questo risultato è attribuito essenzialmente a E. Lima. L'approssimazione di una funzione continua con una successione di funzioni differenziabili ci permette quindi di arrivare alla dimostrazione del teorema di Brouwer.
Nella seconda parte vedremo in che modo tali teoremi possono essere usati per trarre delle utili conclusioni, in campo economico e nella Teoria dei Giochi [1]. In particolare il teorema del punto fisso di Brouwer viene utilizzato per poter dimostrare l'esistenza di equilibri economici cioè situazioni in cui la domanda e l'offerta raggiungono una condizione tale da portare tutti i negoziatori alla massima soddisfazione. Invece il teorema del punto fisso di Kakutani viene usato nella Teoria dei Giochi per dimostrare che in giochi non cooperativi esiste sempre un equilibrio detto equilibrio di Nash. Per equilibrio di Nash si intende una situazione in cui tutti i giocatori attuano una propria strategia che massimizza il loro guadagno.

Capitolo 1

Teorema di Stokes

In questo capitolo, vedremo i concetti fondamentali che ci permetteranno di arrivare alla formulazione del Teorema di Stokes per le forme differenziali. Iniziamo con il dare di seguito le definizioni di varietà differenziabile, di forma differenziale in R^n per poi definirle su una varietà, e di alcuni teoremi che ci permetteranno di arrivare al vero e proprio Teorema di Stokes.

1.1 Varietà Differenziabili

Definizione 1.1.1. *Un semispazio di R^n è l'insieme:*

$$K^n = \{(x_1, ..., x_n) \in R^n | a^T x \leq b\}$$

dove $a \in R^n$, $b \in R$.

Noi in particolare considereremo il semispazio $H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in R^n | x_1 \leq 0\}$ ovvero con $a = (1, 0, ..., 0)$ e $b = 0$.

Definizione 1.1.2. *Sia $f : V \subseteq H^n \longrightarrow R^n$ con V aperto di H^n. Diciamo che f è differenziabile se esiste un aperto $U \subseteq R^n$che contiene V e un'applicazione $\bar{f}$ differenziabile in U tale che la restrizione di $\bar{f}$ a V sia f cioè $\bar{f}_V = f$. Quindi in questo caso il differenziale df_p, per $p \in V$ è dato da :*

$$df_p = d\bar{f}_p.$$

Quando V non contiene punti della forma $(0, x_2, ..., x_n)$ allora V è un aperto di R^n e la definizione di df_p coincide con quella usuale.
Se invece $p = (0, x_2, ..., x_n)$, df_p è definita per tutti i vettori tangenti alle curve in U passanti per p.

Definizione 1.1.3.
*Una varietà differenziabile di dimensione n è data da (M,*U*), dove M è un insieme,* U *è una famiglia di coppie:*

$$\mathrm{U} = \{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}, \ \ con\ U_\alpha \in R^n \tag{1.1}$$

dove

$$f_\alpha : U_\alpha \to M$$

sono applicazioni tali che:

1. *le immagini degli aperti U_α tramite f_α sono un ricoprimento per M ovvero $\cup_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(U_\alpha) = M$;*

2. *$\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ tali che $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, gli insiemi $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ siano aperti di R^n, e le applicazioni $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ e $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ siano differenziabili.*

3. U *sia una famiglia massimale che rispetti* 1. *e* 2.

4. *La famiglia $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ sull'insieme M induce in modo naturale una topologia su M, tale che abbia le proprietà di numerabilità della base e di essere uno spazio di Hausdorff. Diremo che $A \subseteq M$ è un insieme aperto, se si ha che $f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha))$ è un aperto di R^n per ogni α tale che $A \cap f_\alpha(U_\alpha) \neq \emptyset$.*

La coppia (U_α, f_α) per $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ è detta *parametrizzazione* (*sistema di coordinate*) di M in p e $f_\alpha(U_\alpha)$ è detto *intorno coordinato* di p. Una famiglia $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ che soddisfa la 1. e 2. è detta *struttura differenziabile* di M.

Osservazione 1.1.4. La definizione di varietà con bordo è analoga alla definizione di varietà sopra data, con la differenza che gli aperti U_α non sono più dello spazio R^n ma del suo sottospazio H^n definito nella 1.1.1.

Definizione 1.1.5. *Un punto $p \in M$ è detto punto del bordo di M se per qualche parametrizzazione*

$$f : U \subset H^n \longrightarrow M$$

tale che $p \in U$, si ha che $f(0, x_2, ..., x_n) = p$.

Si può dimostrare che il punto del bordo non dipende dalla parametrizzazione scelta per rappresentarlo, quindi l'insieme

$$\partial M = \{p \in M | f(0, x_2, ..., x_n) = p\}$$

è ben definito ed è detto *bordo di M*.

Proposizione 1.1.6. *Il bordo ∂M di una n-varietà M differenziabile, è una $(n-1)$-varietà differenziabile.*

Dimostrazione. Viene omessa. Si veda [6] per la dimostrazione. □

1.2 Forme Differenziali

Per $p \in R^n$, sia R^n_p lo spazio tangente in p a R^n e $(R^n_p)^*$ il suo spazio duale cioè lo spazio delle applicazioni lineari $\varphi : R^n_p \longrightarrow R$, sia $\Lambda^k(R^n_p)^*$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni k-lineari antisimmetriche:

$$\psi : \underbrace{R^n_p \times ... \times R^n_p}_{k \quad \text{volte}} \longrightarrow R.$$

Si può dimostrare che $\Lambda^k(R^n_p)^*$ è un'algebra associativa rispetto all'operatore $\wedge$ detto prodotto esterno.

Definizione 1.2.1 (k-forma in R^n)**.** *Una forma k lineare (k-forma) su R^n è un'applicazione w tale che ad ogni $p \in R^n$ associa $w(p) \in \Lambda^k(R^n_p)^*$, data*

$$\{(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_1 < ... < i_k, \quad i_j \in \{1, ..., n\}\}$$

base per $\Lambda^k(U_p)^*$, allora la k-forma $w(p)$ può essere scritta come:

$$w(p) = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1,...,i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p \quad i_j \in \{1, ..., n\}.$$

I coefficienti $a_{i_1,...,i_k}$ sono funzioni reali in R^n. Se tali coefficienti sono funzioni differenziabili allora w è detta ***k-forma differenziale****.*

Osservazione 1.2.2. Per semplificare la notazione indichiamo una k-forma w come $w = \sum_I a_I dx_I$ dove I è la k-upla $(i_1, ..., i_k)$ tale che $i_1 \leq ... \leq i_k$ per $i_j \in \{1, ..., n\}$.

Ora vediamo il comportamento delle forme differenziali rispetto alle funzioni differenziabili. Sia $f : R^n \longrightarrow R^m$ una funzione differenziabile, essa induce un'applicazione (pull-back) f^* che a k forme di R^m associa k forme di R^n ed è definita come segue. Sia $w \in \Lambda^k(R^m_p)^*$ definiamo $f^*w \in \Lambda^k(R^n_p)^*$ come :

$$(f^*w)(p)(v_1, ..., v_k) = w(f(p))(df_p(v_1), ..., df_p(v_k)).$$

dove $p \in R^n$, $v_1, ..., v_k \in R^n_p$, e $df_p : R^n_p \longrightarrow R^m_{f(p)}$ è il differenziale di f in p. Tra le molte proprietà del pull-back ne ricordiamo una che tornerà utile in seguito.

Proposizione 1.2.3. *Sia w una k-forma in R^m e $f : R^n \longrightarrow R^m$ una funzione differenziabile, allora*

$$d(f^*w) = f^*(dw), \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Sia $k = 0$, ossia un'applicazione $g : R^m \longrightarrow R$. Allora

$$\begin{aligned} f^*(dg) = f^*\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right) &= \sum_{ij} \frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_j \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) = d(f^*g). \end{aligned}$$

Sia $\psi = \sum_I a_I dx_I$ una k-forma. Usando quanto appena detto, e per il fatto che f^* commuta con il prodotto esterno, si ha:

$$
\begin{aligned}
d(f^*\psi) &= d\Big(\sum_I f^*(a_I)f^*(dx_I)\Big) \\
&= \sum_I d(f^*(a_I) \wedge f^*(dx_I)) = \sum_I f^*(da_I) \wedge f^*(dx_I) \\
&= f^*\Big(\sum_I da_I \wedge dx_I\Big) = f^*(d\psi).
\end{aligned}
$$

□

1.2.1 Forme differenziali su una varietà

Definizione 1.2.4. *Una k-forma w su una varietà differenziabile M è un'applicazione tale che ad ogni elemento $p \in M$ associa un elemento dello spazio $\Lambda^k(T_pM)^*$ delle k forme lineari antisimmetriche dello spazio tangente in p a M.*

Definizione 1.2.5. *Data w una k-forma su M e $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M$ una parametrizzazione in un intorno di $p \in f_\alpha(U_\alpha)$, si definisce* ***rappresentazione*** *di w nella parametrizzazione f_α, la k-forma w_α in U_α, ovvero:*

$$w_\alpha[v_1, ..., v_k] = w[df_\alpha(v_1), ..., df_\alpha(v_k)] \tag{1.3}$$

con $v_1, ..., v_k \in R^n$.

Osservazione 1.2.6. La rappresentazione di una k-forma in un insieme

$$V \subseteq f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta)$$

dove $(U_\alpha, f_\alpha), (U_\beta, f_\beta)$ sono elementi della struttura differenziabile di M, dipende dalla parametrizzazione in questo senso

$$w_\alpha = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* w_\beta \tag{1.4}$$

Quindi è possibile estendere le operazioni definite per le k-forme di R^n alle k-forme di M^n, tramite le rappresentazioni locali delle k-forme.

Definizione 1.2.7. *Una k-forma differenziale w, su una varietà differenziabile M, è una k-forma su M, tale che, la sua rappresentazione in qualche sistema di coordinate (quindi in tutti), sia differenziabile.*

Proposizione 1.2.8. *Sia M una varietà di dimensione n compatta e senza bordo, M è orientabile se e solo se esiste una n-forma differenziale w non nulla in tutti i punti di M.*

Dimostrazione. Viene omessa, si veda [7] per la dimostrazione. □

Osservazione 1.2.9. Se M è una varietà e w una n-forma differenziale su M allora $dw = 0$

1.3 Integrazione su una Varietà

Definizione 1.3.1 (Supporto di w)**.**
Sia w una forma differenziale definita in una aperto U di una varietà M. Il supporto K di w è la chiusura dell'insieme[1]*:*

$$A = \{p \in M | w(p) \neq 0\}.$$

Sia M una varietà di dimensione n, compatta ed orientabile, e sia il supporto K di w contenuto in un unico stistema di coordinate $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$.

Definizione 1.3.2. *sia $w_\alpha = a_\alpha(x_1, ..., x_n)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ una n-forma su $K \subset V_\alpha$ allora:*

$$\int_M w = \int_{V_\alpha} w = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 ... dx_n$$

dove l'ultimo è un integrale multiplo di R^n.

La definizione sopra è formalmente corretta grazie alla (1.4) che porta all'indipendenza dal sistema di coordinate scelto per rappresentarlo.
Ora supponiamo che il supporto K di w non sia contenuto in unico sistema di coordinate. Prima di generalizzare l'integrazione su una varietà, è necessario vedere alcuni lemmi e la conseguente proposizione che ne discende da essi.

[1] chiusura di un insieme $A \subseteq X$,con (X, τ) spazio topologico, è il più piccolo chiuso che contiene A, ovvero $\cap_{i \in I} C$ dove $\{C_i\}_{i \in I}$ è l'insieme di tutti i chiusi che contengono A.

Lemma 1.3.3. *Esiste una funzione differenziabile,* $\varphi : B_3^n(0) \longrightarrow R$ *tale che:*

1 $\varphi(p) = 1$ *se* $p \in B_1^n(0)$

2 $\varphi(p) \in (0, 1]$ *se* $p \in B_2^n(0)$

3 $\varphi(p) = 0$ *se* $p \in B_3^n(0) \backslash B_2^n(0)$

Dimostrazione. Viene omessa, si veda [5] per la dimostrazione. □

Lemma 1.3.4. *Data una varietà* M^n *differenziabile,* $p \in M$ *e* $g : U \longrightarrow M$ *una parametrizzazione in un intorno di p, allora esiste una parametrizzazione* $f : B_3^n(0) \longrightarrow R$ *attorno a p, tale che* $f(B_3^n(0)) \subseteq g(U)$*e* $f^{-1}(p) = O_{R^n} = (0, ..., 0)$

Dimostrazione. Viene omessa, si veda [5] per la dimostrazione. □

Proposizione 1.3.5. *Sia* M^n *una varietà compatta e sia* $\{V_\alpha\}$ *un ricoprimento di M di intorni coordinati, allora esistono* $\varphi_1, ..., \varphi_m$ *funzioni differenziabili tali che:*

1 $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$;

2 $0 \leq \varphi_i \leq 1$, *e il supporto di* φ_i *sia contenuto in qualche* V_i *del ricoprimento* $\{V_\alpha\}$;

3 $\cup_{i=1}^m V_i = M$.
Le φ_i *sono dette partizione differenziabile dell'unità subordinata al ricoprimento* $\{V_\alpha\}$.

Dimostrazione.
Sia $p \in M$, consideriamo la parametrizzazione $f_p : B_3(0) \longrightarrow M$ data dal lemma 1.3.4 con $f_p(B_3(0)) = V_p \subset V_\alpha$, per qualche V_α del ricoprimento $\{V_\alpha\}$. Sia $W_p = f_p(B_1(0)) \subset V_p$, la famiglia $\{W_p\}$ è un ricoprimento aperto di M. Dato che M è compatta, allora esistono $(W_1, ..., W_m)$ ricoprimento finito di M e anche i rispettivi $(V_1, ..., V_m)$ costituiranno un ricoprimento di M cioé

$\cup_{i=1}^{m} V_i = M$.
Definiamo ora le funzioni $\theta_i : M \longrightarrow R$ per $i = 1, ..., m$, come segue

$$\theta_i = \begin{cases} \varphi \circ f_i^{-1} & \text{in} \quad V_i \\ 0 & \text{in} \quad M \setminus V_i \end{cases}$$

con $\varphi : B_3(0) \longrightarrow R$ è differenziabile ed è una funzione data dal Lemma 1.3.3. Le funzioni θ_i sono differenziabili e il suo supporto è contenuto in V_i. Definiamo in fine le funzioni φ_i:

$$\varphi_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\sum_{j=1}^{m} \theta_i} \qquad p \in M$$

è immediato verificare che le φ_i così costruite soddisfano le condizioni 1 e 2. □

Definizione 1.3.6. *Sia M^n una varietà compatta e orientabile, e sia $\{V_\alpha\}$ un ricoprimento di M^n dato da sistemi di coordinate. Sia $\{\varphi_i\}_{0<i\leq m}$ una partizione dell'unità differenziabile associata a $\{V_\alpha\}$. Definiamo l'integrale di una n-forma differenziale w in M come:*

$$\int_M w = \sum_{i=1}^{m} \int_M (\varphi_i w)$$

dove $\varphi_i w$ è una forma differenziale con supporto contenuto in qualche V_α.

1.4 Teorema di Stokes

Teorema 1.4.1 (di Stokes)**.** *Sia M^n una varietà differenziabile con bordo, compatta e orientabile, sia w una $(n-1)$-forma differenziale su M, e sia $i : \partial M \longrightarrow M$ l'inclusione del bordo ∂M in M. Allora:*

$$\int_{\partial M} i^* w = \int_M dw \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Sia K il supporto di w.

A) Consideriamo inizialmente il caso in cui il supporto K sia contenuto in qualche intorno coordinato $V = f(U)$ di una parametrizzazione $f : U \subseteq H^n \longrightarrow M$. In U si ha che:

$$w = \sum_{j=1}^{n} a_j dx_1 \wedge ... \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge ... \wedge dx_n$$

dove $a_j = a_j(x_1, ..., x_n)$ sono funzioni differenziabili su U.
Così

$$dw = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

A.1) Assumiamo inizialmente che $f(U) \cap \partial M = \emptyset$. Allora w è zero in ∂M e $i^* w = 0$. Ovvero:

$$\int_{\partial M} i^* w = 0.$$

Mostriamo, che

$$\int_M dw = \int_U \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\frac{\partial a_j}{\partial x_j}) dx_1 ... dx_n = 0$$

per far questo estendiamo le funzioni a_j a H^n ponendo

$$a_j(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} a_j(x_1, ..., x_n) & \text{se} \quad (x_1, ..., x_n) \in U \\ 0 & \text{se} \quad (x_1, ..., x_n) \in H^n \backslash U \end{cases}$$

Dato che $f^{-1}(K) \subset U$, le funzioni a_j così definite sono differenziabili in H^n.
Ora sia $Q \subset H^n$ un parallelepipedo dato da

$$x_j^1 \leq x_j \leq x_j^0 \quad j = 1, ..., n$$

e contenente $f^{-1}(K)$ al suo interno, allora:

$$\int_U \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\frac{\partial a_j}{\partial x_j}) dx_1 ... dx_n = \sum_j (-1)^{j-1} \int_Q (\frac{\partial a_j}{\partial x_j}) dx_1 ... dx_n$$

$$= \sum_j (-1)^{j-1} \int [a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n) -$$

$$-a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n)] dx_1 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n = 0$$

dato che

$$a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n) = a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n) = 0 \quad \forall j.$$

A.2) Assumiamo ora che $f(U) \cap \partial M \neq \emptyset$.

Allora l'inclusione i può esser scritta come: $x_1 = 0$ e $x_j = x_j$. Così, usando l'orientazione indotta sul bordo,

$$i^* w = a_1(0, x_2, ..., x_n) dx_2 \wedge ... \wedge dx_2.$$

Come nel caso precedente, estendiamo le funzioni a_j ad H^n e consideriamo il parallelepipedo $Q \subset H^n$ dato da:

$$x_1^1 \leq x_1 \leq 0, \qquad x_j^1 \leq x_j \leq x_j^0 \quad j = 2, ..., n$$

e tale che l'unione dell'interno di Q con l'iperpiano $x_1 = 0$ contenga $f^{-1}(K)$. Allora:

$$\int_M dw = \sum_j (-1)^{j-1} \int_Q (\frac{\partial a_j}{\partial x_j}) dx_1 ... dx_n$$

$$= \int_Q [a_1(0, x_2..., ..., x_n) - a_1(x_1^1, x_2, ..., x_n)] dx_2 ... dx_n +$$

$$+ \sum_j (-1)^{j-1} \int [a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n) -$$

$$- a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n)] dx_1 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n.$$

Dato che

$$a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, ..., x_n) = a_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, ..., x_n) = 0 \quad \text{per } j = 2, ...n$$

e $a_1(x_1^1, x_2, ..., x_n) = 0$ otteniamo:

$$\int_M dw = \int a_1(0, x_2..., ..., x_n) dx_2 ... dx_n = \int i^* w.$$

B) Consideriamo ora il caso generale.

Sia $\{V_\alpha\}$ un ricoprimento di M di intorni coordinati, numerabile e con un orientazione. Consideriamo $\varphi_1, ..., \varphi_m$ una partizione dell'unità differenziabile subordinata a $\{V_\alpha\}$. Le forme $w_j = \varphi_j w$ per $j = 1, ..., m$ soddisfano le condizioni del caso (A). Inoltre, dato che $\sum_j d\varphi_j = 0$ si ha:

$$\sum w_j = w, \qquad \sum dw_j = dw$$

Pertanto:

$$\int_M dw = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial M} dw_j = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial M} i^* w_j = \int_{\partial M} i^* (\sum_j w_j) = \int_{\partial M} i^* w.$$

$\square$

Capitolo 2

Teoremi del punto fisso

Il primo paragrafo di questo capitolo tratterà la dimostrazione del teorema del punto fisso di Brouwer tramite l'ausilio del Teorema di Stokes.
Il secondo paragrafo sarà dedicato alla generalizzazione dovuta a Kakutani.

2.1 Teorema del punto fisso di Brouwer

Prima di tutto vediamo il teorema dovuto a E. Lima, che permetterà di dimostrare l'esistenza di un punto fisso per le funzioni differenziabili.

Teorema 2.1.1. *Sia M una varietà compatta, orientabile e con bordo ∂M, allora non esiste $g : M \longrightarrow \partial M$ applicazione differenziabile tale che $g_{|\partial M} = Id_{\partial M}$.*

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che esista la suddetta $g : M \to \partial M$ tale che $g_{|\partial M} = Id_{\partial M}$. Dato che M è compatta e orientabile lo è anche il suo bordo ∂M. Allora per la proposizione 1.2.8 esiste una $(n-1)$-forma differenziale w non nulla su tutto ∂M. Per l'osservazione 1.2.9 $dw = 0$, quindi per la (1.2) si ha:

$$d(g^*w) = g^*(dw) = 0$$

allora:

$$0 = \int_M d(g^*w) = \int_{\partial M} i^*g^*w = \int_{\partial M} (g \circ i)^*w = \int_{\partial M} w \neq 0.$$

Infatti la seconda uguaglianza si ha per la (1.5), e dato che per ipotesi w è non nulla su tutto il bordo, allora l'ultimo integrale deve essere diverso da 0. Quindi l'evidente contraddizione conferma l'asserto. □

Teorema 2.1.2 (del punto fisso di Brouwer). *Sia $D^n = \{p \in R^n | \|p\| \leq 1\}$ e $f : D^n \longrightarrow D^n$ continua, allora esiste $x \in D^n$ tale che $f(x) = x$.*

Prima di dare la dimostrazione introduciamo un lemma che consentirà l'approssimazione di una funzione continua con funzioni differenziabili, il lettore è rinviato al [3] per una dimostrazione.

Lemma 2.1.3. *Sia $f : X \longrightarrow X$ una funzione continua da una varietà compatta X in se stessa. Allora esiste una successione di funzioni differenziabili $f_n : X \longrightarrow X$ che converge uniformemente a f.*

Dimostrazione. Dato che f è una funzione continua per il Lemma 2.1.3 esiste una successione $(\tilde{f}_m)$ di funzioni differenziabili, dove ogni funzione $\tilde{f}_m$ della successione va da D^n in se stesso.
Dimostriamo ora l'esistenza del punto fisso per una generica funzione $\tilde{f}$ differenziabile appartenente alla successione $(\tilde{f}_m)$ [1].
Supponiamo per assurdo che $\tilde{f}(x) \neq x \quad \forall x \in D^n$, allora possiamo definire una funzione:

$$g(x) = x + th(x), \quad \text{con} \quad h(x) = \frac{x - \tilde{f}(x)}{\|x - \tilde{f}(x)\|}$$

dove la $h(x)$ è ben definita per ipotesi. La funzione $g(x)$ è la semiretta che passa per i punti x ed $\tilde{f}(x)$ infatti
per $t = 0, \quad g(x) = x$ e per $t = -\|x - \tilde{f}(x)\|, \quad g(x) = \tilde{f}(x)$.
Posto $t = -xh(x) \pm \sqrt{(xh(x))^2 + 1 - \|x\|^2}$, allora $\|g(x)\| = 1$, considerando

[1] È importante ricordare che esiste una dimostrazione alternativa di questo fatto con l'ausilio del teorema della funzione inversa, dovuta a Milnor, si veda [8].

un'unica direzione per t, l'immagine tramite la g così costruita, sta sul bordo S^{n-1} del disco D^n, ed è ben definita in quanto una semiretta interseca in un unico punto il bordo.
Quindi $g : D^n \longrightarrow S^{n-1}$ è una funzione differenziabile che è l'identità sul bordo ∂D. Tale funzione così definita soddisfa alle condizioni del Teorema 2.1.1 che porta quindi ad una contraddizione e permette di concludere che la funzione $\tilde{f}$ differenziabile ammette punto fisso. Essendo $\tilde{f}$ una generica funzione della successione, questo risultato vale per ogni funzione $\tilde{f}_m$ della successione che approssima la funzione f continua, i.e. applicando il teorema di Stokes per ciascuna delle $\tilde{f}_m$, si ha che esiste $x_m \in D$ tale che $\tilde{f}_m(x_m) = x_m$, quindi la successione di funzioni $(\tilde{f}_m)$ determina una successione di punti fissi (x_m). Per il Lemma 2.1.3 si ha:

$$(\tilde{f}_m) \to f \tag{2.1}$$

ed essendo D compatto, esiste una sottosuccessione (x_{m_k}) di (x_m) convergente ad un punto di D, sia x tale punto cioè

$$(x_{m_k}) \to x, \quad x \in D \tag{2.2}$$

per cui si ha $\tilde{f}_{m_k}(x_{m_k}) = x_{m_k}$ quindi per (2.1) e (2.2) si ha che $f(x) = x$.

□

2.2 Teorema del punto fisso di Kakutani

Esiste una generalizzazione del punto fisso di Brouwer sviluppata da Kakutani che ha permesso di ottenere importanti risultati nella teoria dei giochi. Le ipotesi del teorema del punto fisso di Kakutani sono formalmente diverse rispetto a quelle poste per il teorema del punto fisso di Brouwer. Infatti se per il teorema del punto fisso di Brouwer abbiamo una funzione continua da D^n in se stesso, per il teorema del punto fisso di Kakutani abbiamo una funzione polidroma F da un poliedro X in se stesso con immagine per ogni $x \in X$ convessa e avente come grafico G_F un sottoinsieme chiuso di $X \times X$.

Analizziamo singolarmente ciascuno degli elementi che costituiscono il punto di partenza per la trattazione del teorema di Kakutani.
Iniziamo con il dare dare la definizione di funzione polidroma.

Definizione 2.2.1. *Dati due insiemi X e Y si definisce* ***funzione polidroma*** *da X in Y una funzione:*

$$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

dove $\mathcal{P}(Y)$ è l'insieme delle parti di Y.

Quindi una funzione polidroma f associa ad ogni $x \in X$ un sottoinsieme non vuoto A di Y, verrà indicata con $f : X \longrightarrow_S Y$.

Definizione 2.2.2. *Il grafico di una funzione polidroma $f : X \longrightarrow_S Y$ è un sottoinsieme di $X \times Y$ dato da*

$$G_f = \{(x, y) | y \in f(x)\}.$$

Un'altra precisazione riguarda la continuità delle funzioni. Infatti a differenza di quanto accade per il teorema di Brouwer, nelle ipotesi del teorema di Kakutani non si fa riferimento diretto alla continuità, ma ad una proprietà di chiusura ad essa legata. Pertanto diamo la seguente

Definizione 2.2.3. *Una funzione polidroma $f : X \longrightarrow_S Y$ è detta continua se il suo grafico G_f è un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$.*

La continuità delle funzioni polidrome è utile per la convergenza delle successioni.

Lemma 2.2.4. *Data una funzione polidroma $f : X \longrightarrow_S Y$ continua, se (x_n) è una successione in X convergente ad un punto $x_0 \in X$ e (y_n) è una successione in Y convergente ad un punto $y_0 \in Y$ tale che $y_n \in f(x_n)$ per ogni n, allora $y_0 \in f(x_0)$.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione $((x, y)_n)$ in $X \times Y$ dove ogni elemento $(x, y)_n = (x_n, y_n)$. Dato che $y_n \in f(x_n)$, la successione $((x, y)_n)$

appartiene a G_f (grafico della funzione f). Siccome (x_n) converge a x_0 e (y_n) converge a y_0 allora $((x,y)_n)$ converge a (x_0, y_0).
Se esiste un indice N tale che $(x_0, y_0) = (x_N, y_N)$ si ha direttamente che $(x_0, y_0) \in G_f$, in caso contrario se (x_0, y_0) è diverso da ogni elemento della successione $((x,y)_n)$, allora (x_0, y_0) sarà un punto limite dell'insieme $\{(x_n, y_n)\}$ per $n \in Z^+$ perciò è punto limite anche per G_f. Dato che la funzione polidroma è continua si ha che G_f è un chiuso in $X \times Y$, segue che anche in questo caso $(x_0, y_0) \in G_f$. Pertanto in entrambi i casi $y_0 \in f(x_0)$. $\square$

Ora vediamo cosa significa avere punto fisso per una funzione polidroma.

Definizione 2.2.5. *Data una funzione polidroma $f : X \longrightarrow_S Y$, un punto $x^* \in X$ è detto punto fisso per f se $x^* \in f(x^*)$.*

Un'ultima considerazione da fare riguarda il dominio della funzione, infatti esso è un poliedro in R^n, ed è dato dall'intersezione di un numero finito di semispazi definiti nella 1.1.1. Ogni punto di un poliedro X è esprimibile come combinazione lineare dei suoi vertici. Infatti se $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ sono i vertici si un poliedro $X \in R^n$ allora per ogni $\mathbf{y} \in X$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{per} \quad i = 1, ...k.$$

Per poter dimostrazione del teorema del punto fisso di Kakutani abbiamo bisogno di un risultato di approssimazione di una funzione polidroma con una successione di funzioni monodrome.

Lemma 2.2.6. *Sia X un poliedro in R^n e $F : X \longrightarrow_S X$ una funzione polidroma, allora esiste una successione di funzioni monodrome (f_n) tale che approssima F.*

La dimostrazione del lemma per semplicità verrà data in R^2 ma si può facilmente estendere a R^n.

Dimostrazione. Inizialmente consideriamo un triangolo T in R^2 per poi estendere la dimostrazione ad un generico poligono convesso in R^2.

Sia T un triangolo e $F : T \longrightarrow_S T$ una funzione polidroma da T in se stesso. Siano $(\mathbf{v}_0^1, \mathbf{v}_0^2, \mathbf{v}_0^3)$ i tre vertici del triangolo T, prendiamo un particolare punto $\mathbf{y}_0^i \in F(\mathbf{v}_0^i)$ per $i = 1, 2, 3$. Definiamo $f_0 : T \longrightarrow T$ tale che $f_0(\mathbf{v}_0^i) = \mathbf{y}_0^i$. Dato che ogni punto $\mathbf{x} \in T$ si può esprimere come combinazione lineare dei tre vertici cioè $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \lambda_0^i \mathbf{v}_0^i$, possiamo estendere linearmente la f_0 a tutti i punti del triangolo, ovvero per ogni $\mathbf{x} \in T$ associa $f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_0^i \mathbf{y}_0^i$. Tale funzione è monodroma e continua.
Ora per definire la funzione successiva f_1, suddividiamo il triangolo T in quattro triangoli più piccoli, dove i vertici di tali triangoli sono i vertici di T e i punti medi dei lati di T, dati da

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}_0^1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^2, \quad \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^3 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^3.$$

Definiamo quindi $f_1(\mathbf{x})$ in modo analogo a $f_0(\mathbf{x})$. Per ogni vertice $\mathbf{v}$ dei quattro triangoli, scegliamo un particolare $\mathbf{y} \in F(\mathbf{v})$ e definiamo $f_1(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. Allora estendiamo linearmente f_1 su ciascun triangolo. Osserviamo che se $\mathbf{x}$ sta nell'intersezione di due triangoli, allora la definizione $f_1(\mathbf{x})$ è la stessa per entrambi i triangoli, infatti dipende solo dalla definizione di f_1 sui due vertici che risultano essere i punti estremi del bordo che contiene $\mathbf{x}$.
Quindi la funzione f_1 che va da T in se stesso è monodroma e continua. Continuando con questo metodo, assumiamo di aver definito una funzione continua $f_{n-1} : T \longrightarrow T$ dopo aver suddiviso il triangolo T $(n-1)$ volte in triangoli sempre più piccoli. Ora per definire f_n suddividiamo ogni triangolo usato nella definizione di f_{n-1} in sottotriangoli ancora più piccoli. Per ogni vertice $\mathbf{v}$ di ogni sottotriangolo, definiamo $f_n(\mathbf{v})$ come il particolare punto scelto tra i punti appartenenti a $F(\mathbf{v})$ e infine estendiamo linearmente f_n su ciascun sottotriangolo della suddivisione per ottenere una funzione continua monodroma $f_n : T \longrightarrow T$. La successione di funzioni (f_n) così costruita approssima la funzione F.
Per provare l'esistenza di una tale successione su un poligono convesso P del piano per una funzione polidroma $F : P \longrightarrow_S P$, il procedimento è sostanzialmente lo stesso ma inizialmente si suddivide P in tanti triangoli quanti sono i suoi lati. La prima funzione approssimante f_0 è inizialmente definita nei

vertici di tali triangoli e si estende linearmente su tutti i punti dei triangoli dati, così come è stato fatto nel precedente metodo per il triangolo T. Analogamente quindi si definiscono le n funzioni della successione approssimante, suddividendo ad ogni passaggio successivo ogni triangolo considerato nel passaggio precedente, definendo la f_n nei vertici dei nuovi triangoli considerati e estendendo linearmente la definizione di f_n su ognuno di questi triangoli. La successione di funzioni così costruita approssima la funzione polidroma F. □

Teorema 2.2.7. *Sia X un poliedro in R^n e $F : X \longrightarrow_S X$ una funzione polidroma continua, tale che $F(\mathbf{x})$ sia un sottoinsieme convesso di X per ogni $\mathbf{x} \in X$, allora esiste $\mathbf{x}^* \in X$ tale che $\mathbf{x}^* \in F(\mathbf{x}^*)$.*

Dimostrazione. Sia X un poliedro in R^n e siano $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ i vertici di X. Per il Lemma 2.2.6 la funzione polidroma $F : X \longrightarrow_S X$ ammette una successione (f_n) di funzioni monodrome continue da X in se stesso che la approssima. Per il teorema del punto fisso di Brouwer, ogni funzione della successione ammette punto fisso, cioè per ogni f_n della successione (f_n) esiste $\mathbf{x}_n \in X_n$, tale che

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=1}^{m} \lambda_n^k \mathbf{v}_n^k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_n^k \mathbf{y}_n^k = f_n(\mathbf{x}_n) \tag{2.3}$$

dove $X_n \subset X$ è un sotto-poliedro contenuto in X dell'n-esima suddivisione del dominio necessaria per costruire la successione (f_n).
Quindi la successione di funzioni (f_n) definisce una successione di punti fissi $(\mathbf{x}_n)$. Essendo X un sottoinsieme compatto in R^n, la successione $(\mathbf{x}_n)$ ammette una sottosuccessione convergente $(\mathbf{x}_{j_n})$. Sia $\mathbf{x}^*$ il punto limite della sottosuccessione, mostriamo che $\mathbf{x}^*$ è punto fisso per F.
Dato che le lunghezze dei lati dei sotto-poliedri $X_n \subset X$ tendono a zero per n che tende ad infinito, alla successione costruita da un punto di ogni sotto-poliedro X_{j_n} deve convergere a $\mathbf{x}^*$, quindi la sottosuccessione di punti fissi $(\mathbf{x}_{j_n})$ e le corrispondenti successioni di vertici $(\mathbf{v}_{j_n}^1), ..., (\mathbf{v}_{j_n}^m)$ convergono a $\mathbf{x}^*$.
Dato che $[0, 1]$ è un compatto in R, le successione $(\lambda_n^1), ..., (\lambda_n^m)$ ammet-

tono sottosuccessioni $(\lambda^1_{j_n}), ..., (\lambda^m_{j_n})$ convergenti rispettivamente a $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Analogamente si hanno le sottosuccessioni $(\mathbf{y}^1_{j_n}), ..., (\mathbf{y}^m_{j_n})$ convergenti rispettivamente a $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m$.
Per j_n che tende a infinito, dall'equazione (2.3) si ha che

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathbf{y}_k. \tag{2.4}$$

Inoltre $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, e $\lambda_1, ..., \lambda_m \in [0, 1]$. Pertanto $\mathbf{x}^*$ è un punto del poliedro con vertici $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m$. Dato che per ipotesi F è continua per il Lemma 2.2.4 abbiamo che $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m \in F(\mathbf{x}^*)$. Quindi per l'equazione (2.4) e dato che $F(\mathbf{x}^*)$ è convesso, si ha che anche $\mathbf{x}^* \in F(\mathbf{x}^*)$. □

Il teorema del punto fisso di Brouwer è un caso particolare del teorema del punto fisso di Kakutani, infatti se vediamo il dominio del teorema del punto fisso di Brouwer come un poliedro, cioè consideriamo un cubo $\mathbf{P}^n$ di dimensione n:

$$\mathbf{P}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in R^n | -1 \leq x_i \leq 1, \text{ per } i = 1, ..., n\}.$$

$\mathbf{P}^n$ è un poliedro ed è omeomorfo al disco D^n. La funzione monodroma continua $f : \mathbf{P}^n \longrightarrow \mathbf{P}^n$ può esser vista come una funzione polidroma continua che ad ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{P}^n$ associa il singoletto $\{f(\mathbf{x})\}$. Il dominio di f è un poliedro compatto, $\{f(\mathbf{x})\}$ è un sottoinsieme non vuoto convesso contenuto nel dominio. Quindi per il teorema del punto fisso di Kakutani esiste $\mathbf{x} \in \mathbf{P}^n$ tale che $\mathbf{x} \in \{f(\mathbf{x})\}$ e pertanto $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$.

Osservazione 2.2.8. Il teorema del punto fisso di Kakutani pur essendo una generalizzazione non può sostituire il teorema del punto fisso di Brouwer in quanto quest'ultimo viene usato, come abbiamo visto, nella dimostrazione del teorema del punto fisso di Kakutani.

Capitolo 3

Applicazioni

3.1 Equilibrio Economico

In questo paragrafo vedremo come il teorema del punto fisso di Brouwer può dimostrare l'esistenza di equilibri in economia.
Ciò che è noto in economia è che il prezzo dei beni varia al variare della domanda e dell'offerta. Vogliamo mostrare che esiste almeno una selezione di prezzi che bilancia la domanda e l'offerta, cioè almeno un punto di equilibrio dove i prezzi sono stabili e tutti i negoziatori non sono portati né a cedere né ad acquistare alcun bene, perché nessun prezzo diventa più conveniente. Dimostreremo che un tale punto di equilibrio è un punto fisso di un'opportuna funzione che ci dice come la domanda influenza il cambiamento dei prezzi. Descriviamo ora tutti gli elementi necessari per poter definire tale funzione.

Definizione 3.1.1. *Dato un insieme di beni* $(1, 2, ..., m)$ *si definisce* ***vettore offerta*** *il vettore:*

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, ..., S_m)$$

dove S_j *rappresenta la quantità, in euro, del singolo bene.*

Supponiamo che il vettore offerta $\mathbf{S}$ sia costante, cioè i beni non si consumino né ne vengano prodotti degli altri.

Definizione 3.1.2. *Sia n il numero dei negoziatori coinvolti in questa economia; si definisce* ***pacchetto di beni*** *dell'i-esimo negoziatore il vettore:*

$$\mathbf{b}^i = (b_1^i, ..., b_m^i)$$

dove b_j^i è la j-esima quantità di bene posseduta dall'i-esimo negoziatore, ossia la sua j-esima offerta, tale che la somma dei $\mathbf{b}^i$ per $i = 1, ..., m$ sia $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}^i$$

Ogni singolo negoziatore è interessato ad una particolare pacchetto di beni, in relazione all'andamento dei prezzi.

Definizione 3.1.3. *Dato un insieme di beni $(1, 2, ..., m)$ si definisce* ***vettore prezzo***

$$\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_1, ..., \bar{p}_m)$$

dove $\bar{p}_j$ rappresenta il prezzo del j-esimo bene.

L'economia che tratteremo è basata sullo scambio di beni tra gli n negoziatori. Quindi il prezzo di un singolo bene non ha particolare rilevanza, ciò che è importante in tale economia è il rapporto tra i prezzi dei beni soggetti allo scambio. Pertanto normalizziamo il vettore prezzo $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_1, ..., \bar{p}_m)$, cioè consideriamo un nuovo vettore $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)$ dove le componenti sono date da:

$$p_j = \frac{\bar{p}_j}{\sum_j \bar{p}_j} \qquad \text{per} \quad j = 1, ..., m$$

e tale che

$$\sum_j p_j = 1. \tag{3.1}$$

Inoltre è importante notare che i singoli beni hanno sempre un prezzo non negativo, ovvero $p_j \geq 0$ e sono nulli solo se per essi è nulla la domanda.
Se ci limitiamo a considerare un'economia di tre beni, il vettore prezzo diventa $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, l'equazione (3.1) diventa $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ e definisce un piano in R^3. Essendo $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0$ tale piano è limitato al primo ottante dello spazio e descrive un triangolo T che corrisponde all'insieme di tutti i possibili vettori prezzo $\mathbf{p}$.

Definizione 3.1.4. *Dato l'insieme dei possibili vettori prezzo T, si definisce* ***ricchezza*** *dell'i-esimo negoziatore in possesso del pacchetto di beni $\mathbf{b}^i$ come la funzione*

$$\begin{aligned} w^i : T &\longrightarrow R \\ \mathbf{p} &\longmapsto w^i(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}^i. \end{aligned}$$

Dalla definizione sopra quindi la ricchezza varia al variare del prezzo per una certa combinazione di beni.

Definizione 3.1.5. *Dato l'insieme dei possibili vettori prezzo T, si definisce* ***vettore domanda*** *dell'i-esimo negoziatore il vettore*

$$\mathbf{d}^i(\mathbf{p}) = (d_1^i(\mathbf{p}), ..., d_m^i(\mathbf{p}))$$

le cui componenti $d_j^i(\mathbf{p})$ sono in funzione del prezzo.

La domanda $\mathbf{d}^i(\mathbf{p})$ rappresenta l'ottimale pacchetto di beni dell'i-esimo negoziatore per un dato vettore prezzo $\mathbf{p}$.
Se l'i-esimo negoziatore spende tutta la sua ricchezza per cambiare il pacchetto di beni $\mathbf{b}^i$ con la domanda $\mathbf{d}^i(\mathbf{p})$ allora segue che:

$$w^i(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}^i(\mathbf{p}), \tag{3.2}$$

per un dato vettore prezzo.
La somma delle domande $\mathbf{d}^i(\mathbf{p})$ per $i = 1, ..., n$ produce un vettore domanda $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ per l'intera economia

$$\mathbf{D}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}^i(\mathbf{p}).$$

$\mathbf{D}(\mathbf{p})$ per $\mathbf{p} \in T$ è una funzione vettoriale continua cioè per una piccola variazione di prezzo si ha una piccola variazione di $\mathbf{D}(\mathbf{p})$.
Dato che la ricchezza del singolo negoziatore è data da (3.2), possiamo considerare la ricchezza totale dell'intera comunità per un dato prezzo come

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}^i(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}.$$

Questo ci porta alla **legge di Walras**:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}.$$

Se la coordinata del vettore domanda che corrisponde ad un particolare bene è maggiore della rispettiva coordinata del vettore offerta, significa che per quel bene ad un dato prezzo la domanda è superiore all'offerta. In questa circostanza il prezzo di tale bene tende a salire.
Se per una particolare combinazione di prezzi ciascun negoziatore può raggiungere la sua scelta ottimale di beni allora l'economia è in equilibrio.

Definizione 3.1.6. $\mathbf{p}$ *è detto vettore* ***prezzo di equilibrio*** *se* $D_j(\mathbf{p}) \leq S_j$ *per* $j = 1, .., m$

Definizione 3.1.7. *Il vettore* ***eccesso di domanda*** *è definito da*

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \mathbf{D}(\mathbf{p}) - \mathbf{S}$$

Se una coordinata di $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ è positiva vuol dire che c'è più domanda che offerta per un determinato bene, cioè i negoziatori desiderano avere, di un dato bene, una quantità maggiore rispetto a quella disponibile. Da $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ è possibile ottenere una seconda forma della **legge di Walras** cioè

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{p}) = 0. \tag{3.3}$$

Siamo ora in grado di costruire una funzione per dimostrare l'esistenza di un punto di equilibrio.
Sia $f^* : T \longrightarrow R^3$ una funzione tale che per ogni $\mathbf{p} \in T$ associa $f^*(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{E}(\mathbf{p})$. Questa funzione che descrive come i prezzi variano in relazione all'eccesso di domanda, non soddisfa tuttavia le condizioni per potervi applicare il teorema del punto fisso di Brouwer, dobbiamo infatti fare in modo che tutte le componenti di tutti i vettori $f^*(\mathbf{p})$ siano non negative e abbiano come somma 1.
Definiamo quindi una funzione continua $f : T \longrightarrow T$ come

$$f(\mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{E}(\mathbf{p}))^+}{\beta(\mathbf{p})}$$

dove il numeratore $(\mathbf{p}+\mathbf{E}(\mathbf{p}))^+$ sono tutti i vettori $f^*(\mathbf{p})$ con tutte le componenti rese non negative, cioè ponendo uguali a zero tutte le componenti negatve, invece in denominatore $\beta(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{3}(\mathbf{p}+\mathbf{E}(\mathbf{p}))_j^+$.
Dato che f è una funzione continua da T in se stesso ed è omeomorfo ad un disco D, per il teorema del punto fisso di Brouwer ci deve essere un vettore prezzo $\mathbf{p}^*$ tale che $f(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$.

Teorema 3.1.8. *I punti fissi della funzione f corrispondono ai vettori prezzo di equilibrio.*

Prima di poter dimostrare il teorema sopra enunciato abbiamo bisogno del seguente Lemma.

Lemma 3.1.9. *Se $\mathbf{p}^*$ è punto fisso di f, allora $\beta(\mathbf{p}^*) = 1$.*

Dimostrazione. Dato che $\mathbf{p}^*$ è punto fisso di f, abbiamo

$$f(\mathbf{p}^*) = \frac{(\mathbf{p}^*+\mathbf{E}(\mathbf{p}^*))^+}{\beta(\mathbf{p}^*)} = \mathbf{p}^*. \tag{3.4}$$

Questo implica che, per $j = 1, 2, 3$,

$$(\mathbf{p}^*+\mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_j^+ = \beta(\mathbf{p}^*)p_j^*. \tag{3.5}$$

Sia α un indice (uguale a $1, 2$ oppure 3) tale che $p_\alpha^* > 0$. Un tale α esiste dato che la somma delle entrate di $\mathbf{p}^*$ è 1 per la (3.1). Dato che $\beta(\mathbf{p}^*) > 0$, segue dall'equazione (3.5) che

$$(\mathbf{p}^*+\mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_\alpha^+ > 0.$$

Pertanto

$$(\mathbf{p}^*+\mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_\alpha^+ = (\mathbf{p}^*+\mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_\alpha.$$

Unendo l'equazione appena data con la (3.5), abbiamo

$$(\mathbf{p}^*+\mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_\alpha = \beta(\mathbf{p}^*)p_\alpha^*,$$

da cui

$$E_\alpha(\mathbf{p}^*) = (\beta(\mathbf{p}^*)-1)p_\alpha^*.$$

Moltiplicando ambo i membri per p^*_α, otteniamo

$$p^*_\alpha E_\alpha(\mathbf{p}^*) = (\beta(\mathbf{p}^*) - 1)p^*_\alpha p^*_\alpha. \tag{3.6}$$

Nonostante l'equazione (3.6) è stata ottenuta assumendo $p_\alpha > 0$, continua a valere per $p^*_\alpha = 0$ infatti si riduce a $0 = 0$.
Pertanto, dato che p^*_α è non negativa, l'equazione (3.6) è valida per ogni p^*_j.
Ora, sommando l'equazione (3.6) per ogni j, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{p}^*) &= \sum_{j=1}^{3} p^*_j E_j(\mathbf{p}^*) \\
&= \sum_{j=1}^{3} (\beta(\mathbf{p}^*) - 1)p^*_j p^*_j \\
&= (\beta(\mathbf{p}^*) - 1) \sum_{j=1}^{3} p^*_j p^*_j \\
&= (\beta(\mathbf{p}^*) - 1)\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^*.
\end{aligned}$$

Dalla seconda forma della legge di Walras (3.3), abbiamo che

$$0 = (\beta(\mathbf{p}^*) - 1)\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^*,$$

dato che $\mathbf{p}^* \in T$, segue che $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^* = 1$. Pertanto, deve aversi che $\beta(\mathbf{p}^*) - 1 = 0$, e quindi $\beta(\mathbf{p}^*) = 1$, come voluto. □

Dimostrazione. (Teorema). Sia $\mathbf{p}^*$ un punto fisso per f. Dato che $\beta(\mathbf{p}^*) = 1$, l'equazione (3.4) diventa

$$f(\mathbf{p}^*) = (\mathbf{p}^* + \mathbf{E}(\mathbf{p}^*))^+ = \mathbf{p}^*,$$

si avranno quindi tre equazioni, una per ogni componente j:

$$(\mathbf{p}^* + \mathbf{E}(\mathbf{p}^*))^+_j = p^*_j. \tag{3.7}$$

Le componenti del vettore prezzo p^*_j possono essere $p^*_j \geq 0$. Se $p^*_j = 0$, allora $(\mathbf{p}^* + \mathbf{E}(\mathbf{p}^*))^+_j = 0$. Pertanto $E_j(\mathbf{p}^*)^+ = 0$, questo vuol dire che $E_j(\mathbf{p}^*) \leq 0$.

Questo significa che non c'è eccesso di domanda per il j-esimo bene. Se $p_j^* > 0$, dall'equazione (3.7), si ha che $(\mathbf{p}^* + \mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_j^+ > 0$. Pertanto,

$$(\mathbf{p}^* + \mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_j^+ = (\mathbf{p}^* + \mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_j.$$

Sostituendo nuovamente nell'equazione (3.7) si ha $(\mathbf{p}^* + \mathbf{E}(\mathbf{p}^*))_j = p_j^*$, pertanto $E_j(\mathbf{p}^*) = 0$, quindi $E_j(\mathbf{p}^*) \leq 0$ per ogni j. Ne segue che $D_j(\mathbf{p}^*) \leq S_j$ per ogni j e $\mathbf{p}^*$ è un vettore prezzo di equilibrio. □

Tutto quello che abbiamo visto non dipende dal numero dei negoziatori coinvolti in questa economia, di conseguenza si può facilmente estendere quanto detto al caso generale e poter applicare quindi il teorema del punto fisso di Brouwer in dimensione n.

3.2 Equilibrio di Nash

In questa sezione applicheremo il teorema del punto fisso di Kakutani per dimostrare l'esistenza di un punto di equilibrio in un gioco, detto equilibrio di Nash.
Supponiamo che in un gioco con n partecipanti, ciascuno possa attuare ad ogni turno una particolare strategia di gioco, con lo scopo di ottenere il massimo guadagno. L'equilibrio di Nash corrisponde alla situazione in cui tutti i giocatori raggiungono il miglior risultato possibile. Definendo un'opportuna F funzione delle strategie adottate dai giocatori arriviamo a dimostrare che un punto fisso di una tale F corrisponde al punto di equilibrio di Nash, ossia ad una particolare combinazione di strategie che porta tutti i giocatori a massimizzare il proprio guadagno.
Nonostante questo valga per n giocatori ci limitiamo, per semplificare le notazioni, a considerarne solo tre, che indicheremo con E, G ed N.
Diamo ora le definizioni degli elementi necessari per la trattazione.

Definizione 3.2.1. *Siano E, G ed N tre giocatori si definiscono* ***strategie miste*** *i vettori*

$$\mathbf{p} = (p_1, ..., p_{n_E}), \quad \mathbf{q} = (q_1, ..., q_{n_G}), \quad \mathbf{r} = (r_1, ..., r_{n_G})$$

dove p_i per $i = 1, ..., n_E$, q_j per $j = 1, ..., n_G$ e r_k per $k = 1, ..., n_G$ sono le probabilità per E,G e N di effettuare rispettivamente la mossa i, la mossa j e la mossa k ad un dato turno.

Osservazione 3.2.2. Basandoci sul fatto che i vettori strategie miste sono vettori di probabilità, abbiamo che

$$p_i \geq 0, \quad q_j \geq 0 \quad \text{e} \quad r_k \geq 0 \quad \forall i, j, k \tag{3.8}$$

e

$$\sum_i p_i = 1, \quad \sum_j q_j = 1, \quad \sum_k r_k = 1. \tag{3.9}$$

Chiamiamo **payoff** il guadagno di ogni giocatore per una particolare combinazione di strategie e indichiamo con E_{ijk}, il payoff di E, quando E fa la mossa i, G fa la mossa j ed N fa la mossa k. La probabilità che E ottenga tale payoff è $p_i q_j r_k$. Possiamo quindi calcolare il valore atteso di payoff per E come

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{i,j,k} E_{ijk} p_i q_j r_k.$$

Analogamente si definisce il valore atteso di payoff per N

$$N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{i,j,k} N_{ijk} p_i q_j r_k$$

e per G

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{i,j,k} G_{ijk} p_i q_j r_k.$$

Definizione 3.2.3. *Sia $P(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ l'insieme di tutti i vettori probabilità $\mathbf{p}$, tali che $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \geq E(\mathbf{p}', \mathbf{q}, \mathbf{r})$ su tutte le possibili strategie miste $\mathbf{p}'$, allora $P(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ è detto **insieme ottimale di strategie miste** associato alle strategie miste $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$.*

In modo simile si definiscono $Q(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ insieme ottimale di strategie miste di G, associato alle strategie $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$; $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ insieme ottimale di strategie miste di N, associato alle strategie $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$.

Il valore atteso per E, fissati $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ è un equazione lineare con componenti in $\mathbf{p}$:

$$E(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}) = \sum_i (\sum_{j,k} E_{ijk} q_j r_k) p_i \tag{3.10}$$

Posto $a_i = \sum_{j,k} E_{ijk} q_j r_k$ l'equazione (3.10) diventa

$$E(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_E} a_i p_i \tag{3.11}$$

Dall'equazione (3.11) si determina l'insieme delle strategie miste ottimali per $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ fissati come:

$$P(\mathbf{q},\mathbf{r}) = \left\{ \mathbf{p} | \sum_i p_i = 1 \text{ e } p_i = 0 \text{ se } a_i < \max_j \{a_j\} \right\}.$$

Cioè i vettori strategie miste di $P(\mathbf{q},\mathbf{r})$ sono vettori che hanno componenti nulle se i coefficienti a_i dell'equazione (3.11) hanno valore minore del $\max_j\{a_j\}$.
Quindi, se E sceglie una strategia ottimale mista $\mathbf{p}$, in risposta alle strategie miste $\mathbf{q}$ di G e $\mathbf{r}$ di N, allora G potrebbe decidere di cambiare la propria strategia mista per una ottimale, dato che E ed N hanno scelto le proprie strategie miste $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$. Allo stesso modo N potrebbe decidere di cambiare la propria.

Definizione 3.2.4. *I vettori strategie miste* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *ed* $\mathbf{r}$ *si dice che risolvono il gioco se* $\mathbf{p} \in P(\mathbf{q},\mathbf{r})$, $\mathbf{q} \in Q(\mathbf{p},\mathbf{r})$ *e* $\mathbf{r} \in R(\mathbf{p},\mathbf{q})$; $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *ed* $\mathbf{r}$ *sono detti* ***equilibrio di Nash****.*

Nell'equilibrio $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ed $\mathbf{r}$ nessun giocatore è portato a voler modificare la propria strategia di gioco; e porta ogni giocatore al valore massimo di payoff, relativo alla strategia scelta dagli altri giocatori.

Teorema 3.2.5. *Esiste un equilibrio di Nash per ogni gioco con n giocatori.*

Dimostrazione. presentiamo la dimostrazione per un gioco di tre persone per rendere semplice la notazione, ma la stessa dimostrazione vale per un gioco di n persone. Dati i tre vettori payoff E_{ijk} , G_{ijk}, N_{ijk}, vogliamo dimostrare che c'è un insieme di strategie miste $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ e $\mathbf{r}^*$ che risolve il gioco. Sia $m = n_E + n_G + n_N$. Per una scelta di vettori strategia $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_{n_E})$, $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_{n_G})$, $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_{n_G})$ scegliamo un m-vettore, concatenando le componenti di tali vettori come segue:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = (p_1, ..., p_{n_E}, q_1, ..., q_{n_G}, r_1, ..., r_{n_N})$$

ognuno di questi vettori $\mathbf{w}$ rappresenta una certa combinazione delle strategie miste di ogni giocatore. Le sue componenti devono soddisfare le disuguaglianze (3.8) e le equazioni (3.9). Segue quindi che l'insieme dei possibili vettori $\mathbf{w}$ è un poliedro X in R^m.
Definiamo una funzione polidroma in X data da:

$$F(\mathbf{w}) = F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \{(\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}')|\mathbf{p}' \in P(\mathbf{q}, \mathbf{r}), \mathbf{q}' \in Q(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{r}' \in R(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$$

Ora Se mostriamo che esiste un $\mathbf{w}^*$ tale che $\mathbf{w}^* \in F(\mathbf{w}^*)$ allora abbiamo dimostrato il teorema, perché un tale vettore $\mathbf{w}^* = (\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{r}^*)$ è costituito da tre vettori $\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$ e $\mathbf{r}^*$ tali che $\mathbf{p}^* \in P(\mathbf{q}^*, \mathbf{r}^*), \mathbf{q}^* \in Q(\mathbf{p}^*, \mathbf{r}^*)$ e $\mathbf{r}^* \in R(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$. Quindi, dobbiamo dimostrare che la funzione $F : X \longrightarrow_S X$ ha un punto fisso. Vediamo che il teorema di Kakutani si applica alla F. È stato osservato precedentemente che X è un poliedro in R^m. Dato che $P(\mathbf{q}, \mathbf{r}), Q(\mathbf{p}, \mathbf{r}), R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ sono insiemi convessi, allora lo deve essere $F(\mathbf{w})$. Quindi dobbiamo solo mostrare che il grafico di G_F della funzione F è un sottoinsieme chiuso di $X \times X \subset R^{2m}$. Sia $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ un punto limite per G_F. Per ogni intero positivo i, si scelga un punto $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ nell'intersezione di G_F con un disco di raggio $\frac{1}{i}$ centrato in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. In questo modo si determina una successione di punti $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ in G_F convergenti a $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.
Siano $\mathbf{x}_i = (\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i)$, $\mathbf{y}_i = (\mathbf{s}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{u}_i)$, $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0)$ e $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{s}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{u}_0)$. Allora si hanno le seguenti successioni convergenti :
$(\mathbf{p}_i) \to \mathbf{p}_0$, $(\mathbf{q}_i) \to \mathbf{q}_0$, $(\mathbf{r}_i) \to \mathbf{r}_0$, $(\mathbf{s}_i) \to \mathbf{s}_0$, $(\mathbf{t}_i) \to \mathbf{t}_0$ e $(\mathbf{u}_i) \to \mathbf{u}_0$.
Si noti che $\mathbf{y}_i \in F(\mathbf{x}_i)$ per ogni i. Pertanto $\mathbf{s}_i \in P(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i)$, $\mathbf{t}_i \in Q(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i)$,

$\mathbf{u}_i \in R(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$. Quindi, per tutti i $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$ e $\mathbf{r}'$, abbiamo:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{s}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) &\geq E(\mathbf{p}', \mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) \\ G(\mathbf{p}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_i) &\geq G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}', \mathbf{r}_i) \\ N(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{u}_i) &\geq N(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Dato che E, G e N sono funzioni continue, queste disuguaglianze contengono il limite per i che tende ad infinito. Questo implica che

$$\begin{aligned} E(\mathbf{s}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0) &\geq E(\mathbf{p}', \mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0) \\ G(\mathbf{p}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{r}_0) &\geq G(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}', \mathbf{r}_0) \\ N(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0) &\geq N(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Pertanto $\mathbf{s}_0 \in P(\mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0)$, $\mathbf{t}_0 \in Q(\mathbf{p}_0, \mathbf{r}_0)$, $\mathbf{u}_0 \in R(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$. Così $\mathbf{y}_0 \in F(\mathbf{x}_0)$ implica che $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ sta nel grafico di F. Segue che il grafico G_F è un chiuso. Quindi per il teorema di Kakutani esiste $\mathbf{w}^*$ tale che $\mathbf{w}^* \in F(\mathbf{w}^*)$, come volevamo. $\square$

Bibliografia

[1] Articolo: Colin Adams Robert Franzosa, Introduction to Topology Pure and Applied, PEARSON,India (2009).

[2] Manfredo P. Do Carmo, Diferential forms and Applications , Springer-Verlag, Berlin-New York, (1994).

[3] Andrea Loi, Appunti di Topologia Algebrica, (2012).

[4] lb Madsen and Jorgen Tornehave, From Calculus to Cohomology, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, **A**, 224-225 (1997).

[5] Manfredo P. Do Carmo, Diferential forms and Applications , Springer-Verlag, Berlin-New York, **4**, 57-59, (1994).

[6] Manfredo P. Do Carmo, Diferential forms and Applications , Springer-Verlag, Berlin-New York, **4**, 62-63, (1994).

[7] Manfredo P. Do Carmo, Diferential forms and Applications , Springer-Verlag, Berlin-New York, **4**, 74, (1994).

[8] John Milnor, American Mathematical Monthly, Vol **85**, No. 7, Mathematical Association of America, 521-524, (1978).