IL TEOREMA DI IMMERSIONE ISOMETRICA DI JOHN NASH

webpage: loi.sc.unica.it

ASPETTI TOPOLOGICI

V varietà differenziabile di dimensione n

$$\boxed{C^r(V,\mathbb{R}^q) = \{f : V \to \mathbb{R}^q \text{ di classe } C^r\}}$$

$$\boxed{C^\infty(V,\mathbb{R}^q) = \{f : V \to \mathbb{R}^q \text{ di classe } C^\infty\}}$$

$$\boxed{\mathrm{Imm}_r(V,\mathbb{R}^q) = \{\text{immersioni } f : V \to \mathbb{R}^q \text{ di classe } C^r\}}$$

$$\boxed{\mathrm{Imm}(V,\mathbb{R}^q) = \{\text{immersioni } f : V \to \mathbb{R}^q \text{ di classe } C^\infty\}}$$

$$\boxed{\mathrm{Emb}_r(V,\mathbb{R}^q) = \{\text{embeddings } f : V \to \mathbb{R}^q \text{ di classe } C^r\}}$$

$$\boxed{\mathrm{Emb}(V,\mathbb{R}^q) = \{\text{embeddings } f : V \to \mathbb{R}^q \text{ di classe } C^\infty\}}$$

$C^r(V,\mathbb{R}^q), r \geq \infty$ sarà munito della topologia fine o di Whitney.

Teorema(Whitney, Ann. of Math. 45, 1944):

$$\forall\ V^n\ \exists\ \ w_1 \in \mathrm{Imm}(V,\mathbb{R}^{2n-1})\ , w_2 \in \mathrm{Emb}(V,\mathbb{R}^{2n})$$

ASPETTI METRICI

$$\boxed{\mathrm{Met}_r(V) = \{\text{metriche su } V \text{ di classe } C^r\}}$$

$$\boxed{\mathrm{Met}(V) = \{\text{metriche su } V \text{ di classe } C^\infty\}}$$

$$\boxed{\mathrm{BS}(V) = \{\text{forme bilineari simmetriche } C^\infty \text{ su } V\}}$$

$\mathrm{Met}_r(V)$ e $\mathrm{Met}(V)$ saranno muniti della topologia fine o di Whitney.

Sia V una varietà differenziabile di dimensione n e $g \in \mathrm{Met}_r(V),\ r \geq 0$.

Problema locale: *Sia $v \in V$ un punto fissato. Trovare un intorno U di v, un numero naturale q e $f \in Emb_r(U, \mathbb{R}^q)$ tale che:*

$$g_f =: f^*(g_{eucl}) = g_{|U}.$$

Problema globale: *Trovare un un numero naturale q e $f \in Imm_r(V, \mathbb{R}^q)$ (risp. $f \in Emb_r(V, \mathbb{R}^q)$)*

$$g_f =: f^*(g_{eucl}) = g.$$

tale che:

Domanda: Sia nel problema locale che in quello globale quale è il minimo q?

PRE-NASH

Siano $x_1, \dots x_n$ coordinate locali di V in un intorno di $v \in V$ e $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ i campi coordinati associati allora

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

Sistema di $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ PDE dove

$$f = (f_1, \dots f_q) : V \to \mathbb{R}^q$$

sono le funzioni incognite.

Teorema (Schlaefli (1873)–Janet(1926)–Burstin(1931)): Sia (V, g) una varietà Riemanniana analitica e sia $v \in V$. Allora esiste un intorno U di v e un embedding analitico e isometrico $f : U \to \mathbb{R}^{s_n}$, $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Osservazione: La dimensione dello spazio Euclideo è ottimale.

I RISULTATI DI NASH

Teorema (Nash, Ann. of Math. 60, 1954):
Sia (V^n, g) *una varietà Riemanniana completa,* $g \in Met_0(V)$ *e*

$$f : V \to \mathbb{R}^{n+k}$$

$k \geq 2$ *un embedding* g*-strictly short i.e.*

$$g - g_f > 0.$$

Allora esiste $f_1 \in Emb_1(V, \mathbb{R}^{n+k})$ *tale che* $g_{f_1} = g$*. Inoltre* f_1 *può essere scelto arbitrariamente* C^0*-vicino a* f*.*

Un anno dopo (1955) N. Kuiper dimostra il teorema precedente con $k \geq 1$.

Osservazione: Il disco con la metrica iperbolica può essere embedded in modo C^1 e isometrico in $\mathbb{R}^3$!!
(*Crocheting the Hyperbolic Plane*, Mathematical Intelligencer, Vol. 23, No. 2, pp. 17-28, Spring 2001. David W. Henderson & Daina Taimi)

Come conseguenza del Teorema di Whitney e del Teorema di Nash–Kuiper otteniamo il seguente:

Corollario: *Una varietà compatta* (V^n, g) *(g metrica* C^∞*) ammette un embedding* C^1 *e isometrico*

$$f : V \to \mathbb{R}^{2n}.$$

Teorema (Nash, Ann. of Math. 63, 1956):
Sia (V^n, g) *una varietà Riemanniana di classe* C^r, $r \geq 3$. *Allora esiste un embedding isometrico di classe* C^r

$$f : (V, g) \to \mathbb{R}^q$$

per $q \geq 3s_n + 4n$, $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

POST-NASH

Teorema (Gromov, Partial Differential Relations, 1986): Una varietà Riemmanniana (V^n, g) di classe C^r con $r \geq 3$ ammette un embedding isometrico in $\mathbb{R}^{s_n+2n+3}$.

Teorema (Günther, Isometric imbeddings of Riemmannian manifold, 1990):
Una varietà Riemmanniana (V^n, g) di classe C^r con $r \geq 3$ ammette un embedding isometrico di classe C^r in $\mathbb{R}^q$, $q = \max(s_n + 2n, s_n + n + 5)$.

Osservazione: Non si sa se una varietà Riemanniana (V, g) di classe C^2 ammette un'immersione locale e C^2 in qualche spazio Euclideo!!!

D'ora in poi ci occuperemo solo del caso di varietà Riemanniane compatte (V, g) di classe C^∞ e applicazioni $f : V \to \mathbb{R}^q$ di classe C^∞.

Alcuni vantaggi di avere V compatta:

- Un'immersione iniettiva C^∞ $f : V \to \mathbb{R}^q$ è necessariamente un embedding;

- La topologia di Whitney su $C^\infty(V, \mathbb{R}^q)$ è quella standard del sup.

Alcuni vantaggi di avere $f : V \to \mathbb{R}^q$ e g di classe C^∞:

- non si "perde" differenziabilità quando si passa da f a g_f.

- Ogni applicazione in $C^r(V, \mathbb{R}^q)$ può essere C^r-approssimata da applicazioni in $C^\infty(V, \mathbb{R}^q)$.

Teorema di Nash nel caso C^∞:
Una varietà Riemanniana compatta (V, g) ammette un embedding isometrico in $\mathbb{R}^{3s_n+4n}$. Cioè esiste un'immersione iniettiva

$$f : V \to \mathbb{R}^q$$

di classe C^∞ tale che

$$g_f = g.$$

Formulazione equivalente:
Consideriamo l'operatore differenziale

$$\mathcal{D} : \mathrm{Imm}(V, \mathbb{R}^q) \to \mathrm{Met}(V),\ f \mapsto g_f.$$

Il Teorema di Nash è equivalente al seguente:

Teorema : *se $q = 3s_n + 4n$ allora $\mathcal{D}$ è suriettivo.*

APPLICAZIONI FREE (z-embeddings)

Un'applicazione $z \in C^\infty(V, \mathbb{R}^q)$ è detta *free* se gli $n + s_n$ vettori in $\mathbb{R}^q$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(v),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(v), \quad i \leq j, \quad i,j = 1 \ldots n$$

sono linearmente indipendenti per ogni $v \in V$ (la definizione non dipende dalla scelta del sistema di coordinate $x_1, \ldots x_n$).

Denotiamo con $\mathrm{Free}(V, \mathbb{R}^q) \subset \mathrm{Imm}(V^n, \mathbb{R}^q)$ ($q \geq s_n + n$) l'insieme delle applicazioni free da V in $\mathbb{R}^q$.

Teorema N1 (IFT per $\mathcal{D}$):
Sia $z \in \mathrm{Free}(V, \mathbb{R}^q)$. Allora esiste un intorno $U^\infty_{g_z} \subset \mathrm{Met}(V)$ tale che per ogni $g' \in U^\infty_{g_z}$ esiste $z' \in \mathrm{Imm}(V, \mathbb{R}^q)$ tale che $g_{z'} = g'$.

Teorema N2 : Se $q \geq s_n + 2n$ allora $\mathrm{Free}(V, \mathbb{R}^q)$ è denso in $C^\infty(V^n, \mathbb{R}^q)$.

APPLICAZIONI FULL E y-EMBEDDINGS

Un embedding $F = (F_1, \dots F_m) : V \to \mathbb{R}^m$ è detto *full* se per ogni $v \in V$ e per ogni sistema di coordinate locali $x_1, \dots x_n$ intorno a v

$$\frac{\partial F_k(v)}{\partial x_i}\frac{\partial F_k(v)}{\partial x_j}, \quad k = 1, \dots m$$

generano lo spazio delle forme bilineari su T_vV.

Denotiamo con $\mathrm{Full}(V, \mathbb{R}^m)$ lo spazio di tutte le $f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^m)$ full.

Teorema N3: Se $m \geq s_n + n$ allora $\mathrm{Full}(V, \mathbb{R}^m)$ è denso in $\mathrm{Imm}(V, \mathbb{R}^m)$.

Teorema N4 (Nash's twist): $\forall F \in \mathrm{Full}(V, \mathbb{R}^m) \cap \mathrm{Imm}(V, \mathbb{R}^m)$ esiste un C^0-intorno $V^0_{g_F}$ di g_F tale che ogni $g \in V^0_{g_F}$ può essere C^∞-approssimata da $g_y \in \mathrm{Met}(V)$, $y \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{2m})$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI NASH

Reassunto ingredienti ((V, g) varietà Riemanniana compatta):

1) $\exists w \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{2n})$ (Whitney).

2) $\forall g' \in \mathrm{Met}(V)$ $\exists f_1 \in \mathrm{Emb}_1(V, \mathbb{R}^{2n})$ tale che $g' = g_{f_1}$ (Nash–Kuiper).

3) $\forall z \in \mathrm{Free}(V, \mathbb{R}^{s_n+2n})$ $\exists U^{\infty}_{g_z} \subset \mathrm{Met}(V)$ tale che $\forall g' \in U_{g_z}$ $\exists z' \in \mathrm{Imm}(V, \mathbb{R}^q)$ tale che $g_{z'} = g'$ (IFT per $\mathcal{D}$).

4) $\underline{\mathrm{Free}(V, \mathbb{R}^{s_n+2n}) \text{ denso in } C^{\infty}(V, \mathbb{R}^{s_n+2n})}$.

5) $\underline{\mathrm{Full}(V, \mathbb{R}^{s_n+n}) \text{ denso in } C^{\infty}(V, \mathbb{R}^{s_n+n})}$.

6) $\forall F \in \mathrm{Full}(V, \mathbb{R}^m) \cap \mathrm{Imm}(V, \mathbb{R}^m)$ esiste un C^0-intorno $V^0_{g_F}$ di g_F tale che ogni $\forall g \in V^0_{g_F}$ esiste una successione $g_{y_j} \in \mathrm{Met}(V)$, $y_j \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{2m})$ tale che $g_{y_j} \to_{C^\infty} g$ (Nash's twist).

Dimostrazione:
Sia $w \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{2n})$ (esiste per **1**)) e $i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{s_n+n}$ l'embedding canonico.

5) applicato a $i \circ w \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{s_n+n}) \Rightarrow \exists F_1 \in \mathrm{Full}(V, \mathbb{R}^{s_n+n}) \cap \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{s_n+n})$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $F = \lambda F_1$ sia g-short, cioè $g - g_F \in \mathrm{Met}(V)$.

Sia $j : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{s_n+2n}$ l'embedding canonico.
2) applicato a $j \circ w \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{s_n+2n}) \Rightarrow$
$\exists f_1 \in \mathrm{Emb}_1(V, \mathbb{R}^{s_n+2n})$ t.c. $g_{f_1} = g - g_F$.

4) $\Rightarrow \exists z_j \in \mathrm{Free}(V, \mathbb{R}^{s_n+2n}) \cap \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^q)$ tale che $z_j \to_{C^1} f_1 \Rightarrow g_{z_j} \to_{C^0} g_{f_1} \Rightarrow g - g_{z_j} \to_{C^0} g_F$ $\Rightarrow \exists z \in \mathrm{Free}(V, \mathbb{R}^{s_n+2n}) \cap \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^q)$ tale che $g - g_z \in V^0_{g_F}$.

6) $\Rightarrow \exists y_j \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{2s_n+2n})$ t.c. $\Rightarrow g_{y_j} \to_{C^\infty} g - g_z$ $\Rightarrow g - g_{y_j} \to_{C^\infty} g_z \Rightarrow \exists y \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{2s_n+2n})$ tale che $g - g_y \in U^\infty_{g_z}$. **3**) $\Rightarrow \exists z' \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{s_n+2n})$ t.c. $g - g_y = g_{z'}$.

$f = (y, z') \in \mathrm{Emb}(V, \mathbb{R}^{2s_n+2n} \oplus \mathbb{R}^{s_n+2n} = \mathbb{R}^{3s_n+4n})$ è t.c. $g_f = g_y + g_{z'} = g$.

DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI N1, N2, N3, N4

La dimostrazione dei Teoremi N2 e N3 si basa sulla teoria dei jets e sul teorema di trasversalità di Thom (vedi B. Andrews, *Notes on the isometric embedding problem and the Nash–Moser implicit function theorem*).

Per la dimostrazione del Teorema N1 rinviamo al libro di Gromov, *Partial Differential Relations*.

Per la dimostrazione del Teorema N4 rinviamo sempre all'articolo sopra citato di B. Andrews.