EMBEDDINGS SIMPLETTICI IN SPAZI DI FORME COMPLESSI

(in collaborazione con Fabio Zuddas)

Giornate di Geometria

Pavia, 13-14 Febbraio 2007

webpage: loi.sc.unica.it

Domanda 1: *Siano* (M, ω) *e* (S, Ω) *due varietà simplettiche di dimensione* $2n$ *e* $2N$*,* $n \leq N$*. Quando esiste un* <u>*embedding*</u> $\Psi : M \to S$*, tale che* $\Psi^*(\Omega) = \omega$*?*

Teorema A (Gromov): Supponiamo che $\dim S \geq \dim M + 4$ e che:

1. esista un embedding $f_0 : M \to S$ tale che $[f_0^*(\Omega)] = [\omega]$;

2. $F_0 = df_0 \sim F_1$ attraverso un'omotopia di omomorfismi iniettivi di fibrati

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{F_t} & TS \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f_0} & S \end{array}$$

tale che $F_1^*(\Omega) = \omega$.

Allora esiste un' isotopia $f_t : M \to S$ tale che $f_1^*(\Omega) = \omega$ (e df_1 è omotopo a F_1 attraverso un'omotopia di omomorfismi simplettici).

$\boxed{\text{Se } (S,\Omega) = (\mathbb{C}^N,\omega_0),\ (\mathbb{C}H^N,\omega_{hyp}),\ (\mathbb{C}P^N,\omega_{FS})}.$

Teorema B (Gromov–Popov): Sia (M,ω) una varietà simplettica contraibile (esatta). Allora esiste N e un embedding simplettico di (M,ω) in $(\mathbb{C}^N,\omega_0)$.

Corollario: Sia (M,ω) una varietà simplettica contraibile (esatta). Allora esiste N e un embedding simplettico di (M,ω) in $(\mathbb{C}H^N,\omega_{hyp})$.

Teorema C (Gromov–Tischler): Sia (M,ω) una varietà simplettica compatta, tale che ω è intera. Allora esiste N e un embedding simplettico di (M,ω) in $(\mathbb{C}P^N,\omega_{FS})$.

Domanda 2: Sia (M^{2n}, ω) una varietà simplettica. Quando esiste un un <u>embedding</u> simplettico di (M, ω) in $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ o in $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$?

Osservazione: per il Teorema di Darboux la domanda precedente ha una risposta affermativa locale.

Theorem D (Gromov): Una varietà simplettica (M, ω) di dimensione $2n$ ammette un' <u>immersione</u> simplettica in $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ se e solo se: a) M è aperta, b) ω è esatta, c) il fibrato tangente (TM, ω) è simpletticamente banale.

Osservazione: il teorema precedente <u>non</u> aiuta a rispondere alla Domanda 2 in quanto esistono strutture simplettiche esotiche.

Assumiamo che (M, ω) sia di Kähler

Teorema E (McDuff): Sia (M, ω) una varietà di Kähler n-dimensionale semplicemente connessa e completa tale che $K_g \leq 0$. Allora esiste un diffeomorfismo $\Psi : M \to \mathbb{R}^{2n}$ tale che $\Psi^*(\omega_0) = \omega$.

$\boxed{\text{Assumiamo } M \subset \mathbb{C}^n \text{ e } \omega \text{ sia } \textit{invariante per rotazioni}}$
cioè $\omega = \omega_\Phi = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi$, dove $\Phi : M \to \mathbb{R}$ dipende solamente da $|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2$.

Quindi , esiste una funzione liscia $\tilde{\Phi} : \tilde{M} \to \mathbb{R}$, definita in

$$\tilde{M} = \{x \in \mathbb{R}^n, |\ x_j = |z_j|^2, z \in M\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$z = (z_1, \ldots z_n), x = (x_1, \ldots x_n).$$

tale che

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = \tilde{\Phi}(x_1, \ldots, x_n).$$

Esempio 0 Sia $M = \mathbb{C}^*$

$$\omega_\Phi = \frac{i}{2}\frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\Phi = \frac{\log^2 |z|^2}{2}.$$

Esempio 1: ω_{hyp} e ω_0 sono invarianti per rotazioni. La restrizioni di ω_{FS} alla carta affine $U_0 = \mathbb{C}^n$ è invariante per rotazioni.

Esempio 2: Consideriamo in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ la forma di Kähler $\omega_\Phi = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi$

$$\Phi(z_1, z_2) = a \log(|z_1|^2 + |z_2|^2) + b(|z_1|^2 + |z_2|^2) + c,$$

$$a, b, c > 0.$$

La metrica g_Φ è usata da Simanca per la costruzione di metriche di Kähler a curvatura scalare costante.

Esempio 3: Consideriamo in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ la forma di Kähler $\omega_\Phi = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi$

$$\Phi = \sqrt{r^4+1} + 2\log r - \log(\sqrt{r^4+1}+1),$$

$$r = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

La metrica g_Φ è usata da Joyce per al costruzione della metrica Eguchi–Hanson.

Esempio 4 (domini di Reinhardt completi in $\mathbb{C}^2$)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ e $F : [0, x_0) \to (0, +\infty)$ una funzione liscia tale che $F^{'}(x) < 0$, $-\left(\frac{xF^{'}}{F}\right)^{'} > 0$.

$$M = D_F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 < x_0,\ |z_2|^2 < F(|z_1|^2)\}$$

$$\omega_\Phi = -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\log(F(|z_1|^2) - |z_2|^2)$$

$$\Phi = -\log(F(|z_1|^2) - |z_2|^2)$$

Esempio 5 (la metrica di Taub–NUT):

$$M = \mathbb{C}^2, \ \omega_m = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi_m$$

$$\Phi_m(u,v) = u^2 + v^2 + m(u^4 + v^4), \ m \geq 0,$$

$$|z_1| = e^{m(u^2-v^2)}u, \ |z_2| = e^{m(v^2-u^2)}v.$$

ω_m è completa e soddisfa $\omega_m \wedge \omega_m = \omega_0 \wedge \omega_0$.

Esempio 6 : le metriche estremali costruite da Calabi dipendono da $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

Esempio 7 : varietà toriche (M, ω) ammettono un aperto denso biolomorfo a $\mathbb{C}^n \subset M$ dove la forma di Kähler è invariante per rotazioni.

Consideriamo applicazioni **speciali** tra domini $M \subset \mathbb{C}^n$ e $S \subset \mathbb{C}^n$

$$\boxed{\Psi : M \to S, z \mapsto (\tilde{\psi}_1(x)z_1, \ldots, \tilde{\psi}_n(x)z_n), \tilde{\psi}_j : \tilde{M} \to \mathbb{R}}$$

$$\tilde{M} = \{x \in \mathbb{R}^n, |\ x_j = |z_j|^2, z \in M\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$z = (z_1, \ldots z_n), x = (x_1, \ldots x_n).$$

Teorema 1 (Loi −Zuddas) Sia (M, ω_Φ), $M \subset \mathbb{C}^n$ come sopra tale che

$$\boxed{M \cap \{z_j = 0\} \neq \emptyset,\ j = 1, \ldots, n}$$

Allora esiste un'immersione simplettica *speciale* $\Psi_0 : (M, \omega_\Phi) \to (\mathbb{C}^n, \omega_0)$ se e solo se,

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} \geq 0, \quad k = 1, \ldots, n}$$

Questa è data da

$$\boxed{\Psi_0(z) = \left(\sqrt{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1}}\ z_1, \cdots, \sqrt{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_n}}\ z_n \right)_{x_i = |z_i|^2}}$$

Se $0 \in M$. Allora Ψ_0 è un simplettomorfismo globale se e solo se

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} > 0, \quad k = 1, \ldots, n}$$

e

$$\boxed{\lim_{x \to \partial M} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j = +\infty}$$

Teorema 2 (Loi–Zuddas) Sia (M, ω_Φ), $M \subset \mathbb{C}^n$ come sopra tale che

$$\boxed{M \cap \{z_j = 0\} \neq \emptyset,\ j = 1, \dots, n}$$

Allora esiste un'immersione simplettica *speciale* $\Psi_{hyp} : (M, \omega_\Phi) \to (\mathbb{C}H^n, \omega_{hyp})$ se e solo se,

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n}$$

Questa è data da

$$\boxed{\Psi_{hyp}(z) = \left(\sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1}}{1 + \sum_k \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}}\ z_1, \dots, \sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_n}}{1 + \sum_k \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}}\ z_n \right)}$$

Se $0 \in M$. Allora Ψ_{hyp} è un simplettomorfismo globale se e solo se

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} > 0, \quad k = 1, \dots, n}$$

e

$$\boxed{\lim_{x \to \partial M} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j = +\infty}$$

Teorema 3 (Loi–Zuddas) Sia (M, ω_Φ), $M \subset \mathbb{C}^n$ come sopra tale che

$$\boxed{M \cap \{z_j = 0\} \neq \emptyset,\ j = 1, \ldots, n}$$

Allora esiste un'immersione simplettica *speciale* $\Psi_{FS} : (M, \omega_\Phi) \to (\mathbb{C}^n, \omega_{FS})$, se e solo se

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} \geq 0, \quad k = 1, \ldots, n \ \text{e} \ \ \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j < 1}$$

Questa è data da

$$\boxed{\Psi_{FS}(z) = \left(\sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1}}{1 - \sum_k \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}}\ z_1, \ldots, \sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_n}}{1 - \sum_k \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}}\ z_n \right)}$$

Se $0 \in M$. Allora Ψ_{FS} è un simplettomorfismo globale (e quindi $i \circ \psi_{FS} : M \to \mathbb{C}P^n$ è un embedding simplettico) se e solo se

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} > 0, \quad k = 1, \ldots, n}$$

e

$$\boxed{\lim_{x \to \partial M} \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j = 1}$$

Domini di Reinhardt completi in $\mathbb{C}^2$

$$D_F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 < x_0,\ |z_2|^2 < F(|z_1|^2)\}$$

$$\Phi = -\log(F(|z_1|^2) - |z_2|^2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} = -\frac{F'(x_1)}{F(x_1) - x_2} > 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} = \frac{1}{F(x_1) - x_2} > 0.$$

Quindi esiste un'immersione simplettica speciale in $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$. Tale immersione è un simplettomorfismo globale se e solo se

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} x_2 = \frac{x_2 - F'(x_1) x_1}{F(x_1) - x_2}$$

tende a $+\infty$ sul bordo di D_F.

La metrica di Taub–NUT:

$$M = \mathbb{C}^2,\ \omega_m = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi_m$$

$$\Phi_m(u,v) = u^2 + v^2 + m(u^4 + v^4),\ \ m \geq 0,$$

$$|z_1| = e^{m(u^2 - v^2)}u,\ \ |z_2| = e^{m(v^2 - u^2)}v.$$

Poniamo $u^2 = U$, $v^2 = V$,

$$\tilde{\Phi}_m(U,V) = U + V + m(U^2 + V^2)$$

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial x_1} = \frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial x_2} = \frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_2},$$

where $x_j = |z_j|^2, j = 1, 2$.

Per calcolare $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ si considera l'applicazione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$G(U,V) = (x_1 = e^{2m(U-V)}U, x_2 = e^{2m(V-U)}V)$$

e la sua matrice Jacobiana

$$J_G = \begin{pmatrix} (1+2mU)\, e^{2m(U-V)} & -2mU\, e^{2m(U-V)} \\ -2mV\, e^{2m(V-U)} & (1+2mV)\, e^{2m(V-U)} \end{pmatrix}.$$

Si ha $detJ_G = 1 + 2m(U+V) \neq 0$ e quindi

$$J_G^{-1} = J_{G^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{(1+2mV)e^{2m(V-U)}}{1+2m(U+V)} & \frac{2mUe^{2m(U-V)}}{1+2m(U+V)} \\ \frac{2mVe^{2m(V-U)}}{1+2m(U+V)} & \frac{(1+2mU)e^{2m(U-V)}}{1+2m(U+V)} \end{pmatrix}.$$

Siccome $J_{G^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_1} = (1 + 2mV)e^{2m(V-U)} > 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_2} = (1 + 2mU)e^{2m(U-V)} > 0,$$

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} (\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_2} x_2) =$$

$$= \lim_{\|x\| \to +\infty} (U + V + 4mUV) = +\infty$$

e quindi $\Psi_0 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ \Psi_0(z_1, z_2) =$

$$= \left((1 + 2mV)^{\frac{1}{2}} e^{m(V-U)} z_1, (1 + 2mU)^{\frac{1}{2}} e^{m(U-V)} z_2 \right)$$

è un simplettomorfismo globale tra $(\mathbb{C}^2, \omega_m)$ e $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$!!.

Teorema 4 (Loi-Zuddas) Se (M, g_Φ) ammette un immersione Kähler in uno spazio di forme complesso allora esiste un'immersione simplettica speciale Ψ_0 di (M, ω_Φ) in $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$, che è un simplettomorfismo globale se e solo se $\lim_{x \to \partial M} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j = +\infty$. Se $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j < 1$ allora esiste un'immersione simplettica Ψ_{FS} di (M, ω_Φ) in $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ che è un embedding se e solo se $\lim_{x \to \partial M} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j = 1$.

Corollario: Se (M, ω) è una varietà torica tale che ω sia proiettivamente indotta. Allora esistono coordinate globali simplettiche su un aperto denso $\mathbb{C}^n \subset M$.

La dimostrazione del Teorema 1, 2, 3 è basata sul seguente lemma.

Lemma: Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ e $S \subset \mathbb{C}^n$ domini dotati di forme di Kähler invarianti per rotazioni ω_Φ e ω_Ξ e sia

$$\Psi : M \to S,$$

$$z \mapsto (\Psi_1(z) = \tilde{\psi}_1(x) z_1, \ldots, \Psi_n(z) = \tilde{\psi}_n(x) z_n),$$

un'applicazione speciale tra di essi.

Allora $\Psi^*(\omega_\Xi) = \omega_\Phi$, se e solo se $\exists c_k \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\tilde{\psi}_k^2 \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} + \frac{c_k}{x_k},\ \ k = 1, \ldots, ,} \qquad (1)$$

dove

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\tilde{\psi}_1^2 x_1, \ldots, \tilde{\psi}_n^2 x_n)}$$

Idea della dimostrazione del lemma

$$\omega_{\Xi} = \frac{i}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}\bar{z}_j z_i + \frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial x_i}\delta_{ij}\right) dz_j \wedge d\bar{z}_i$$

$$\Psi^*(\omega_{\Xi}) = \tfrac{i}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\tilde{\Xi}}{\partial x_i\partial x_j}(\Psi)\Psi_i\bar{\Psi}_j + \frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial x_j}(\Psi)\delta_{ij}\right) d\Psi_j \wedge d\bar{\Psi}_i,$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\Psi) = \frac{\partial^2\tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\tilde{\psi}_1^2 x_1, \ldots, \tilde{\psi}_n^2 x_n).$$

$$\Psi^*(\omega_{\Xi}) = \Psi^*(\omega_{\Xi})_{(2,0)} + \Psi^*(\omega_{\Xi})_{(1,1)} + \Psi^*(\omega_{\Xi})_{(0,2)}$$

Siccome $\Psi_j(z) = \tilde{\psi}_j(|z_1|^2, ..., |z_n|^2)z_j$, si ha:

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial z_k} = \frac{\partial\tilde{\psi}_i}{\partial x_k} z_i \bar{z_k} + \tilde{\psi}_i \delta_{ik}, \;\; \frac{\partial\Psi_i}{\partial \bar{z_k}} = \frac{\partial\tilde{\psi}_i}{\partial x_k} z_k z_i,$$

$$\frac{\partial\bar{\Psi}_i}{\partial \bar{z_k}} = \frac{\partial\tilde{\psi}_i}{\partial x_k} z_k \bar{z_i} + \tilde{\psi}_i \delta_{ik}, \;\; \frac{\partial\bar{\Psi}_i}{\partial z_k} = \frac{\partial\tilde{\psi}_i}{\partial x_k} \bar{z_k}\bar{z_i}.$$

Con un calcolo (molto) lungo si ottiene:

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(2,0)} = \frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{A_{kl}}{2}\bar{z}_k\bar{z}_l\, dz_k \wedge dz_l$$

$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(1,1)} =$

$= \frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left[\left(\frac{A_{kl}+A_{lk}}{2} + \frac{\partial^2\tilde{\Xi}}{\partial x_k \partial x_l}(\Psi)\tilde{\psi}_k^2\tilde{\psi}_l^2\right)\bar{z}_k z_l + \frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi)\delta_{kl}\tilde{\psi}_k^2\right] dz_k \wedge d\bar{z}_l,$

$$A_{kl} = \frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi)\frac{\partial\tilde{\psi}_k^2}{\partial x_l} + \tilde{\psi}_k^2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\tilde{\Xi}}{\partial x_j \partial x_k}(\Psi)\frac{\partial\tilde{\psi}_j^2}{\partial x_l}|z_j|^2.$$

Assumiamo ora che

$$\Psi^*(\omega_\Xi) = \omega_\Phi = \frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l}\bar{z}_k z_l + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_l}\delta_{lk}\right) dz_k \wedge d\bar{z}_l.$$

Alllora $\Psi^*(\omega_\Xi)_{(2,0)} = \Psi^*(\omega_\Xi)_{(0,2)} = 0$ e quindi $A_{kl} = A_{lk}$.

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(1,1)} = \frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial\Gamma_l}{\partial x_k}\bar{z}_k z_l + \Gamma_k\delta_{kl}\right) dz_k \wedge d\bar{z}_l.$$

dove $\Gamma_l = \tilde{\psi}_l^2\,\frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial x_l}(\Psi),\ l = 1, \dots, n.$

Quindi , $\Psi^*(\omega_\Xi) = \omega_\Phi$ implica

$$\frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial \Gamma_l}{\partial x_k}\bar{z}_k z_l + \Gamma_k \delta_{lk}\right) dz_k \wedge d\bar{z}_l =$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l}\bar{z}_k z_l + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_l}\delta_{kl}\right) dz_k \wedge d\bar{z}_l.$$

Distinguendo i casi $l \neq k$ e $l = k$ si ottiene

$$\frac{\partial \Gamma_l}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} \quad (k \neq l)$$

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_k} x_k + \Gamma_k = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k^2} x_k + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k}.$$

Ponendo $A_k = \Gamma_k - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k}$, queste equazioni diventano

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_l} = 0 \quad (l \neq k)$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\; x_k = -A_k.$$

La prima equazione implica che A_k non dipende da x_l e dalla seconda si ha:

$$A_k = \Gamma_k - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} = \frac{c_k}{x_k},$$

$c_k \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\Gamma_k = \tilde{\psi}_k^2 \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} + \frac{c_k}{x_k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

che è quello che volevamo dimostare.

Viceversa differenziando (1) e cioè

$$\tilde{\psi}_k^2 \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} + \frac{c_k}{x_k}$$

rispetto a x_l si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{c_k}{x_k^2}\delta_{kl} = A_{kl} + \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_k \partial x_l}\tilde{\psi}_k^2 \tilde{\psi}_l^2,$$

$$A_{kl} = \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi)\frac{\partial \tilde{\psi}_k^2}{\partial x_l} + \tilde{\psi}_k^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_j \partial x_k}(\Psi)\frac{\partial \tilde{\psi}_j^2}{\partial x_l}|z_j|^2.$$

$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_l \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_k \partial x_l}\tilde{\psi}_k^2 \tilde{\psi}_l^2 = \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_l \partial x_k}\tilde{\psi}_l^2 \tilde{\psi}_k^2 \Rightarrow A_{kl} = A_{lk} \Rightarrow$ $\Psi^*(\omega_{\Xi})_{(2,0)} = \Psi^*(\omega_{\Xi})_{(0,2)} = 0 \Rightarrow \Psi^*(\omega_{\Xi}) = \omega_{\Phi}$.