Geometria in Bicocca 2011

Metriche bilanciate, espansione di TYZ
e
quantizzazione di una varietà di Kähler

in collaborazione con

Claudio Arezzo e Fabio Zuddas

Metriche bilanciate

(M, L) una varietà polarizzata (M varietà compatta complessa, L fibrato lineare olomorfo molto ampio su M).

Sia g metrica di Kähler su M tale che $\omega \in c_1(L)$ e h prodotto hermitiano su L tale che $Ric(h) = \omega$.

<u>*Kempf's distortion function*</u> $T_g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$

$$T_g(x) = \sum_{j=0}^{N} h(s_j(x), s_j(x)),\ x \in M$$

dove $\{s_0, \ldots, s_N\}$, $N + 1 = \dim H^0(L)$, è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare

$$\langle s, t\rangle_h = \int_M h(s,t)\frac{\omega^n}{n!}, s, t \in H^0(L)$$

Definizione (Donaldson): una metrica polarizzata $g \in c_1(L)$ si dice bilanciata se $T_g = cost = \frac{N+1}{V(M)}$, $V(M) = \int_M \frac{\omega^n}{n!}$.

Risultati principali sulle metriche bilanciate

Teorema (Zhang, 1996): $\exists\ g$ bilanciata, $g \in c_1(L) \Leftrightarrow (M, L)$ Chow polistabile.

Teorema (Donaldson, 2001): *Sia* $g_{cscK} \in c_1(L)$ *e* $\frac{\mathit{Aut}(M,L)}{\mathbb{C}^*}$ *discreto. Allora, per ogni* $m >> 1$, $\exists!$ *metrica bilanciata* $g_m \in c_1(L^m)$ *t.c.* $\frac{g_m}{m} \xrightarrow{C^\infty} g_{cscK}$. *Inoltre se* $g_m \in c_1(L^m)$ *bilanciata tale che* $\frac{g_m}{m} \xrightarrow{C^\infty} g_\infty$ *allora* g_∞ *è cscK.*

Corollario: *Sia* $g_{cscK} \in c_1(L)$ *e* $\frac{\mathit{Aut}(M,L)}{\mathbb{C}^*}$ *discreto. Allora* (M, L) *è asintoticamente Chow stabile.*

Corollario: Se $\frac{\mathrm{Aut}(M,L)}{\mathbb{C}^*}$ è discreto ed esiste $g_{cscK} \in c_1(L)$ allora g_{cscK} è unica in $c_1(L)$.

Cosa succede senza l'ipotesi su **Aut**(M, L)

Teorema (C. Arezzo – L. , 2004): *Siano g e $\tilde{g}$ due metriche bilanciate in $c_1(L)$. Allora esiste $F \in$ Aut(M, L) tale che $F^*\tilde{g} = g$.*

Teorema (A. Della Vedova – F. Zuddas, 2011): *Sia $M = Bl_{p_1,\dots,p_4}\mathbb{C}P^2$ (in quattro punti allineati tranne uno). Allora esiste una polarizzazione L di M e $g_{cscK} \in c_1(L)$ tale che (M, L^m) non è Chow polistabile per $m >> 1$.*

Teorema (Chen –Tian, 2008): Se $\tilde{g}_{cscK} \sim g_{cscK} \Rightarrow \exists\, F \in$ Aut(M) t.c. $F^*\tilde{g}_{cscK} = g_{cscK}$.

Alcuni problemi sulle metriche bilanciate

$$\mathcal{B}(L) = \{g_B \ \ \text{bilanciata} \mid g_B \in c_1(L^{m_0}), \text{per qualche} \ \ m_0\}$$

$$\mathcal{B}_c(L) = \mathcal{B}(L)/\sim$$

$$\mathcal{B}_{g_B} = \{m g_B \in \mathcal{B}(L) \mid m \in \mathbb{N}\}, \qquad g_B \in \mathcal{B}(L)$$

Problema: studiare $\#\mathcal{B}_c(L)$ e $\#\mathcal{B}_{g_B}$.

Alcuni problemi sulle metriche bilanciate

$$\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty \implies \#\mathcal{B}_c(L) = \infty \quad \overset{\Longrightarrow ?}{\Longleftarrow} (M, L) \ \text{asint.Chow pol.}$$

$$\Uparrow \quad \Downarrow ? \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow \quad \not\Downarrow$$

$$\{m g_B \quad \text{bilanciata} \quad \forall m >> 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ uno } *\text{-product alla Berezin su } (M, \omega_B)\}$$

$$\Uparrow \quad \Downarrow ?$$

$$\{L \quad \text{polarizzazione di } (M, g_{hom} = g_B), \pi_1(M) = 1\}$$

Una congettura

Congettura: *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata. Se esiste* $g_B \in \mathcal{B}(L)$ *tale che* $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ *allora* (M, g_B) *è omogenea.*

Alcuni risultati

Teorema 1: *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata*, $\dim M = 1$. *Se esiste* $g_B \in \mathcal{B}(L)$ *tale che* $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ *allora* $M = \mathbb{C}P^1$.

Teorema 2: *Sia* M *una varietà torica*, $\dim M \leq 4$. *Sia* $g_{KE} \in c_1(L)$, $L = K^*$. *Allora* $\#\mathcal{B}_c(L) = \infty$. *Inoltre esiste* $g_B \in \mathcal{B}(L)$ *tale che* $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ *se e solo se* M *è il proiettivo o il prodotto di proiettivi.*

Teorema 3: *Sia* g_{cscK} *una metrica a curvatura scalare costante su una varietà* M *e sia* $\tilde{g}_{cscK}$ *la metrica a curvatura scalare costante su* $\tilde{M} = Bl_{p_1,\ldots,p_k}M$ *ottenuta tramite la costruzione di Arezzo-Pacard. Supponiamo che esista una polarizzazione* L *di* $\tilde{g}_{cscK}$. *Allora* $\#\mathcal{B}_{g_B} < \infty$ *per ogni* g_B *in* $\mathcal{B}(L)$.

Metriche bilanciate e metriche proiettivamente indotte

(M, L) varietà polarizzata, $g \in c_1(L)$, $m \in \mathbb{N}^+$, $Ric(h_m) = m\omega$,

$\{s_0, \ldots, s_{d_m}\}$, $d_m + 1 = \dim H^0(L^m)$, base ortonormale per

$$\langle s, t \rangle_h = \int_M h_m(s, t) \frac{\omega^n}{n!}, s, t \in H^0(L^m).$$

$\varphi_m : M \to \mathbb{C}P^N : x \mapsto [s_0(x) : \cdots : s_{d_m}(x)]$ *coherent states map*

$$\boxed{\varphi_m^* \omega_{FS} = m\omega + \tfrac{i}{2}\partial\bar{\partial} \log T_{mg}(x)}$$

$T_{mg}(x) = \sum_{j=0}^{d_m} h_m(s_j(x), s_j(x))$.

Quindi: $mg \in c_1(L^m)$ è bilanciata $\Leftrightarrow$ mg è proiettivamente indotta tramite φ_m.

Approssimazione di metriche polarizzate

Teorema (G. Tian, 1990): *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata e* $g \in c_1(L)$. *Allora*

$$\frac{\varphi_m^* g_{FS}}{m} \xrightarrow{C^2} g.$$

L'espansione asintotica di TYZ (Tian–Yau–Zelditch)

Teorema (S. Zelditch, 1998): *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata e* $g \in c_1(L)$*. Allora*

$$T_{mg}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{n-j}, a_0(x) = 1,$$

cioè, per ogni r *e* k *esistono costanti* $C_{k,r}$ *tali che*

$$||T_{mg}(x) - \sum_{j=0}^{k} a_j(x) m^{n-j}||_{C^r} \leq C_{k,r} m^{n-k-1}.$$

Corollario Sia (M, L) una varietà polarizzata e $g \in c_1(L)$. Allora $\frac{\varphi_m^* g_{FS}}{m} \xrightarrow{C^\infty} g$.

Teorema *(Z. Lu, 2000):* Ogni $a_j(x)$ è un polinomio della curvatura (della metrica g) e delle sue derivate covarianti. Inoltre

$$\begin{cases} a_1(x) = \frac{1}{2}\rho \\ \\ a_2(x) = \frac{1}{3}\Delta\rho + \frac{1}{24}(|R|^2 - 4|Ric|^2 + 3\rho^2). \end{cases}$$

Lemma 1: *Sia* (M, L) *una varietà polarizzata e* $g \in c_1(L)$. *Sia* $\mathcal{B}_g = \{mg$ *è bilanciata* $\mid m \in \mathbb{N}\}$. *Se* $\#\mathcal{B}_g = \infty$ *allora i coefficienti* $a_j(x)$ *di* $T_{mg}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{n-j}$ *sono costanti, per ogni* $j = 0, 1, \ldots$.

dimostrazione *Se esistesse una successione illimitata* $\{m_s\}_{s=1,2,\ldots}$ *tale che* $T_{m_s g}(x) = T_{m_s}$. *Sappiamo che* $a_0 = 1$ *supponiamo che* $a_j(x) = a_j$, *for* $j = 0, \ldots, k-1$. *Allora*

$$|T_{s,k,n} - a_k(x) m_s^{n-k}| \leq C_k m_s^{n-k-1}, T_{s,k,n} = T_{m_s} - \sum_{j=0}^{k-1} a_j m_s^{n-j}$$

per qualche costante C_k.

Quindi $|m_s^{k-n} T_{s,k,n} - a_k(x)| \leq C_k m_s^{-1}$ *e se* $s \to \infty$ *allora* $m_s^{k-n} T_{s,k,n} \to a_k(x)$ *e quindi* a_k *è costante.* $\Box$

dimostrazione del Teorema 1

Teorema 1: Sia (M, L) una varietà polarizzata, $\dim M = 1$. Se esiste $g_B \in \mathcal{B}(L)$ tale che $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ allora $M = \mathbb{C}P^1$.

dimostrazione

Se $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty \overset{Lemma 1}{\Longrightarrow} g_B$ *cscK* $\Rightarrow M = \mathbb{C}P^1$ *e* $g_B = m_0 g_{FS}$. $\square$

Lemma 2: Sia (M, L) una varietà polarizzata e $g = g_{cscK} \in c_1(L)$. Supponiamo che almeno una di queste condizioni sia soddisfatta:

1. mg non è proiettivamente indotta $\forall m$;

2. Esiste $j_0 \geq 2$ tale che $a_{j_0} \neq cost$ $(T_{mg}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{n-j}$)

Allora $\#\mathcal{B}_{g_B} < \infty$ per ogni $g_B \in \mathcal{B}(L)$.

dimostrazione *Sia $g_B \in \mathcal{B}(L)$ (g_B bilanciata e $g_B \in c_1(L^{m_0})$ per qualche m_0).*

Se per assurdo $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ $\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ a_j^B $(T_{mg_B}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j^B(x) m^{n-j})$ sono costanti per ogni $j = 0, 1, \ldots$.

In particolare $a_1^B = \rho_B/2$ è costante e quindi (per il Teorema di Chen-Tian) esiste $F \in$ Aut(M) tale che $F^* g_B = m_0 g$.

Questo implica che $m_0 g$ è proiettivamente indotta e che tutti gli a_j sono costanti per ogni $j = 0, 1, \ldots$. in contrasto con 1. e 2. $\square$

Osservazione: *Esistono metriche polarizzate $g_{cscK} \in c_1(L)$ tale che tutti i coefficienti dello sviluppo di TYZ di T_{mg} sono costanti ma mg non è proiettivamente indotta per ogni m (metriche iperboliche, toro piatto).*

dimostrazione del Teorema 2

Teorema 2*:* Sia M una varietà torica, $\dim M \leq 4$. Sia $g_{KE} \in c_1(L)$, $L = K^*$. Allora $\#\mathcal{B}_c(L) = \infty$. Inoltre esiste $g_B \in \mathcal{B}(L)$ tale che $\#\mathcal{B}_{g_B} = \infty$ se e solo se M è il proiettivo o il prodotto di proiettivi.

idea della dimostrazione

$\#\mathcal{B}_c(L) = \infty$ *segue del fatto (noto) che per le varietà toriche simmetriche* $(M, L = K^*)$ *è asint. Chow polistabile.*

Inoltre si dimostra che mg_{KE} *è proiettivamente per qualche* m *se solo se* M *è il proiettivo o il prodotto di proiettivi. La conclusione segue dal Lemma 2.* $\square$

dimostrazione del Teorema 3

Teorema 3: Sia g_{cscK} una metrica a curvatura scalare costante su una varietà M e sia $\tilde{g}_{cscK}$ la metrica a curvatura scalare costante su $\tilde{M} = Bl_{p_1,\ldots,p_k}M$ ottenuta tramite la costruzione di Arezzo-Pacard. Supponiamo che esista una polarizzazione L di $\tilde{g}_{cscK}$. Allora $\#\mathcal{B}_{g_B} < \infty$ per ogni g_B in $\mathcal{B}(L)$.

idea della dimostrazione *Si dimostra che il coefficiente a_2 dello sviluppo di TYZ di $T_{m\tilde{g}_{cscK}}$ non è costante e quindi la conclusione segue dal Lemma 2.* $\square$

Alcuni problemi sui coefficienti di TYZ

1. Classificare la varietà dove i coefficienti dello sviluppo di TYZ sono tutti costanti.

2. Classificare le varietà dove i coefficienti $a_k = 0$*, per* $k > n$*.*

Teorema *(L., 2005): Esiste $U \subset M$ tale che:*

$$a_k(x) = C_k(1) + \sum_{\substack{r+j=k \\ r\geq 0 \ j\geq 1}} C_r(\tilde{a}_j(x,y))_{|y=x}$$

$$\mathcal{L}_m(x) = \int_U f(y) e^{-mD(x,y)} \frac{\omega^n}{n!}(y) \sim \frac{1}{m^n} \sum_{r\geq 0} m^{-r} C_r(f)(x),$$

$$T_{mg}(x,\bar{y}) \sim \textstyle\sum_{j\geq 0} a_j(x,\bar{y}) m^{n-j} \quad \Rightarrow \quad |T_{m\omega}(x,\bar{y})|^2 \sim m^{2n}(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{a}_j(x,y) m^{-j})$$