

Spazio tangente e il differenziale
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2025-2026
Docente: Andrea Loi

1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, xy)$. Sia $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p = a \frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{F(p)} + b \frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{F(p)} + c \frac{\partial}{\partial w}\bigg|_{F(p)}.$$

2. Siano x, y le coordinate standard su $\mathbb{R}^2$ e $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. In U le coordinate polari (ρ, θ) , $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ sono definite come $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. Si scrivano $\frac{\partial}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$ in funzione di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.

3. Sia $p = (x, y)$ un punto di $\mathbb{R}^2$. Allora

$$c_p(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

è una curva liscia in $\mathbb{R}^2$ che inizia in p . Calcolare $c'(0)$.

4. Siano M e N varietà differenziabili e $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ le proiezioni naturali. Dimostrare che per $(p, q) \in M \times N$ l'applicazione

$$(\pi_{1*}, \pi_{2*}) : T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_p M \times T_q N$$

è un isomorfismo.

5. Calcolare il differenziale dell'applicazione antipodale $S^n \rightarrow S^n$, $x \mapsto -x$ in un punto $x \in S^n$.
6. Dimostrare che la struttura $\mathcal{Vett}$ i cui oggetti sono spazi vettoriali sui $\mathbb{R}$ e i morfismi sono le applicazioni lineari è una categoria.
7. Dimostrare che la struttura $\mathcal{Top}$ i cui oggetti sono spazi topologici e i morfismi sono le applicazioni continue è una categoria.
8. Dimostrare che la struttura $\mathcal{Var}$ i cui oggetti sono le varietà differenziabili e i morfismi sono le applicazioni lisce è una categoria.
9. Dimostrare che la struttura $\mathcal{Var}_p$ i cui oggetti sono le varietà differenziabili puntate e i morfismi sono le applicazioni lisce che rispettano i punti è una categoria.
10. Dimostrare che l'applicazione che ad uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ associa il suo duale $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ e che ad $L \in \text{Hom}(V, W)$ associa $L^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ definito da

$$L^*(\alpha) = \alpha \circ L, \quad \forall \alpha \in W^*.$$

definisce un funtore controvariante dalla categoria $\mathcal{Vett}$ degli spazi vettoriali in se stessa.