

Geometria Differenziale in $\mathbb{R}^n$
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2025-2026
Docente: Andrea Loi

1. Per ogni numero naturale k costruire una funzione che sia $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$.
2. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta essere liscia ma non reale analitica.

3. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dimostrare che i seguenti intervalli sono tutti diffeomorfi tra loro e diffeomorfi a $\mathbb{R}$: (a, b) , $(c, +\infty)$, $(-\infty, d)$.
4. Dimostrare che l'applicazione (costruita a lezione)

$$h : B_0(1) \rightarrow \mathbb{R}^n, x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right)$$

definisce un diffeomorfismo tra la palla aperta unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$. Dedurre che la palla aperta di centro $c \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$ è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

5. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Usando il teorema di Taylor con resto dimostrare che esistono $g_{11}, g_{12}, g_{22} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + x^2 g_{11}(x, y) + xy g_{12}(x, y) + y^2 g_{22}(x, y).$$

6. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Sia $g(t, u) = \frac{f(t, tu)}{t}$ se $t \neq 0$ e $g(0, u) = 0$. Dimostrare che $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
7. Dimostrare che l'insieme $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ dei germi delle funzioni lisce intorno a $p \in \mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e di prodotto definite a lezione è un'algebra commutativa e unitaria.
8. Dimostrare che l'insieme delle derivazioni puntuali $\text{Der}_p(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le operazioni definite a lezione è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
9. Dimostrare che i campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con le operazioni definite a lezione è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e un $C^\infty(U)$ -modulo.
10. Sia A un'algebra su un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che le operazioni

$$(D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a)$$

$$(\lambda D)(a) = \lambda D(a)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni $D_1, D_2, D \in \text{Der}(A)$ dotano $\text{Der}(A)$ della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

11. Siano D_1 e D_2 due derivazioni di un'algebra A su un campo $\mathbb{K}$ ($D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$). Mostrare che $D_1 \circ D_2$ non è necessariamente una derivazione di A , mentre $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \text{Der}(A)$.