

**Il fibrato tangente e i campi di vettori**  
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2025-2026**  
**Docente: Andrea Loi**

1. Sia  $N$  una sottovarietà di una varietà differenziabile  $M$ . Dimostrare che  $TN$  è una sottovarietà di  $TM$ .
2. Una varietà differenziabile è detta *orientabile* se esiste un atlante di  $M$  rispetto al quale il determinante Jacobiano dei cambi di carte è positivo. Dimostrare che:

- (a)  $\mathbb{R}P^3$  è una varietà orientabile;
- (b) il fibrato tangente  $TM$  di una varietà differenziabile  $M$  è orientabile.

3. Dimostrare che l'applicazione che associa ad ogni varietà differenziabile il suo fibrato tangente e ad ogni applicazione  $F : N \rightarrow M$  tra varietà differenziabili l'applicazione  $F_* : TN \rightarrow TM$  definita come  $F_*((p, v)) = (F(p), F_{*p}(v))$  per ogni  $(p, v) \in TN$  definisce un funtore covariante dalla categoria delle varietà differenziabili in se stessa.
4. Una *derivazione* di un'algebra di Lie  $(V, [\cdot, \cdot])$  su un campo  $\mathbb{K}$  è un'applicazione lineare  $D : V \rightarrow V$  tale che

$$D([Y, Z]) = [DY, Z] + [Y, DZ], \quad \forall Y, Z \in V.$$

Dimostrare che dato  $X \in V$  l'applicazione

$$D_X : V \rightarrow V, Y \mapsto [X, Y]$$

è una derivazione.

5. Sia  $F : N \rightarrow M$  un diffeomorfismo tra varietà differenziabili,  $X \in \chi(N)$  e  $f \in C^\infty(N)$ . Dimostrare che

$$F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*X.$$

6. Sia  $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $X = \frac{d}{dx} \in \chi(M)$ . Trovare la curva integrale di  $X$  massimale che inizia in un generico punto  $p \in \mathbb{R}$ .
7. Trovare il flusso (locale) dei seguenti campi di vettori:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \in \chi(\mathbb{R}^2).$$

Nel caso siano completi calcolare il loro gruppo di diffeomorfismi ad un parametro.

8. Dimostrare che il campo di vettori  $X = \frac{\partial}{\partial x} \in \chi(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0))$  non è completo.
9. Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $X \in \chi(M)$  tale che  $X_p = 0$  per ogni  $p \in M$ . Dimostrare che la curva integrale di  $X$  che inizia in  $p$  è la curva costante  $c(t) = p$ .
10. Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $X \in \chi(M)$  il campo di vettori nullo,  $X = 0$ . Descrivere il gruppo dei diffeomorfismi ad un parametro associato a  $X$ .

11. Sia  $M$  una varietà differenziabile,  $f, g \in C^\infty(M)$  e  $X, Y \in \chi(M)$ . Dimostrare che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

12. Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e  $X, Y \in \chi(M)$  e  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  una carta locale. Se  $X|_U = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $Y|_U = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , dimostrare che

$$[X, Y]|_U = \sum_{i,j=1}^n \left( a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$