PROGRAMMA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025, primo semestre
Docente: Andrea Loi

1. Geometria differenziale in $\mathbb{R}^n$

1.1 Funzioni lisce e reali analitiche. Richiami sulle funzioni lisce e reali analitiche su aperti di $\mathbb{R}^n$; funzioni C^k ma non C^{k+1}; esempi di funzioni lisce che non sono reali analitiche.

1.2 Diffeomorfismi e la formula di Taylor Diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$ (applicazioni lisce, bigettive con inversa liscia); esistono funzioni bigettive e lisce che non sono diffeomorfismi; gli intervalli aperti limitati o illimitati di $\mathbb{R}$ sono diffeomorfi; il prodotto di n intervalli aperti di $\mathbb{R}$ risulta diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$; una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ sono diffeomorfi; teorema dello sviluppo di Taylor con resto intorno ad un punto p di una funzione liscia definita su un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$.

1.3 Vettori tangenti. Vettori tangenti in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; lo spazio $T_p\mathbb{R}^n$ come insieme dei vettori colonna; derivata direzionale di una funzione liscia rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; il germe di una funzione in un punto p; l'insieme dei germi di funzioni $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ definite in un intorno di un punto $p \in \mathbb{R}^n$ é un algebra su $\mathbb{R}$; derivazioni puntuali in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; la derivata direzionale $D_v : C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; l'insieme $\mathrm{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$ delle derivazioni puntuali risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; l'applicazione $\Phi : T_p\mathbb{R}^n \to \mathrm{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)), v \mapsto D_v$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali; base canonica di $\mathrm{Der}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n))$.

1.4 Campi di vettori. Campi di vettori su un aperto U di $\mathbb{R}^n$; l'insieme dei campi di vettori lisci $\chi(U)$ formano un $C^\infty(U)$-modulo; derivata di una funzione liscia f rispetto ad un campo di vettori liscio X; campi di vettori lisci su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ come derivazioni dell'algebra $C^\infty(U)$.

2. Varietà differenziabili

2.1 Varietà topologiche. Richiami sulle varietà topologiche; dimensione di una varietà topologica e teorema dell'invarianza della dimensione topologica (solo enunciato); esempi e non esempi.

2.2 Varietà differenziabili. Carte compatibili; atlanti differenziabili su uno spazio topologico; atlanti massimali (strutture differenziabili); ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale; varietà differenziabili; esempi di varietà: $\mathbb{R}^n$, aperti di varietà; varietà di dimensione zero; grafici di funzioni; curve e superfici in $\mathbb{R}^3$; il gruppo lineare; il cerchio unitario S^1; la sfera S^n; il prodotto di varietà differenziabili; il toro n-dimensionale.

2.3 Quozienti Topologia quoziente; applicazioni costanti sulle classi di'equivalenza; identificazione di un sottoinsieme ad un suo punto; condizioni affinchè il quoziente di uno spazio topologico sia T_2 e N_2.

2.4 Lo spazio proiettivo reale e la Grassmanniana Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$ come varietà differenziabile di dimensione n; la Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$ come varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$.

3. Applicazioni lisce

3.1 Funzioni lisce su varietà Funzione liscie su una varietà a valori reali; Applicazioni lisce tra varietà; composizione di applicazioni lisce tra varietà; esempi; funzioni a campana; estensioni di applicazioni lisce.

3.2 Diffeomorfismi Diffeomorfismi tra varietà; cenni sull'esistenza e unicità delle strutture differenziabili su una varietà topologica; esempi di strutture differenziabili diverse su $\mathbb{R}$; le funzioni coordinate sono diffeomorfismi; ogni diffeomorfismo da un aperto di una varietà in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione coordinata.
3.3 Altri esempi di applicazioni lisce Esempi di applicazioni lisce; applicazioni sul prodotto di varietà; definizione di gruppi di Lie; esempi: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(V)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^+, +)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(S^1, \cdot)$; il prodotto di gruppi di Lie; il toro $\mathbb{T}^n$; un qualunque gruppo finito o numerabile con la topologia discreta è un gruppo di Lie 0-dimensionale.
3.4 Derivate parziali Derivata parziale di una funzione liscia su una varietà; la matrice Jacobiana di un'applicazione liscia tra varietà; lo Jacobiano dell'applicazione di transizione; diffeomorfismi locali e il teorema delle funzione inversa per applicazioni lisce tra varietà (per il teorema della funzione inversa tra aperti di spazi euclidei si rinvia ai corsi di Analisi Matematica).

4. Lo spazio tangente e il differenziale.
4.1 Lo spazio tangente Lo spazio tangente T_pM ad una varietà M in un suo punto p come insieme delle derivazioni puntuali $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(M))$ in p dei germi di funzioni lisce intorno a p; $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $i = 1, \ldots, n$ come elementi della base dello spazio tangente in p ad una varietà differenzibile M di dimensione n.
4.2 Il differenziale Il differenziale di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; il differenziale e lo Jacobiamo: legame tra il differenziale e il teorema della funzione inversa; la regola della catena per applicazioni lisce tra varietà; il teorema di invarianza della dimensione nel caso liscio; espressione locale per il differenziale.
4.3 Categorie e funtori (un cenno) Definizione di categorie e funtori tra categorie; esempi; proprietà funtoriali del differenziale.
4.4 Curve su varietà Curve su varietà e il vettore tangente ad una curva liscia in un suo punto; derivata direzionale in termini di curve; spazio tangente ad una varietà in un suo punto come insieme dei vettori tangenti a curve lisce sulla varietà passanti per il punto; calcolo del differenziale di un'applicazione liscia tra varietà in termini di curve; il differenziale della traslazione a sinistra in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; differenziale della moltiplicazione e dell'inversione in un gruppo di Lie.

5. Immersioni, sommersioni, sottovarietà e embedding.
5.1 Immersioni e sommersioni Inclusione canonica e proiezione canonica; immerisoni e sommersioni; rango in un punto di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; rango massimale di un'applicazione in un punto; punti regolari e punti critici, valori regolari e valori critici; esempi; massimi e minimi locali e punti critici.
5.2 Sottovarietá Carte adattate; sottovarietà di una varietà ed esempi; il teorema della preimmagine di un valore regolare; esempi: la sfera, i grafici di applicazioni lisce, curve del piano proiettivo reale, il gruppo lineare speciale.
5.3 Il Teorema del rango costante il teorema del rango costante in analisi (senza dimostrazione)) e per applicazioni lisce tra varietà differenziabili. preimmagine di un'applicazione di rango costante; dimostrazione che il gruppo ortogonale è una sottovarietà del gruppo lineare; il teorema di immersione e di sommersione locale; alcune proprietà delle sommersioni.
5.4 Embedding differenziabili definizione di embedding differenziabile; l'immagine di una sottovarietá tramite un embedding differenziabile é una sottovarietá; il teorema

di Whitney (senza dimostrazione); esempi di immersioni iniettive la cui immagine non è una sottovarietà; sottovarietà immerse; applicazioni lisce la cui immagine è contenuta in una (sotto)varietà.

6. Il fibrato tangente e i campi di vettori.

6.1 Il fibrato tangente Topologia e struttura differenziabile sul fibrato tangente di una varietà differenziabile.

6.2 Campi di vettori Campi di vettori su un varietà; criteri affinchè un campo di vettori su una varietà sia liscio; uguaglianza tra campi di vettori; campi di vettori come derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce; campi di vettori su sottovarietà; esempi di campi di vettori sulle sfere; il Teorema di Adams (senza dimostrazione).

6.3 Curve integrali e flussi Curve integrali di un campo di vettori; esistenza e unicitá di curva integrali massimali; flussi locali e globali; campi di vettori completi; ogni campo di vettori su una varietà compatta è completo; esempi.

6.4 Campi di vettori come algebra di Lie Il commutatore (o bracket) di Lie di due campi di vettori; algebre di Lie; pushforward di un campo di vettori tramite un diffeomorfismo; campi di vettori F-related tramite un'applicazione liscia $F : N \to M$; campi di vettori F-related e commutatore di Lie.

7. Gruppi di Lie

7.1 Gruppi e sottogruppi di Lie. Le traslazioni a sinistra e a destra; omomorfismi e isomorfismi tra gruppi di Lie; sottogruppi di Lie; se H è un sottogruppo algebrico e una sottovarietà di un gruppo di Lie G allora H è un sottogruppo di Lie di G; sottogruppi di Lie embedded; sottogruppi di Lie immersi.; esempi di sottogruppi di Lie immersi e non embedded; quozienti di gruppi di Lie: se H è un sottrogruppo di Lie chiuso di un gruppo di Lie G allora G/H ha un'unica struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale la proiezione $\pi : G \to G/H$ è liscia e $\dim G/H = \dim G - \dim H$ (senza dimostrazione); se H è un sottgruppo normale e chiuso di un gruppo di Lie G allora G/H è un gruppo di Lie e $\pi : G \to G/H$ è un omomorfismo di gruppi di Lie; ogni sottogruppo di Lie discreto di $\mathbb{R}^n$ è un reticolo (senza dimostrazione).

7.2 L'esponenziale di una matrice. Spazi vettoriali normati; $M_n(\mathbb{R})$ come spazio vettoriale normato; algebre normate e loro proprietà; $M_n(\mathbb{R})$ come algebra normata; spazi di Banach e algebre di Banach; in uno spazio di Banach una successione assolutamente convergente è convergente e quindi l'esponenziale di una matrice risulta ben definito; alcune proprietá dell'esponenziale di una matrice.

7.3 Triangolarizzazioni, diagonalizzazioni e matrici normali. Matrici simili e unitariamente simili; teorema di Schur: ogni matrice a entrate complesse é simile ad una matrice triangolare; basi di Schur; la traccia di una matrice è la somma dei suoi autovalori; determinante dell'esponenziale di una matrice é uguale all'esponenziale della traccia della matrice; il differenziale del determinante; matrici normali; il teorema spettrale per matrici normali: ogni matrice normale é unitariamente simile ad una matrice diagonale; forma canonica ortogonale.

7.4 Esempi di gruppi e sottogruppi di Lie.

Tabella reassuntiva

Gruppo	$T_I G$	Dimensione	Compatto	Connesso
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	n^2	no	no
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$2n^2$	no	si
$SL_n(\mathbb{R})$	$\{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}B = 0\}$	$n^2 - 1$	no	si
$SL_n(\mathbb{C})$	$\{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}B = 0\}$	$2n^2 - 2$	no	si
$U(n)$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B + B^* = 0\}$	n^2	si	si
$SU(n)$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B + B^* = 0 \wedge \mathrm{tr}B = 0\}$	$n^2 - 1$	si	si
$O(n)$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si
$SO(n)$	$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sono diffeomorfi (come varietà) per ogni $n \geq 1$ mentre sono isomorfi (come gruppi di Lie) se e solo se n è dispari.

8. Algebra di Lie.

8.1 Algebra di Lie di un gruppo di Lie. Campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie e loro principali proprietà; definizione dell'algebra di Lie di un gruppo di Lie come sottoalgebra dei campi di vettori lisci.

8.2 L'algebra di Lie dei gruppi di matrici. L'algebra di Lie del gruppo lineare; push-forward di campi di vettori invarianti a sinistra tramite un omomorfismo di gruppi di Lie; omomorfismo di algebra di Lie indotto da un omomorfismo di gruppi di Lie; calcolo dell'algebra di Lie dei gruppi matriciali.

8.3 L'applicazione esponenziale. Flussi (globali) di campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie e applicazione esponenziale; sottogruppi di Lie ad un parametro di un gruppo di Lie; omomorfismi di gruppi di Lie e applicazione esponenziale; l'applicazione esponenziale di un sottogruppo H di Lie di un gruppo G è la restrizione dell'esponenziale di G; l'applicazione esponenziale di un gruppo matriciale coincide con l'esponenziale di matrici; un omomorfismo algebrico e continuo tra gruppi di Lie è un omomorfismo tra gruppi di Lie (senza dimostrazione).

Testi di riferimento

Lorin, W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.

J. Lee, *Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.

W. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.

M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company.

F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie grous*, Springer Verlag.