

Spazio tangente e il differenziale
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2023-2024
Docente: Andrea Loi

1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, xy)$. Sia $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right) = a\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{F(p)} + b\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{F(p)} + c\frac{\partial}{\partial w}\Big|_{F(p)}.$$

2. Siano x, y le coordinate standard su \mathbb{R}^2 e $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. In U le coordinate polari (ρ, θ) , $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ sono definite come $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. Si scrivano $\frac{\partial}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$ in funzione di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.
3. Sia $p = (x, y)$ un punto di \mathbb{R}^2 . Allora

$$c_p(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é una curva liscia in \mathbb{R}^2 che inizia in p . Calcolare $c'(0)$.

4. Siano M e N varietà differenziabili e $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ le proiezioni naturali. Dimostrare che per $(p, q) \in M \times N$ l'applicazione

$$(\pi_{1*}, \pi_{2*}) : T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_p M \times T_q N$$

é un isomorfismo.

5. Calcolare il differenziale dell'applicazione antipodale $S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$ in un punto $x \in S^n$.
6. Dimostrare che \mathcal{Vett} è una categoria.
7. Dimostrare che \mathcal{Top} è una categoria.
8. Dimostrare che \mathcal{Var} è una categoria.
9. Dimostrare che \mathcal{Varp} è una categoria.
10. Dimostrare che l'applicazione che ad uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} associa il suo duale $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ e che ad $L \in \text{Hom}(V, W)$ associa $L^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ definito da

$$L^*(\alpha) = \alpha \circ L, \quad \forall \alpha \in W^*.$$

definisce un funtore controvariante dalla categoria \mathcal{Vett} degli spazi vettoriali in se stessa.