Geometria Differenziale in $\mathbb{R}^n$
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2023-2024
Docente: Andrea Loi

1. Per ogni numero naturale k costruire una funzione che sia $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$.

2. Dimostrare che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\geq 0 \\ 0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$
risulta essere liscia ma non reale analitica.

3. Siano $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a<b$. Dimostare che i seguenti intervalli sono tutti diffeomorfi tra loro e diffeomorfi a $\mathbb{R}$: (a,b), $(c,+\infty)$, $(-\infty,d)$.

4. Dimostrare che l'applicazione (costruita a lezione)
$$h:B_0(1)\to\mathbb{R}^n, x=(x^1,\dots,x^n)\mapsto\left(\frac{x^1}{\sqrt{1-\|x\|^2}},\dots,\frac{x^n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\right)$$
definisce un diffeomorfismo tra la palla aperta unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$. Dedurre che la palla aperta di centro $c\in\mathbb{R}^n$ e raggio $r>0$ in $\mathbb{R}^n$ é diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

5. Sia $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Usando il teorema di Taylor con resto dimostrare che esistono $g_{11},g_{12},g_{22}\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che:
$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+x^2g_{11}(x,y)+xyg_{12}(x,y)+y^2g_{22}(x,y).$$

6. Sia $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Sia $g(t,u)=\frac{f(t,tu)}{t}$ se $t\neq 0$ e $g(0,u)=0$. Dimostare che $g\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

7. Dimostrare che l'insieme $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ dei germi delle funzioni lisce intorno a $p\in\mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e di prodotto definite a lezione é un algebra commutativa e unitaria.

8. Dimostrare che l'insieme delle derivazioni puntuali $\mathrm{Der}_p\left(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$ di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le operazioni definite a lezione é uno spazio vettoriale sui $\mathbb{R}$.

9. Dimostrare che i campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto $U\subset\mathbb{R}^n$ con le operazioni definite a lezione é uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e un $C^\infty(U)$-modulo.

10. Sia A un algebra su un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che le operazioni
$$(D_1+D_2)(a)=D_1(a)+D_2(a)$$
$$(\lambda D)(a)=\lambda D(a)$$
per ogni $\lambda\in\mathbb{K}$ e per ogni $D_1,D_2,D\in\mathrm{Der}(A)$ dotano $\mathrm{Der}(A)$ della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

11. Siano D_1 e D_2 due derivazioni di un algebra A su un campo $\mathbb{K}$ ($D_1,D_2\in Der(A)$). Mostrare che $D_1\circ D_2$ non é necessariamente una derivazione di A, mentre $D_1\circ D_2-D_2\circ D_1\in Der(A)$.