Problemi di geometria differenziale

Classe di Geometria Differenziale, coorte 2021/2022

18 settembre 2022

Introduzione

In questo lavoro noi studenti del corso di geometria differenziale abbiamo voluto raccogliere in modo ordinato gli esercizi proposti dal prof. Loi durante il corso. Si vogliono precisare due cose:

Prima di tutto questo lavoro vuole vedersi come un aiuto agli studenti, nel caso di esercizi particolarmente ostici o per confrontare le proprie soluzioni. Pertanto invitiamo tutti i lettori a cimentarsi singolarmente sugli esercizi ed in seguito vedere le soluzioni;

Inoltre si noti che queste costituiscono le nostre soluzioni ai problemi. Sollecitiamo dunque anche a trovare altre soluzioni, in modo da integrare questo lavoro, o correggere procedimenti che risultano poco chiari. Proprio per questo lasciamo disponibile il codice LaTeX oltre che il pdf, di modo che questo testo possa costantemente essere migliorato ed approfondito.

Nella speranza di aver aiutato anche solo un minimo, salutiamo coloro che verranno dopo di noi, con affetto ed incoraggamento.

LA COORTE 2021/2022

Indice

1 Lista 1.1-1.4

1. *Per ogni numero naturale k costruire una funzione che sia $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$.*

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_k(x) = x^{\frac{1}{3}+k}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_k^{(k)}(x) &= \left(\frac{1}{3}+k\right)\left(\frac{1}{3}+k-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}+k-(k-1)\right)x^{\frac{1}{3}} = \\ &= \left(\frac{1}{3}+k\right)\left(\frac{1}{3}+k-1\right)\cdot\dots\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

definita e continua in $\mathbb{R}$. Quindi, $f \in C^k(\mathbb{R})$.

$$f_k^{(k+1)}(x) = \left(\frac{1}{3}+k\right)\left(\frac{1}{3}+k-1\right)\cdot\dots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

non definita in 0. Quindi, $f \notin C^{k+1}(\mathbb{R})$.

2. *Dimostrare che la funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{se } x > 0 \\ 0 & \textit{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è liscia ma non reale analitica.

Vediamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Dimostro che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui esistono $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, con $b_1, ..., b_n < 0$, tali che per ogni $x > 0$

$$f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sum_{i=1}^{n} a_i x^{b_i}$$

Per induzione su k:
Se $k = 0$ si ha $f^{(k)}(x) = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (per $x > 0$).
Supponiamo vero per $k - 1$.

$$f^{(k-1)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sum_{i=1}^{n} a_i x^{b_i}$$

da cui

$$f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)' = 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}\sum_{i=1}^{n} a_i x^{b_i} + e^{-\frac{1}{x^2}}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x^{b_i-1} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i x^{b_i-3} + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i x^{b_i-1}\right)$$

Dimostro ora che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f^{(k)}(0) = 0$. Per induzione su k:
Se $k = 0$, f(0)=0.
Supponiamo vero per $k - 1$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(e^{-\frac{1}{h^2}}\sum_{i=1}^{n} a_i h^{b_i}\right) = 0$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = 0$$

Quindi

$$f^{(k)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = 0$$

Per $x < 0$, tutte le derivate di f sono definite e sono nulle. Quindi, su $\mathbb{R}$ f ammette le derivate di qualunque ordine e dunque $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Vediamo ora che f non è analitica. Supponiamo per assurdo che lo sia. Allora in un intorno di 0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}x^k = 0$$

Ma per $x > 0$ si ha $f(x) \neq 0$, da cui l'assurdo.

3. *Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b$. Dimostrare che gli intervalli $(a, b), (c, +\infty), (-\infty, d)$ sono diffeomorfi tra loro e diffeomorfi a $\mathbb{R}$.*

Sia

$$\begin{aligned} f\colon (0,1) &\to (a,b) \\ x &\mapsto a + (b-a)x \end{aligned}$$

ben definita in quanto se $x \in (0, 1)$ allora

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < (b-a)x < b-a \Rightarrow a < f(x) < b$$

Sia

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon (a,b) &\to (0,1) \\ x &\mapsto \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

ben definita in quanto se $x \in (a,b)$ allora

$$a < x < b \Rightarrow 0 < x - a < b - a \Rightarrow 0 < f^{-1}(x) < 1$$

Si verifica che f^{-1} è l'inversa di f e che f e f^{-1} sono C^∞. Quindi, (a,b) e $(0,1)$ sono diffeomorfi.
Sia

$$\begin{aligned} f\colon (-\infty,d) &\to (0,1) \\ x &\mapsto e^{x-d} \end{aligned}$$

f è C^∞ e la sua inversa è

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon (0,1) &\to (-\infty,d) \\ x &\mapsto \ln x + d \end{aligned}$$

anch'essa C^∞. Quindi, $(-\infty,d)$ è diffeomorfo a $(0,1)$.
Sia

$$\begin{aligned} f\colon (-\infty,0) &\to (c,+\infty) \\ x &\mapsto -x + c \end{aligned}$$

f è un diffeomorfismo e quindi $(c,+\infty)$ è diffeomorfo a $(-\infty,0)$ e dunque anche a $(0,1)$.
Infine,

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to (0,+\infty) \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

è un diffeomorfismo (l'inversa è $\ln x$), per cui $\mathbb{R}$ è diffeomorfo a $(0,+\infty)$ e quindi a $(0,1)$.
Dunque $(a,b), (c,+\infty), (-\infty,d), \mathbb{R}$ sono tutti diffeomorfi a $(0,1)$ e quindi sono diffeomorfi tra loro.

4. *Dimostrare che l'applicazione*

$$\begin{aligned} h\colon B_1(0) &\to \mathbb{R}^n \\ x = (x^1,\dots,x^n) &\mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1-|x|^2}},\dots,\frac{x^n}{\sqrt{1-|x|^2}}\right) \end{aligned}$$

definisce un diffeomorfismo tra la palla aperta unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$. Dedurre che la palla aperta di centro $c \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$ è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Le componenti di h sono C^∞ in quanto $1 - |x|^2 \neq 0$ per $x \in B_1(0)$. Quindi, h è C^∞. Vediamo che la sua inversa è

$$\begin{aligned} h^{-1} \colon \mathbb{R}^n &\to B_1(0) \\ x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto \left(\frac{x^1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1+|x|^2}} \right) \end{aligned}$$

Infatti,

$$h\big(h^{-1}(x)\big) = h\left(\frac{x^1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1+|x|^2}} \right)$$

Sia $y = h(x)$.

$$|y|^2 = \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|x|^2}{1+|x|^2}}} = \sqrt{1+|x|^2}$$

Quindi

$$\begin{aligned} h\big(h^{-1}(x)\big) = h(y) &= \left(\frac{y^1}{\sqrt{1-|y|^2}}, \dots, \frac{y^n}{\sqrt{1-|y|^2}} \right) = \\ &= \left(\frac{x^1}{\sqrt{1+|x|^2}} \cdot \sqrt{1+|x|^2}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1+|x|^2}} \cdot \sqrt{1+|x|^2} \right) = x \end{aligned}$$

Analogamente $h^{-1}\big(h(x)\big) = x$. Anche h^{-1} è C^∞ in quanto $1 + |x|^2 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
Quindi h è un diffeomorfismo.
Sia

$$\begin{aligned} f \colon B_1(0) &\to B_r(c) \\ x &\mapsto rx + c \end{aligned}$$

f è C^∞ e la sua inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon B_r(c) &\to B_1(0) \\ x &\mapsto \frac{x-c}{r} \end{aligned}$$

è C^∞. Quindi $B_r(c)$ è diffeomorfa a $B_1(0)$ e dunque a $\mathbb{R}^n$.

5. *Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Usando il teorema di Taylor con resto dimostrare che esistono $g_{11}, g_{12}, g_{22} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che*

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + x^2 g_{11}(x,y) + xy g_{12}(x,y) + y^2 g_{22}(x,y)$$

Per il teorema di Taylor con resto esistono $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$h_1(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$h_2(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$f(x,y) = f(0,0) + x h_1(x,y) + y h_2(x,y)$$

Ancora per il teorema di Taylor con resto esistono $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$h_1(x,y) = h_1(0,0) + x h_{11}(x,y) + y h_{12}(x,y)$$
$$h_2(x,y) = h_2(0,0) + x h_{21}(x,y) + y h_{22}(x,y)$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + x^2 h_{11}(x,y) + xy h_{12}(x,y) + \\ + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + xy h_{21}(x,y) + y^2 h_{22}(x,y) \end{aligned}$$

Siano $g_{11} = h_{11}, g_{12} = h_{12} + h_{21}, g_{22} = h_{22}$. Allora

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + x^2 g_{11}(x,y) + xy g_{12}(x,y) + y^2 g_{22}(x,y)$$

6. *Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Sia $g(t,u) = \frac{f(t,tu)}{t}$ se $t \neq 0$ e $g(0,u) = 0$. Dimostrare che $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

Per il teorema di Taylor con resto esistono $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$g_1(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$g_2(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$f(x,y) = f(0,0) + xg_1(x,y) + yg_2(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y)$$

Si ha allora, se $t \neq 0$,

$$g(t,u) = \frac{1}{t} f(t,tu) = \frac{1}{t}\big[tg_1(t,tu) + tug_2(t,tu)\big] = g_1(t,tu) + ug_2(t,tu)$$

Per $t = 0$:

$$g(0,u) = 0 = \big[g_1(t,tu) + ug_2(t,tu)\big]_{|t=0}$$

in quanto

$$g_1(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad g_2(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Quindi

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2 \quad g(t,u) = g_1(t,tu) + ug_2(t,tu)$$

da cui $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

7. *Dimostrare che l'insieme $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ dei germi delle funzioni lisce intorno a $p \in \mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e di prodotto definite a lezione è un'algebra commutativa e unitaria.*

Vediamo che $(C_p^\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$:

- Siano $\big[(f,U)\big], \big[(g,V)\big], \big[(h,W)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}&\Big(\big[(f,U)\big] + \big[(g,V)\big]\Big) + \big[(h,W)\big] = \big[(f+g, U\cap V)\big] + \big[(h,W)\big] = \\ &= \big[(f+g+h, U\cap V\cap W)\big] = \big[(f,U)\big] + \big[(g+h, V\cap W)\big] = \\ &= \big[(f,U)\big] + \Big(\big[(g,V)\big] + \big[(h,W)\big]\Big)\end{aligned}$$

  Quindi $+$ è associativa.
  Siano $\big[(f,U)\big], \big[(g,V)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}&\big[(f,U)\big] + \big[(g,V)\big] = \big[(f+g, U\cap V)\big] = \big[(g+f, V\cap U)\big] = \\ =&\big[(g,V)\big] + \big[(f,U)\big]\end{aligned}$$

  Quindi $+$ è commutativa.
  $\big[(0,\mathbb{R}^n)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ è l'elemento neutro per la somma e per ogni $\big[(f,U)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\big[(-f,U)\big]$ è il suo opposto.
  Quindi $(C_p^\infty(\mathbb{R}^n), +)$ è un gruppo abeliano.

- Siano $\big[(f,U)\big], \big[(g,V)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a\Big(\big[(f,U)\big] + \big[(g,V)\big]\Big) &= a\big[(f+g, U\cap V)\big] = \big[(af+ag, U\cap V)\big] = \\ &= \big[(af,U)\big] + \big[(ag,V)\big] = a\big[(f,U)\big] + a\big[(g,V)\big] \end{aligned}$$

- Sia $\big[(f,U)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (a+b)\big[(f,U)\big] &= \big[(af+bf,U)\big] = \big[(af,U)\big] + \big[(bf,U)\big] = \\ &= a\big[(f,U)\big] + b\big[(f,U)\big] \end{aligned}$$

- Sia $\big[(f,U)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(ab)\big[(f,U)\big] = \big[(abf,U)\big] = a\big[(bf,U)\big] = a\Big(b\big[(f,U)\big]\Big)$$

- Sia $\big[(f,U)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$1\big[(f,U)\big] = \big[(1f,U)\big] = \big[(f,U)\big]$$

Vediamo che $(C_p^\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \bullet)$ è un'algebra su $\mathbb{R}$: [a.]

1. Siano $\big[(f,U)\big], \big[(g,V)\big], \big[(h,W)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} &\Big(\big[(f,U)\big] \bullet \big[(g,V)\big]\Big) \bullet \big[(h,W)\big] = \big[(fg, U\cap V)\big] \bullet \big[(h,W)\big] = \\ &= \big[(fgh, U\cap V\cap W)\big] = \big[(f,U)\big] \bullet \big[(gh, V\cap W)\big] = \\ &= \big[(f,U)\big] \bullet \Big(\big[(g,V)\big] \bullet \big[(h,W)\big]\Big) \end{aligned}$$

2. Siano $\big[(f,U)\big], \big[(g,V)\big], \big[(h,W)\big] \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} &\big[(f,U)\big] \bullet \Big(\big[(g,V)\big] + \big[(h,W)\big]\Big) = \big[(f,U)\big] \bullet \big[(g+h, V\cap W)\big] = \\ &= \big[(fg+fh, U\cap V\cap W)\big] = \big[(fg, U\cap V)\big] + \big[(fh, U\cap W)\big] = \\ &= \big[(f,U)\big] \bullet \big[(g,V)\big] + \big[(f,U)\big] \bullet \big[(h,W)\big] \end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned} &\Big(\big[(g,V)\big] + \big[(h,W)\big]\Big) \bullet \big[(f,U)\big] = \big[(g+h, V\cap W)\big] \bullet \big[(f,U)\big] = \\ &= \big[(gf+hf, V\cap W\cap U)\big] = \big[(gf, V\cap U)\big] + \big[(hf, W\cap U)\big] = \\ &= \big[(g,V)\big] \bullet \big[(f,U)\big] + \big[(h,W)\big] \bullet \big[(f,U)\big] \end{aligned}$$

3. Siano $\big[(f,U)\big],\big[(g,V)\big]\in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $a\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a\Big(\big[(f,U)\big]\bullet\big[(g,V)\big]\Big) &= a\big[(fg,U\cap V)\big]=\big[(afg,U\cap V)\big]= \\ &=\big[(af,U)\big]\bullet\big[(g,V)\big]=\big[(f,U)\big]\bullet\big[(ag,V)\big] \end{aligned}$$

Vediamo che l'anello $(C_p^\infty(\mathbb{R}^n),+,\bullet)$ è commutativo unitario:
Siano $\big[(f,U)\big],\big[(g,V)\big]\in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} &\big[(f,U)\big]\bullet\big[(g,V)\big]=\big[(fg,U\cap V)\big]=\big[(gf,V\cap U)\big]= \\ =&\big[(g,V)\big]\bullet\big[(f,U)\big] \end{aligned}$$

Quindi $\bullet$ è commutativa.
$\big[(1,\mathbb{R}^n)\big]\in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ è l'unità.

8. *Dimostrare che l'insieme delle derivazioni puntuali $Der_p\big(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le operazioni definite a lezione è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

Proposizione 1. *Sia R anello commutativo unitario, X un insieme diverso dal vuoto, I una partizione di X e siano $\{A_i\}_{i\in I}$ degli R-moduli. Sia $B=\{f\colon X\to\bigsqcup_{i\in I}A_i\colon \forall i\in I\quad a\in i\Rightarrow f(a)\in A_i\}$. Siano $+\colon B\times B\to B$ e $\cdot\colon R\times B\to B$ definite come:*

$$\forall f,g\in B\quad \forall\lambda\in R\quad \forall a\in X\quad (f+g)(a)=f(a)+g(a)\quad e\quad (\lambda f)(a)=\lambda f(a)$$

Allora $(B,+,\cdot)$ è un R-modulo.

Dimostrazione. *Siano $f,g,h\in B$ e siano $\lambda,\mu\in R$. Allora $\forall a\in X$:*

- $\big((f+g)+h\big)(a)=(f+g)(a)+h(a)=\big(f(a)+g(a)\big)+h(a)=f(a)+\big(g(a)+h(a)\big)=\big(f+(g+h)\big)(a)$
- $(f+g)(a)=f(a)+g(a)=g(a)+f(a)=(g+f)(a)$
- *Sia $0\in B$ tale che per ogni $b\in X$ se $b\in i\in I$ allora $0(b)=0$ elemento neutro di A_i. Allora $(f+0)(a)=f(a)+0=f(a)$*
- *Sia $-f\in B$ tale che $\forall b\in X\quad (-f)(b)=-f(b)$. Allora $\big(f+(-f)\big)(a)=f(a)-f(a)=0=0(a)$.*

- $\big(\lambda(f+g)\big)(a) = \lambda\big(f(a)+g(a)\big) = \lambda f(a)+\lambda g(a) = (\lambda f)(a)+(\lambda g)(a) = (\lambda f+\lambda g)(a)$
- $\big((\lambda+\mu)f\big)(a) = (\lambda+\mu)f(a) = \lambda f(a)+\mu f(a) = (\lambda f+\mu f)(a)$
- $\big((\lambda\mu)f\big)(a) = (\lambda\mu)f(a) = \lambda\big(\mu f(a)\big) = \lambda(\mu f)(a)$
- $(1f)(a) = 1f(a) = f(a)$

In particolare, sia $B = \{f\colon C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}\}$ (con $I = \{X\}$). Allora $(B,+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Essendo chiuso rispetto alle operazioni di $+$ e $\cdot$, $Der_p\big(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ è un sottospazio di B.

9. *Dimostrare che i campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con le operazioni definite a lezione è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e un $C^\infty(U)$-modulo.*

Sia

$$B = \Big\{f\colon U \to \bigsqcup_{p\in U} Der_p\big(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)\big)\colon \forall p\in U \quad f(p)\in Der_p\big(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)\big)\Big\}$$

Per la proposizione dell'esercizio precedente, con $I = \{\{p\}\colon p\in U\}$, B è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Essendo chiuso rispetto alle operazioni di B, $\chi(U)\subseteq B$ è un sottospazio vettoriale. In particolare $(\chi(U),+)$ è un gruppo abeliano. Vediamo che $\chi(U)$ è un $C^\infty(U)$-modulo: siano $f,g\in C^\infty(U)$ e siano $X,Y\in\chi(U)$. Allora $\forall p\in U$: [1)]

1. $\big((fg)X\big)_p = (fg)(p)X_p = \big(f(p)g(p)\big)X_p = f(p)\big(g(p)X_p\big) = f(p)(gX)_p = \big(f(gX)\big)_p$
2. $\big((f+g)X\big)_p = (f+g)(p)X_p = \big(f(p)+g(p)\big)X_p = f(p)X_p+g(p)X_p = (fX+gX)_p$
3. $(1X)_p = 1X_p = X_p$
4. $\big(f(X+Y)\big)_p = f(p)(X+Y)_p = f(p)(X_p+Y_p) = f(p)X_p+f(p)Y_p = (fX+fY)_p$

10. *Sia A un'algebra su un campo K. Dimostrare che le operazioni*

$$(D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a)$$

$$(\lambda D)(a) = \lambda D(a)$$

per ogni $\lambda \in K$ e per ogni $D_1, D_2, D \in Der(A)$ dotano $Der(A)$ della struttura di spazio vettoriale su K.

Sia $B = \{f \colon A \to A\}$. Per la proposizione dell'esercizio 8, B è uno spazio vettoriale su K. Essendo chiuso rispetto alle operazioni di B, $Der(A) \subseteq B$ è un sottospazio vettoriale.

10. *Siano D_1 e D_2 due derivazioni di un'algebra A su un campo K ($D_1, D_2 \in Der(A)$). Mostrare che $D_1 \circ D_2$ non è necessariamente una derivazione di A, mentre $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in Der(A)$.*

Sia per esempio $A = C^\infty(\mathbb{R})$. Siano $D \in Der(A)$ e $a \in A$ tali che $D(a) \neq 0$. Supponiamo per assurdo che $D \circ D \in Der(A)$. Allora

$$(D \circ D)(a \cdot a) = D\big(D(a)\big)a + aD\big(D(a)\big)$$

Ma

$$\begin{aligned}(D \circ D)(a \cdot a) &= D\big(D(a)a + aD(a)\big) = \\ &= D\big(D(a)\big)a + \big(D(a)\big)^2 + \big(D(a)\big)^2 + aD\big(D(a)\big)\end{aligned}$$

Quindi $\big(D(a)\big)^2 = 0$. Assurdo.

Siano $D, E \in Der(A)$. Vediamo che $D \circ E - E \circ D \in Der(A)$. Siano $\lambda, \mu \in K$ e siano $a, b \in A$. Allora:

- $(D \circ E - E \circ D)(\lambda a + \mu b) = D\big(E(\lambda a + \mu b)\big) - E\big(D(\lambda a + \mu b)\big) =$
  $= D\big(\lambda E(a) + \mu E(b)\big) - E\big(\lambda D(a) + \mu D(b)\big) =$
  $= \lambda D\big(E(a)\big) + \mu D\big(E(b)\big) - \lambda E\big(D(a)\big) - \mu E\big(D(b)\big) =$
  $= \lambda(D \circ E - E \circ D)(a) + \mu(D \circ E - E \circ D)(b)$

- $(D \circ E - E \circ D)(ab) = D\big(aE(b) + E(a)b\big) - E\big(aD(b) + D(a)b\big) =$
  $= D(a)E(b) + a(D \circ E)(b) + (D \circ E)(a)b + E(a)D(b) - E(a)D(b) - a(E \circ D)(b) - (E \circ D)(a)b - D(a)E(b) =$
  $= a(D \circ E)(b) - a(E \circ D)(b) + (D \circ E)(a)b - (E \circ D)(a)b =$
  $= a(D \circ E - E \circ D)(b) + (D \circ E - E \circ D)(a)b$

2 Lista 2.1-2.3

1. *Sia S^n la sfera unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$. Trovare un'atlante differenziabile di S^n con $n+1$ carte.*

Consideriamo $S_n = \{(x_1, ..., x_n + 1) \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\|^2 = x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ la sfera in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Chiamiamo $U_{i+} = \{(x_1, ..., x_n + 1) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1, x_i > 0\}$ e $U_{i-} = \{(x_1, ..., x_n + 1) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1, x_i < 0\}$. E sia

$$\phi_{i+} : U_{i+} \to \{(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 < 1\} = V_i$$
$$\phi_{i+}((x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n + 1)) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n + 1)$$

$$\phi_{i+}^{-1} : V_i \to U_{i+}$$
$$\phi_{i+}^{-1}((y_1, ..., y_n)) = (y_1, ..., y_{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|}, ..., y_n)$$

adesso queste sono continue perché le componenti sono continue. Pertanto l'unione di (U_{i+}, ϕ_{i+}) e (U_{i-}, ϕ_{i-}) è un atlante topologico con $2(n+1)$ carte. Vediamo se le carte sono compatibili

$$\phi_{i+} \circ \phi_{j-}^{-1} : \phi_{j-}(U_{i+} \cap U_{i-}) \to \phi_{i+}(U_{i+} \cap U_{i-})$$
$$(y_1, ..., y_n) \to (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_{j-1}, \sqrt{1 - \|y\|}, y_{j+1}, ..., y_n)$$

che è di classe C^∞ poiché lo sono le componenti, infatti l'unico problema potrebbe essere dato da $\sqrt{1 - \|y\|}$ ma siccome $(y_1, ..., y_n) \in \phi_{j-}(U_{i+} \cap U_{i-})$ si ha che $\|y\| < 1$. Lasciamo al lettore di verificare gli altri casi, che sono totalmente analoghi.

2. *Dimostrare che le strutture differenziabili su S^n definite dall'esercizio precedente e dalle proiezioni stereografiche coincidono.*

Per mostrare che le due strutture differenziabili coincidono vediamo che le carte della proiezione stereografica sono C^∞ con quelle polari, in questo caso infatti l'atlante differenziabile che le contiene sarà lo stesso e quindi avrò la stessa struttura differenziabile.

Mostriamo che, usando le notazioni del punto precedente (U_{i+}, ϕ_{i+}) e (U_N, π_N) sono compatibili, con $U_N = S^n \backslash \{N\}$ e π_N proiezione dal polo nord. Si ha che

$$\phi_{i+} \circ \pi_N^{-1} : \pi_N(U_N \cap U_{i+}) \to \pi_{i+}(U_N \cap U_{i+})$$
$$(y_1, ..., y_n) \to \left(\frac{y_1}{1 + \|y\|^2}, ..., \frac{y_{i-1}}{1 + \|y\|^2}, \frac{y_{i+1}}{1 + \|y\|^2}, ..., \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2}\right)$$

che è ovviamente una funzione C^∞, perché lo sono le componenti. Equivalentemente

$$\phi_N \circ \pi_{i+}^{-1} : \pi_{i+}(U_N \cap U_{i+}) \to \pi_N(U_N \cap U_{i+})$$
$$(y_1, ..., y_n) \to \left(\frac{y_1}{1-y_n}, ..., \frac{\sqrt{1-\|y\|^2}}{1-y_n}, ..., \frac{y_{n-1}}{1-y_n} \right)$$

Si nota che essendo $U_N \cap U_{i+} = \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n < 1 \quad \wedge \quad y_n \neq 1\}$ questa è ben definita ed è C^∞, infatti derivando il termine i-esimo $\sqrt{1-\|y\|^2} > 0$ e il denominatore non si annulla mai.

3. *Sia S uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza aperta su S. Dimostrare che lo spazio quoziente $S/\sim$ e T_2 se e solo se $R = \{(x, y) \in SxS | x \sim y\}$ è un sottoinsieme chiuso di SxS.*

Guardare il libro di "introduzione alla topolgia generale", Andrea Loi, edito Aracne, pagina 138.

4. *Sia S uno spazio topologico N_2 e $\sim$ una relazione d'equivalenza aperta su S. Dimostrare che lo spazio quoziente $S/\sim$ e N_2.*

Guardare il libro di "introduzione alla topolgia generale", Andrea Loi, edito Aracne, pagina 138.

5. *Dimostrare che la grassmanniana $G(k, n)$ é uno spazio topologico connesso e compatto.*

Vediamo prima di tutto la connessione. Abbiamo definito la Grassmaniana come l'insieme dei sottospazi K-dimensionali in $\mathbb{R}^n$. Se consideriamo una particolare rotazione di $\mathbb{R}^n$ in modo che il sottospazio K-dimensionale, che chiameremo U coincida con il sottospazio $V = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_{n-k} = ... = x_n = 0\}$, in questo modo consideriamo la proiezione

$$\pi : V \to \mathbb{R}^k \qquad \text{tale che} \qquad \pi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ...x_k)$$

che è una biezione (l'inversa è l'applicazione che associa a $(x_1, ...x_k)$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ $(x_1, ...x_k, 0, ..., 0)$) continua con inversa continua. Siccome anche la rotazione è un omeomorfismo abbiamo che U è omeomorfo a $\mathbb{R}^k$ ed essendo quest'ultimo connesso anche U è connesso. Si nota infine che $G(k, n) =$

$\bigcup_{i\in I} U_i$ ovvero è unione di connessi che hanno il punto $(0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ in comune. Allora $G(k,n)$ è connesso.

Vediamo la compattezza. Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione k. Per Gram-Schmidt considero $(w_1,...,w_k)$ una base ortonormale di W , dove i w_i sono quindi tali che $<w_i,w_j>= \delta_i j$. Consideriamola allora come una matrice di n righe e k colonne (ogni elemento della base è una colonna). Sappiamo che due k-ple generano lo stesso sottospazio se e solo se esiste una matrice invertibile, che sarebbe la matrice di cambiamento di base. Nel caso di due basi ortonormali però la matrice di cambiamento deve essere ortogonale (da GEOMETRIA 2). Consideriamo allora linsieme, per rispettare le notazioni usate a lezione, $\bar{F}(k,n) = \{A \in M_{nxk} | <a_i,a_j>= \delta_{ij}\}$. Adesso $\bar{F}(k,n) \subseteq F(k,n)$ e considero in $\bar{F}(k,n)$ la relazione $A \sim B \Longleftrightarrow \exists M \in O(k) | A = BM$.

Adesso $\bar{F}(k,n)$ è compatto infatti visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n k$ è chiuso e limitato. Chiuso perchè presa

$$f_{ij} : M_{nxk} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad f_{ij}(A) =< a_i, a_j >$$

allora $\bar{F}(k,n) = [\bigcap_{i,j=1 i\neq j}^{k} f_{ij}^{-1}(0)] \cap [\bigcap_{i=1}^{k} f_{ii}^{-1}(1)]$ che è intersezione di chiusi (controimmagine di chiuso mediante funzione continua). Inoltre presa $A \in \bar{F}(k,n)$ si ha $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}$ pertanto è limitato. Siccome $\bar{F}(k,n)$ è compatto anche $\frac{\bar{F}(k,n)}{\sim}$ è compato. Si consideri allora

$$h : \frac{\bar{F}(k,n)}{\sim} \to \frac{F(k,n)}{\sim} \qquad \text{tale che} \qquad H([A]_O) = [A]_G$$

ovvero che alla classe $[A]_O = \{B \in M_{nxk} | B = AO\}$ con $O \in O(k)$ associa $[A]_G = \{B \in M_{nxk} | B = AG\}$ con $G \in GL(k)$. L'applicazione è ben definita poiché se $A \sim B$ allora $B = AO$ ma se $O \in O(k)$ evidentemente $O \in GL(k)$, cioè $[B]_G = [A]_G$. L'applicazione è continua, si consideri

$$g : \bar{F}(k,n) \to \frac{F(k,n)}{\sim} \qquad \text{tale che} \qquad g(A) = [A]_G$$

e il classico diagramma visto anche a lezione. Siccome g scende a quoziente allora $h \circ \pi = g$. g è continua, perché composizione dell'inclusione tra $\bar{F}$ e F e della proiezione rispetto alla relazione di equivalenza vista in classe, ma allora h è continua. Infine h è suriettiva, sia $[B]_G \in \frac{F(k,n)}{\sim}$ con $B = (b_1|...|b_k)$ e $b_i \in \mathbb{R}^n$. Usando Gram-Schmid riesco a trovare un'altra k-pla di vettori che generino lo stesso spazio e che siano ortonormali e chiamiamola $A = (a_1|...|a_k)$. Siccome generanolo stesso spazio allora esse sono collegate dalla matrice di cambiamento di base $G \in GL(k)$, cioè $[B]_G = [A]_G$. Ma allora $h([A]_O) = [A]_G = [B]_G$, cioè h è suriettiva.

Allora si ha che $h(\frac{\bar{F}(k,n)}{\sim}) = \frac{F(k,n)}{\sim} = G(k,n)$ è compatta perché immagine di compatto tramite applicazione continua.

6. *Siano M e N due varietà differenziabili e $q_0 \in N$. Dimostrare che*

$$i_{q_0} : M \to MxN$$
$$p \to (p, q_0)$$

è un'applicazione liscia.

Sia (U, ϕ) carta di M intorno a p e (V, ψ) carta di N intorno a q_0. Consideriamo allora$(\phi \mathrm{x} \psi) \circ i_{q_0} \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap i_{q_0}^{-1}(U\mathrm{x}V) \to \mathbb{R}^{m+n}$ che sarebbe $(\phi \mathrm{x} \psi) \circ i_{q_0} \circ \phi^{-1}(\phi(p)) = (\phi \mathrm{x} \psi) \circ i_{q_0} \circ \phi^{-1}(p) = (\phi \mathrm{x} \psi)(p, q_0) = (\phi(p), \psi(q_0))$.

Siccome le componenti dell'applicazione sono C^∞ poiché ψ e ϕ sono carte quindi funzioni C^∞, allora l'applicazione i_{q_0} è C^∞.

7. *Sia S^1 il cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che una funzione liscia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si restringe ad una funzione liscia $f_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}$.*

Consideriamo come carte della sfera le proiezioni stereografiche e gli insiemi $(S^1 \backslash \{N\}, \pi_N)$

8. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \to (x, y, xy)$. Sia $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$F_{*p}(\frac{\partial}{\partial x}_{|p}) = a\frac{\partial}{\partial u}_{|F(p)} + b\frac{\partial}{\partial v}_{|F(p)} + c\frac{\partial}{\partial w}_{|F(p)}$$

Applichiamo a $F_{*_p}(\frac{\partial}{\partial x}_{|p})$ l'applicazione proiezione della prima componente, cioè

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad u(u, v, w) = u$$

Allora a sinistra si ottiene $F_{*_p}(\frac{\partial}{\partial x}_{|p})(u) = \frac{\partial}{\partial x}_{|p}(u \circ F(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}_{|p}(x) = 1$. D'altra parte a destra ottengo solo a. Pertanto in conclusione si ottiene $a = 1$. Si itera il ragionamento applicando la proiezione sulla seconda e la terza componente ed infine si ottiene $b = 0$ mentre per c si ha:

$F_{*_p}(\frac{\partial}{\partial x}_{|p})(w) = \frac{\partial}{\partial x}_{|p}(w \circ F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}_{|p}(xy) = y'$ se $p = (x', y')$. Ovvero $c = y'$.

Si osservi che nelle notazioni di Geometria 4, se consideriamo F una parametrizzazione $X(u,v) = (u, v, uv)$ si sta calcolando $X_u = (1, 0, v)$ come ottenuto anche sopra.

9. *Siano x, y le coordinate standard su $\mathbb{R}^2$ e $U = \mathbb{R}^2\ \{(0,0)\}$. In U le coordinate polari $(\rho, \theta), \rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ sono definite come $x = \rho \cos\theta$ e $x = \rho \sin\theta$. Si scrivano $\frac{\partial}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$ in funzione di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.*

Siano su $\mathbb{R}^2$ le carte $(\mathbb{R}^2, Id)$ e (U, ϕ) dove U è il piano senza la semiretta positiva delle x e ϕ sono le trasformazioni delle coordinate polari, cioè $\phi^{-1} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Sia $p = (x_0, y_0)$.

Per la legge di passaggio tra carte vista a lezione si ha che

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho}(p)\frac{\partial}{\partial x}_{|p} + \frac{\partial y}{\partial \rho}(p)\frac{\partial}{\partial y}_{|p}$$

Adesso $\frac{\partial x}{\partial \rho}(p) = \frac{\partial x \circ \phi^{-1}}{\partial r}(\phi(p)) = \frac{\partial \rho\cos\theta}{\partial \rho}(\phi(p)) = \cos\theta_{|\phi(p)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Dove l'ultima uguaglianza segue invertendo le trasformazioni di coordinate polari. Operando allo stesso modo si trova $\frac{\partial y}{\partial \rho}(p) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta}(p) = -y$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}(p) = x$.

. 10. *Sia $p = (x, y)$ un punto di $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$c_p(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

è una curva liscia in $\mathbb{R}^2$ che inizia in p. Calcolare $c'(0)$.

Consideriamo $c(t) = (x\cos 2t - y\sin 2t, x\sin 2t + y\cos 2t)$. Ora per definizione $c'(0) = c_{*0}(\frac{d}{dt}_{|0}) \in T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ allora ho che $c_{*0}(\frac{d}{dt}_{|0}) = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$. Applichiamo pertanto prima la x e allora $c_{*0}(\frac{d}{dt}_{|0})(x) = \frac{d}{dt}_{|0}(x \circ c) = \frac{d}{dt}_{|0}(x\cos 2t - y\sin 2t) = -2y$.

Applicando poi y si trova che $b = 2x$.

11. *Siano M e N varietà differenziabilità e $\pi_1 : MxN \to M$ e $\pi_2 : MxN \to n$ le priezioni naturali. Dimostrare che per $(p,q) \in MxN$ l'applicazione*

$$(\pi_{1_{*p}}, \pi_{2_{*p}}) : T_{(p,q)}MxN \to T_pMxT_qN$$

é un isomorfismo.

Sia (U, φ) carta di M in p e sia (V, ψ) carta di N in q. Allora $(U \times V, \varphi \times \psi)$ è una carta di $M \times N$ in (p, q). Siano B_M, B_N e $B_{M\times N}$ le basi di T_pM, T_qN e $T_{(p,q)}(M \times N)$ associate alle carte $(U, \varphi), (V, \psi)$ e $(U \times V, \varphi \times \psi)$ rispettivamente.
Allora la matrice associata a $\pi_{1*_{(p,q)}}$ rispetto alle basi $B_{M\times N}$ e B_M è $J\pi_1(p, q) = J\big(\varphi \circ \pi_1 \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\big)\big((\varphi \times \psi)(p, q)\big)$.
Sia $(x, y) \in \varphi(U) \times \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Allora $\big(\varphi \circ \pi_1 \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\big)(x, y) = (\varphi \circ \pi_1)\big(\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = x$.
Quindi, sia $\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ proiezione. Allora $J\pi_1(p, q) = J\pi\big(\varphi(p), \psi(q)\big)$.
Sia $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m + n$. Allora $\frac{\partial \pi_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}$. Quindi $\big[J\pi_1(p, q)\big]_{ij} = \delta_{ij}$.
Analogamente, sia $\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ proiezione. Allora $J\pi_2(p, q) = J\pi\big(\varphi(p), \psi(q)\big)$.
Sia $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m+n$. Allora $\frac{\partial \pi_i}{\partial r_j} = \delta_{i(j-m)}$. Quindi $\big[J\pi_2(p, q)\big]_{ij} = \delta_{i(j-m)}$.
Sia $(v_1, \ldots, v_{m+n})_{B_{M\times N}} \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Allora, rispetto alle basi $B_{M\times N}$ e B_M,

$$\begin{aligned}
&\pi_{1*_{(p,q)}}(v_1, \ldots, v_{m+n}) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m+n} \big[J\pi_1(p, q)\big]_{1k} v_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m+n} \big[J\pi_1(p, q)\big]_{mk} v_k\right) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m+n} \delta_{1k} v_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m+n} \delta_{mk} v_k\right) = (v_1, \ldots v_m)
\end{aligned}$$

e rispetto alle basi $B_{M\times N}$ e B_N

$$\begin{aligned}
&\pi_{2*_{(p,q)}}(v_1, \ldots, v_{m+n}) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m+n} \big[J\pi_2(p, q)\big]_{1k} v_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m+n} \big[J\pi_2(p, q)\big]_{nk} v_k\right) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m+n} \delta_{1(k-m)} v_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m+n} \delta_{n(k-m)} v_k\right) = (v_{m+1}, \ldots, v_{m+n})
\end{aligned}$$

Quindi, rispetto alla base $B_{M\times N}$ e alla base di $T_pM \times T_qN$ ottenuta canonicamente da B_M e B_N,

$$\big(\pi_{1*_{(p,q)}}, \pi_{2*_{(p,q)}}\big)(v_1, \ldots, v_{m+n}) = (v_1, \ldots, v_{m+n})$$

da cui $\big(\pi_{1*_{(p,q)}}, \pi_{2*_{(p,q)}}\big)$ è un isomorfismo.

3 Lista 2.4

1. *Siano S_1 e S_2 due sottovarietà di due varietà differenziabili M_1 e M_2 rispettivamente. Dimostrare che $S_1 \times S_2$ è una sottovarietà di $M_1 \times M_2$.*

Se S_1 ed S_2 sono sottovarietà, allora sono sottovarietà topologiche; quindi $S_1 \times S_2$ è sottovarietà topologica con la topologia prodotto. Dato $(q, p) \in S_1 \times S_2$, se S_1 è sottovarietà topologica, esiste una carta adattata in p (U_1, ϕ_1) tale che e per S_2 esiste una carta adattata in q (U_2, ϕ_2) tale che

$$U_2 \cap S_1 = \left\{ p \in U_2 \;\middle|\; y^{l+1}(\phi_2(p)) = \cdots = y^{m_2}(\phi_2(p)) = 0 \right\}$$

quindi $U1 \times U2$ è aperto di $M_1 \times M_2$.

$$\begin{aligned}(S_1 \cap U_1) \times (S_2 \cap U_2) &= (S_1 \times S_2) \cap (U_1 \times U_2)\\ &= \left\{ (q, p) \in U_1 \cap U_2 \;\middle|\; x^i(\phi_1(q)) = y^j(\phi_2(p)) = 0 \right\}\end{aligned}$$

con $i \in \{k + 1, \ldots, m_1\}$, $\quad j \in \{l + 1, \ldots, m_2\}$. Si ottiene quindi la carta adattata $(U_1 \times U_2, x^1, \ldots, x^{m_1}, y^1, \ldots, y^{m_2})$

2. *Sia $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - 6xy + y^2$. Trovare i $c \in \mathbb{R}$ tali che $F^{-1}(c)$ sia una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$.*

$\mathbb{R}^2$ è varietà con la carta $(\mathbb{R}^2, id)$. Cerco i punti di $\mathbb{R}^2$ per cui le derivate sono non tutte nulle. Poichè $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 6y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -6x + 2y$ allora

$$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y \\ -3x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y \\ -8y = 0 \end{cases}$$

l'unico punto critico è $(0, 0)$ quindi $F(0, 0) = 0$ è valore critico. $F^{-1}(c)$ è sottovarietà di dimensione 1 $\forall c \neq 0$. $F^{-1}(0)$ non è localmente euclideo, quindi non è sottovarietà differenziabile e nemmeno varietà.

3. *Dire se le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ z = xy \end{cases}$$

costituiscono una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$.

Partendo dal sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ z = xy \end{cases}$$

definiamo la funzione $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^3 + y^3 + z^3 - 1, z - xy)$. Allora

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ -y & -x & 1 \end{pmatrix}$$

Nei punti del tipo $(0, 0, z)$ ha rango 1, ma questi non appartengono ad S. Cerchiamo altri punti in cui il rango è 1:

$$\begin{cases} x^3 = y^3 \\ y^2 + xz^2 = 0 \\ x^2 + yz^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x(x + xz^2) = 0 \\ x(x + xz)^2 = 0 \end{cases}$$

cioè si ottengono i punti del tipo $(0, 0, z)$ che abbiamo già escluso, e i punti $(-z^2, -z^2, z)$, che non appartengono ad S. Quindi in S il rango è sempre 2, cioè 0 è un valore regolare per F, e $S = F^{-1}(0)$ è sottovarietà e $\dim S = 1$.

4. *Un polinomio $F(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n]$ è omogeneo di grado k se è combinazione lineare di monomi $x_0^{j_1} \ldots x_n^{j_m}$ di grado k, $\sum_{j=1}^{m} i_j = k$. Dimostrare che*

$$\sum_{i=0}^{n} x^i \frac{\partial F}{\partial x_i} = kF$$

Dedurre che $F^{-1}(c), c \neq 0$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$. Dimostrare inoltre che per $c, d > 0, F^{-1}(c)$ e $F^{-1}(d)$ sono diffeomorfe e lo stesso vale per $c, d < 0$. (Suggerimento per la prima parte: usare l'uguaglianza $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k F(x_0, \ldots, x_n)$ valida per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$).

Supponiamo $c \neq 0$. E' valore regolare? Calcolo lo Jacobiano di F: per la formula trovata, le derivate non sono tutte nulle ($kc \neq 0$), cioè esiste almeno un indice j tale che $\frac{\partial F}{\partial x^j} x^j$ diverso da zero. Quindi lo Jacobiano ha rango massimo, ed $F^{-1}(c)$ è sottovarietà di dimensione n-1.

Siano $c, d > 0$.

$$\begin{aligned} f \colon F^{-1}(c) &\to F^{-1}(d) \\ (x^0, \dots, x^n) &\mapsto (x^0 \sqrt[k]{\frac{d}{c}}, \dots, x^n \sqrt[k]{\frac{d}{c}}) \end{aligned}$$

sia $x = (x^0, \dots, x^n) \in F^{-1}(c)$; allora $f(x) \in F^{-1}(d)$, infatti:

$$\begin{aligned} F(f(x^0, \dots, x^n)) &= F(x^0 \sqrt[k]{\frac{d}{c}}, \dots, x^n \sqrt[k]{\frac{d}{c}}) \\ &= \sqrt[k]{\frac{d}{c}}^k F(x^0, \dots, x^n) \\ &= \frac{d}{c} F(x) = \frac{d}{c} c = d \end{aligned}$$

cioè $f(F^{-1}(c)) \subset F^{-1}(d)$. E' suriettiva, infatti dato $y \in F^{-1}(d)$, $x = (y^0 \sqrt[k]{\frac{c}{d}}, \dots, y^n \sqrt[k]{\frac{c}{d}}) \in F^{-1}(c)$ è tale che $f(x) = y$. Infatti,

$$f(x) = (y^0 \sqrt[k]{\frac{c}{d}} \sqrt[k]{\frac{d}{c}}, \dots, y^n \sqrt[k]{\frac{c}{d}} \sqrt[k]{\frac{d}{c}}) = (y^0, \dots, y^n)$$

Iniettività: se $x \sqrt[k]{\frac{d}{c}} = y \sqrt[k]{\frac{d}{c}} \implies x = y$. Infine è liscia perchè può essere vista come applicazione liscia da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ opportunamente ristretta da $F^{-1}(c)$ su $F^{-1}(d)$ (la restrtizione a $F^{-1}(d)$ è ancora liscia perchè è sottovarietà); per l'inversa vale un ragionamento analogo, essendo anche $F^{-1}(c)$ sottovarietà. Se $c, d < 0$ è analogo perchè $F(x \sqrt[k]{\frac{d}{c}}) = \frac{d}{c}(-c) = -d$

5. *Dimostrare che* $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$ *è una sottovarietà di* $M_n(\mathbb{C})$ *di dimensione* $2n^2 - 2$.

$SL_n(\mathbb{C}) = det{-1}(1)$ 1 è valore regolare, perchè data $A \in SL_n(\mathbb{C})$, $det(A) = x^{1,1}|M^{1,1}| + \dots + (-1)^{1+n} x^{1,n} |M^{1,n}| = 1$ (sviluppando rispetto alla prima riga). Esisterà almeno un addendo diverso da zero, e quindi in particolare esisterà un certo minore (supponiamo $M^{1,1}$) con determinante diverso da zero. Derivando rispetto a $x^{1,1}$ si ottiene $\frac{\partial det(A)}{\partial x^{1,1}} = |M^{1,1}| \neq 0$. Quindi 1 è valore regolare, e $SL_n(\mathbb{C})$ è sottovarietà di dimensione $2n^2 - 2$.

6. *Sia $F\colon N \to M$ un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Dimostrare che l'insieme PR_F dei punti regolari di F è un aperto di N.*

Sia p punto regolare; allora lo Jacobiano $JF(p)$ ha rango massimo, cioè esiste un minore di ordine m con determinante diverso da zero, supponiamo che sia maggiore di zero. Quindi essendo il determinante una funzione liscia, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno U in cui il segno si mantiene, e risulta quindi che $p \in U \subset P_RF$.

7. *Sia $F\colon N \to M$ un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Dimostrare che se F è chiusa allora VR_F (insieme dei punti regolari di F) è aperto in M.*

Per l'esercizio 6, PR_F è un aperto di N. Allora $PC_F = N \setminus PR_F$ è chiuso in N. Poiché F è chiusa $VC_F = F(PC_F)$ è chiuso in M e quindi $VR_F = M \setminus VC_F$ è aperto in M.

8. *Dimostrare che $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(t) = (t, t^2, t^3)$ è un embedding liscio e scrivere $F(\mathbb{R})$ come zero di funzioni.*

Sia

$$\begin{aligned} \pi\colon F(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x \end{aligned}$$

Allora $\pi = F^{-1}$. Inoltre π e F sono C^∞. In particolare $F\colon \mathbb{R} \to F(\mathbb{R})$ è un omeomorfismo e quindi F è un embedding topologico.

Proposizione. *Sia $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funzione liscia. Sia $p \in \mathbb{R}^n$. Siano $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}_{|p}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}_{|p}\right\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}_{|F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}_{|F(p)}\right\}$ basi di $T_p\mathbb{R}^n$ e $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ rispettivamente. Sia $\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|p} \in T_p\mathbb{R}^n$. Allora*

$$F_{*_p}\left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|p}\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \cdot v_i\right) \frac{\partial}{\partial y_j}_{|F(p)}$$

Dimostrazione. *Sia* $f \in C^\infty_p(\mathbb{R}^m)$*. Allora*

$$\begin{aligned}
F_{*_p}\left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|_p}\right)(f) &= \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|_p}\right)(f\circ F) = \\
&= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|_p}(f\circ F) = \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}\big(F(p)\big)\cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) = \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p)\cdot v_i\right)\frac{\partial}{\partial y_j}_{|_{F(p)}}(f) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p)\cdot v_i\right)\frac{\partial}{\partial y_j}_{|_{F(p)}}\right)(f)
\end{aligned}$$

Sia $t \in \mathbb{R}$. Sia $v\frac{d}{ds}_{|_t} \in T_t\mathbb{R}$. Per la proposizione

$$F_{*_t}\left(v\frac{d}{ds}_{|_t}\right) = (v, 2vt, 3vt^2) \in T_{F(t)}\mathbb{R}^3$$

Quindi F_{*_t} è un'applicazione iniettiva. Dunque F è anche un'immersione e quindi un embedding liscio.

$F(\mathbb{R}) = \{(t,t^2,t^3) \in \mathbb{R}^3\}$. Sia $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$(x,y,z) \in F(\mathbb{R}) \Leftrightarrow y = x^2 \wedge z = x^3$$

Quindi $F(\mathbb{R}) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y - x^2 = 0 \wedge z - x^3 = 0\big\}$.
Sia

$$\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x,y,z) &\mapsto (y-x^2, z-x^3)
\end{aligned}$$

Allora $F(\mathbb{R}) = g^{-1}(0,0)$.

9. *Dimostrare che* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $F(t) = (\cosh t, \sinh t)$ *è un embedding liscio e* $F(\mathbb{R}) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\big\}$.

L'inversa di F è

$$\begin{aligned}
F^{-1}\colon F(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto \sinh^{-1}(y)
\end{aligned}$$

che è continua. Quindi F è un embedding topologico. Sia $t \in \mathbb{R}$. Allora $\forall v \in \mathbb{R} \quad F_{*_t}(v) = (v \sinh t, v \cosh t)$. F_{*_t} è iniettiva. Quindi F è un embedding liscio.
Vediamo che $F(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1 \wedge x > 0\}$:

$$\begin{aligned} &(x, y) \in F(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \colon x = \cosh t \wedge y = \sinh t \Rightarrow \\ &x^2 - y^2 = \cosh^2 t - sinh^2 t = 1 \wedge x = cosht > 0 \end{aligned}$$

Sia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^2 - y^2 = 1 \wedge x > 0$. Poiché sinh è suriettiva esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $y = \sinh t$. Allora $x^2 = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$ da cui $x = \cosh t$ (perché $x > 0$).

10. *Dimostrare che la composizione di immersioni è un'immersione e che il prodotto cartesiano di due immersioni è un'immersione.*

Siano N, M, P varietà e siano $F \colon N \to M$ e $G \colon M \to P$ immersioni. Sia $p \in N$. Il differenziale $(G \circ F)_{*_p} = G_{*_{F(p)}} \circ F_{*_p}$ ed è dunque iniettivo perché composizione di funzioni iniettive. Quindi $G \circ F$ è un'immersione.

Per ogni $i = 1, 2$ sia $F_i \colon N_i \to M_i$ immersione.
Sia $G = F_1 \times F_2 \colon N_1 \times N_2 \to M_1 \times M_2$.
Sia $p = (p_1, p_2) \in N_1 \times N_2$. Allora $G_{*_p} \colon T_p(N_1 \times N_2) \to T_{G(p)}(M_1 \times M_2)$.
Per ogni $i = 1, 2$ siano $\pi_i^N \colon N_1 \times N_2 \to N_i \quad$ e $\quad \pi_i^M \colon M_1 \times M_2 \to M_i$. Allora

$$\begin{aligned} \pi_p^N = \left(\pi_1^N{}_{*_p}, \pi_2^N{}_{*_p}\right) &\colon T_p(N_1 \times N_2) \to T_{p_1} N_1 \times T_{p_2} N_2 \quad \text{e} \\ \pi_{G(p)}^M = \left(\pi_1^M{}_{*_{G(p)}}, \pi_2^M{}_{*_{G(p)}}\right) &\colon T_{G(p)}(M_1 \times M_2) \to T_{F_1(p_1)} M_1 \times T_{F_2(p_2)} M_2 \end{aligned}$$

sono isomorfismi.
Sia

$$f = \pi_{G(p)}^M \circ G_{*_p} \circ \left(\pi_p^N\right)^{-1} \colon T_{p_1} N_1 \times T_{p_2} N_2 \to T_{F_1(p_1)} M_1 \times T_{F_2(p_2)} M_2$$

Facciamo vedere che $f = F_{1*_{p_1}} \times F_{2*_{p_2}}$. Questo è vero se e solo se

$$\pi_{G(p)}^M \circ G_{*_p} = \left(F_{1*_{p_1}} \times F_{2*_{p_2}}\right) \circ \pi_p^N$$

Si ha

$$\pi_{G(p)}^M \circ G_{*_p} = \left(\pi_1^M{}_{*_{G(p)}}, \pi_2^M{}_{*_{G(p)}}\right) \circ G_{*_p} = \left(\left(\pi_1^M \circ G\right)_{*_p}, \left(\pi_2^M \circ G\right)_{*_p}\right)$$

e

$$\begin{aligned}\big(F_{1*_{p_1}} \times F_{2*_{p_2}}\big) \circ \pi_p^N &= \big(F_{1*_{p_1}} \times F_{2*_{p_2}}\big) \circ \big({\pi_1^N}_{*_p}, {\pi_2^N}_{*_p}\big) = \\ &= \big(F_{1*_{p_1}} \circ {\pi_1^N}_{*_p}, F_{2*_{p_2}} \circ {\pi_2^N}_{*_p}\big) = \big(\big(F_1 \circ \pi_1^N\big)_{*_p}, \big(F_2 \circ \pi_2^N\big)_{*_p}\big)\end{aligned}$$

Sia $(q_1, q_2) \in N_1 \times N_2$. Allora per ogni $i = 1, 2$

$$\big(\pi_i^M \circ G\big)(q_1, q_2) = \pi_i^M\big(F_1(q_1), F_2(q_2)\big) = F_i(q_i) = \big(F_i \circ \pi_i^N\big)(q_1, q_2)$$

Quindi

$$\big(\big(\pi_1^M \circ G\big)_{*_p}, \big(\pi_2^M \circ G\big)_{*_p}\big) = \big(\big(F_1 \circ \pi_1^N\big)_{*_p}, \big(F_2 \circ \pi_2^N\big)_{*_p}\big)$$

da cui

$$\pi_{G(p)}^M \circ G_{*_p} \circ \big(\pi_p^N\big)^{-1} = F_{1*_{p_1}} \times F_{2*_{p_2}}$$

Dato che $\pi_{G(p)}^M$ e π_p^N sono isomorfismi, G_{*_p} è iniettiva se e solo se $F_{1*_{p_1}} \times F_{2*_{p_2}}$ è iniettiva. Per ipotesi $F_{1*_{p_1}}$ e $F_{2*_{p_2}}$ sono iniettive e quindi G_{*_p} è iniettiva. In conclusione, G è un'immersione.

11. *Dimostrare che se $F\colon N \to M$ è un'immersione e $Z \subseteq N$ è una sottovarietà di N allora $F_{|_Z}\colon Z \to M$ è un'immersione.*

Sia $i\colon Z \to N$ inclusione. Sia $p \in Z$. Vediamo che $i_{*_p}\colon T_pZ \to T_pN$ è iniettivo.
Sia (U, φ) carta adattata di N in p relativamente a Z. Supponiamo $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Allora $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}_{|_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}_{|_p}\right\}$ è una base di T_pN. Sia k la dimensione di Z. Sia $V = U \cap Z$ e sia $\varphi_Z = \pi_k \circ \varphi_{|_V}$. Allora (V, φ_Z) è una carta di Z in p. Supponiamo $\varphi_Z = (y_1, ..., y_k)$. Allora $\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}_{|_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_k}_{|_p}\right\}$ è una base di T_pZ. Vediamo che per ogni $\sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial y_i}_{|_p} \in T_pZ$ si ha che

$$i_{*_p}\left(\sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial y_i}_{|_p}\right) = \sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|_p}$$

Sia $f \in C_p^\infty(N)$. Allora

$$i_{*_p}\left(\sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial y_i}_{|_p}\right)(f) = \left(\sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial y_i}_{|_p}\right)(f \circ i) = \sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial (f \circ i)}{\partial y_i}(p)$$

Sia $i = 1, \dots, k$. Allora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f \circ i)}{\partial y_i}(p) &= \frac{\partial(f \circ i \circ {\varphi_Z}^{-1})}{\partial r_i}\big(\varphi_Z(p)\big) = \frac{\partial(f \circ i \circ {\varphi_{|V}}^{-1} \circ i_k)}{\partial r_i}\big((\pi_k \circ \varphi)(p)\big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j}\big(\varphi(p)\big) \cdot \left(\frac{\partial i_k}{\partial r_i}\big(\pi_k \circ \varphi(p)\big)\right)_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot \delta_{ij} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)
\end{aligned}$$

Infatti $\varphi_{|V} = \varphi \circ i$ implica $i \circ {\varphi_{|V}}^{-1} = \varphi^{-1}$. Quindi

$$i_{*_p}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i \frac{\partial}{\partial y_i}_{|p}\right)(f) = \sum_{i=1}^{k} v_i \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \sum_{i=1}^{k} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|p}(f)$$

Da ciò si trova che i_{*_p} è iniettivo. Sia $G = F_{|Z}$. Allora $G = F \circ i$. Dunque per ogni $p \in Z$ si ha $G_{*_p} = F_{*_p} \circ i_{*_p}$, da cui G_{*_p} è iniettiva in quanto composizione di iniettive.

12. *Dimostrare che l'applicazione*

$$\begin{aligned}
F \colon S^2 &\to \mathbb{R}^4 \\
(x, y, z) &\mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz)
\end{aligned}$$

induce un embedding liscio da $\mathbb{R}P^2$ *a* $\mathbb{R}^4$.

Sia

$$\begin{aligned}
\pi \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}P^2 \\
(x, y, z) &\mapsto [x, y, z]
\end{aligned}$$

la proiezione canonica. π è continua. Vediamo che π è C^∞.
Sia $\big\{(U_i, \varphi_i)\big\}_{i=1}^3$ l'atlante differenziabile di $\mathbb{R}P^2$ visto a lezione. $U_1 = \big\{[a, b, c] \in \mathbb{R}P^2 \colon a \neq 0\big\}$ e

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \colon U_1 &\to \mathbb{R}^2 \\
[a, b, c] &\mapsto \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \pi \colon \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \neq 0\big\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \end{aligned}$$

è liscia. Analogo per $\varphi_2 \circ \pi$ e $\varphi_3 \circ \pi$. Quindi π è liscia e anche $\pi \colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ è liscia, essendo S^2 una sottovarietà di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Vediamo ora che per ogni $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ $\pi_{*_p} \colon T_pS^2 \to T_{\pi(p)}\mathbb{R}P^2$ è un isomorfismo.
Supponiamo $p_1 \neq 0$ (altrimenti analogo). Allora $\pi(p) \in U_1$. Sia $(x_1, x_2) = \varphi_1$.
Allora $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}_{|\pi(p)}, \frac{\partial}{\partial x_2}_{|\pi(p)}\right\}$ è una base di $T_{\pi(p)}\mathbb{R}P^2$.
Sia $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1}_{|\pi(p)} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}_{|\pi(p)} \in T_{\pi(p)}\mathbb{R}P^2$. Sia

$$\begin{aligned} c \colon (-\varepsilon, \varepsilon) &\to S^2 \\ t &\mapsto (p_1, p_2 + tv_1p_1, p_3 + tv_2p_1) \end{aligned}$$

$c(0) = p$. Allora $\pi_{*_p}\big(c'(0)\big) = (\pi \circ c)'(0)$ e $(\pi \circ c)(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_1$. Per ogni $i = 1, 2$ sia $a_i = x_i \circ (\pi \circ c)$. Allora

$$\pi_{*_p}\big(c'(0)\big) = (\pi \circ c)'(0) = \frac{da_1}{dt}(0)\frac{\partial}{\partial x_1}_{|\pi(p)} + \frac{da_2}{dt}(0)\frac{\partial}{\partial x_2}_{|\pi(p)}$$

Per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$a_1(t) = (x_1 \circ \pi \circ c)(t) = \frac{c_2(t)}{c_1(t)} = \frac{p_2 + tv_1p_1}{p_1}$$

e

$$a_2(t) = (x_2 \circ \pi \circ c)(t) = \frac{c_3(t)}{c_1(t)} = \frac{p_3 + tv_2p_1}{p_1}$$

Allora

$$\frac{da_1}{dt}(0) = v_1 \quad \text{e} \quad \frac{da_2}{dt}(0) = v_2$$

Quindi $\pi_{*_p}\big(c'(0)\big) = v$, da cui π_{*_p} è suriettiva e quindi un isomorfismo.

Sia

$$\begin{aligned} G \colon \mathbb{R}P^2 &\to \mathbb{R}^4 \\ [x,y,z] &\mapsto F\left(\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|}\right) \end{aligned}$$

G è ben definita in quanto se $[x', y', z'] = [x, y, z]$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tale che $(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$.
Inoltre $G \circ \pi = F$, quindi G è l'applicazione indotta da F su $\mathbb{R}P^2$.
Vediamo che G è liscia.
Sia

$$\begin{aligned} \tilde{G} \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto F\left(\frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|}\right) \end{aligned}$$

$\tilde{G}$ è continua. Sia $\pi \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^2$ proiezione canonica. $\tilde{G} = G \circ \pi$. Allora per una proposizione fatta a lezione G è continua.
Sia $\big\{(U_i, \varphi_i)\big\}_{i=1}^3$ l'atlante differenziabile di $\mathbb{R}P^2$.

$$\begin{aligned} {\varphi_1}^{-1} \colon \mathbb{R}^2 &\to U_1 \\ (a, b) &\mapsto [1, a, b] \end{aligned}$$

Allora

$$\big(G \circ {\varphi_1}^{-1}\big)(a, b) = G\big([1, a, b]\big) = F\left(\frac{(1, a, b)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\right)$$

Quindi $G \circ {\varphi_1}^{-1}$ è C^∞ in quanto composizione di funzioni C^∞. Analogo per $G \circ {\varphi_2}^{-1}$ e $G \circ {\varphi_3}^{-1}$. Quindi G è C^∞.

Vediamo che G è iniettiva. Siano $(x, y, z), (a, b, c) \in S^2$ tali che $G\big([x, y, z]\big) = G\big([a, b, c]\big)$. Allora $(x^2 - y^2, xy, xz, yz) = (a^2 - b^2, ab, ac, bc)$.
Se $x = 0$ allora $y^2 = b^2$ da cui $y = \pm b$ e quindi $(x, y, z) = \pm(a, b, c)$.
Se $x \neq 0$ allora

$$\begin{aligned} &y = \frac{ab}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{a^2 b^2}{x^2} = a^2 - b^2 \Rightarrow x^4 - x^2 a^2 + x^2 b^2 - a^2 b^2 = 0 \Rightarrow \\ &= (x^2 - a^2)(x^2 + b^2) = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \vee x^2 = -b^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow \\ &x = \pm a \Rightarrow (x, y, z) = \pm(a, b, c) \end{aligned}$$

In ogni caso $[x, y, z] = [a, b, c]$. Quindi G è iniettiva.

Vediamo che F è un'immersione. Per ogni $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ abbiamo $F_{*_p} \colon T_p S^2 \to T_{F(p)} \mathbb{R}^4$.
Sia $v \in Ker(F_{*_p})$. Sia $c = (x, y, z) \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$ curva tale che $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Allora

$$F_{*_p}\big(v\big) = (F \circ c)'(0) = (F \circ c)_{*_0}\left(\frac{d}{dt}_{|_0}\right) = \sum_{i=1}^{4} \frac{d(F \circ c)_i}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x_i}_{|_{F(p)}}$$

con $B = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}_{|_{F(p)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_4}_{|_{F(p)}} \right\}$ base canonica di $T_{F(p)}\mathbb{R}^4$ e $\left\{ \frac{d}{dt}_{|0} \right\}$ base canonica di $T_0\mathbb{R}$.

$$(F \circ c)(t) = \big((x(t))^2 - (y(t))^2, x(t)y(t), x(t)z(t), y(t)z(t)\big)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d(F \circ c)}{dt}(0) = \big(&2x'(0)p_1 - 2y'(0)p_2, x'(0)p_2 + y'(0)p_1, \\ &x'(0)p_3 + z'(0)p_1, y'(0)p_3 + z'(0)p_2\big) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} 0 = F_{*_p}\big(v\big) = \big(&2x'(0)p_1 - 2y'(0)p_2, x'(0)p_2 + y'(0)p_1, \\ &x'(0)p_3 + z'(0)p_1, y'(0)p_3 + z'(0)p_2\big)_B \end{aligned}$$

Inoltre dato che $\big(x(t), y(t), z(t)\big) \in S^2$ per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ allora

$$\big(x(0), y(0), z(0)\big) \cdot \big(x'(0), y'(0), z'(0)\big) = 0$$

cioè $x'(0)p_1 + y'(0)p_2 + z'(0)p_3 = 0$. Ho allora il sistema

$$\begin{cases} 2p_1x'(0) - 2p_2y'(0) = 0 \\ p_2x'(0) + p_1y'(0) = 0 \\ p_3x'(0) + p_1z'(0) = 0 \\ p_3y'(0) + p_2z'(0) = 0 \\ p_1x'(0) + p_2y'(0) + p_3z'(0) = 0 \end{cases}$$

che ha come matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 2p_1 & -2p_2 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & p_3 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A.

$$\begin{vmatrix} 2p_1 & -2p_2 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \end{vmatrix} = 2p_1(p_1^2 + p_2^2)$$

$$\begin{vmatrix} 2p_1 & -2p_2 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & p_3 & p_2 \end{vmatrix} = 2p_2(p_1^2 + p_2^2)$$

$$\begin{vmatrix} p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & p_3 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = p_3(p_3^2 - p_2^2) - p_1^2 p_3 = p_3(p_3^2 - p_2^2 - p_1^2)$$

Dato che $p \in S^2$ allora $p \neq 0$. Se $p_1 \neq 0$ allora il primo determinante è diverso da zero. Se $p_2 \neq 0$ allora il secondo determinante è diverso da zero. Se $p_1 = p_2 = 0$ allora $p_3 \neq 0$ e quindi il terzo determinante è diverso da zero. Quindi $rango(A) = 3$, per cui il sistema ammette un'unica soluzione, ovvero $\big(x'(0), y'(0), z'(0)\big) = 0$.
Sia

$$\begin{aligned} d\colon (-\varepsilon, \varepsilon) &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

Allora $d = i \circ c$, con $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ inclusione.

$$d'(0) = \big(x'(0), y'(0), z'(0)\big)_B$$

e

$$d'(0) = (i \circ c)'(0) = (i \circ c)_{*0}\left(\frac{d}{dt}_{|0}\right) = i_{*_p}\big(c'(0)\big)$$

dove i_{*_p} è iniettiva.
Quindi se $\big(x'(0), y'(0), z'(0)\big) = 0$ allora $i_{*_p}\big(c'(0)\big) = 0$ da cui $v = c'(0) = 0$.
Dunque $Ker(F_{*_p}) = \{0\}$ e quindi F_{*_p} è iniettiva.

Vediamo ora che G è un'immersione. $G \circ \pi = F$. Sia $p \in \mathbb{R}P^2$. Dato che π è suriettiva esiste $q \in S^2$ tale che $\pi(q) = p$. Allora

$$F_{*_q} = (G \circ \pi)_{*_q} = G_{*_p} \circ \pi_{*_q}$$

Dato che π_{*_q} è un isomorfismo e F_{*_q} è iniettiva, si ha che G_{*_p} è iniettiva.

Per concludere, per una proposizione vista a lezione, dato che $G\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ è un'immersione iniettiva e $\mathbb{R}P^2$ è compatta allora G è un embedding liscio.

13. *Dimostrare che un'immersione iniettiva e propria é un embedding liscio. Mostrare che esistono embedding lisci che non sono applicazioni proprie. (Ricorda che un'applicazione continua $f : X \to Y$ tra spazi topologici è propria se $f^{-1}(K)$ è compatto in X per ogni compatto K di Y).*

Data $f : N \to M$ immersione iniettiva propria, mostriamo che $f : N \to f(N)$ è chiusa e continua.

Questa è continua perché se C è chiuso di $f(N)$ allora questo è compatto perché $f(N)$ è T_2 ed è un compatto anche in M. Ma dunque siccome f è propria, $f^{-1}(C)$ è compatto in N, ma allora essendo un compatto sottoinsieme di T_2, è chiuso. Siccome la controimmagine di un chiuso è un chiuso, $f : N \to f(N)$ è continua.

Questa è chiusa perché se B è chiuso di N siccome N è di Hausdorf (T_2) allora B è compatto, perciò $f(B)$ è compatto in M essendo immagine di compatto tramite funzione continua. Ora $f(B)$ è compatto in M se e solo se è compatto in $F(N)$ con la topologia indotta, ma siccome $f(N)$ è T_2 allora $f(B)$ è chiuso. Perciò l'applicazione è chiusa.

Siccome $f : N \to f(N)$ è chiusa e continua e biettiva allora è un omeomorfismo, pertanto $f : N \to M$ è un embedding liscio.

Consideriamo adesso

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to e^x \end{aligned}$$

Questa non è propria, infatti $g^{-1}([0, 1]) = (-\infty, 0]$ che non è compatto in $\mathbb{R}$. Tuttavia questa è un embedding liscio. Infatti è iniettiva, è C^∞ ed è un immersione poiché $Jg(x) = g'(x) = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre è un embedding topologico poiché $g : \mathbb{R} \to (0, \infty) = g(\mathbb{R})$ è biettiva con inversa $\log(x)$ che è continua.

Pertanto g è un embedding liscio ma non è propria.

4 Lista 2.5

1. *Sia N una sottovarietà di una varietà differenziabile M. Dimostrare che TN è una sottovarietà di TM.*

Sia (v,p) un elemento di TN, costruiamo una carta di TM adattata in (v,p) rispetto a TN. Consideriamo dato $p \in N$ la carta di M adattata in p rispetto a N come $(\phi, U) = (x_1, ..., x_n, U)$, allora $U \cap N = \{q \in U | x^{n+1}(q) = ... = x^m(q) = 0\}$. Sia adesso, con le notazioni viste a lezione, $(\tilde{\phi}, TU)$, questa è una carta di TM intorno a (v,p), infatti TU è aperto perché $\tilde{\phi}(TU) = \phi(U)\text{x}\mathbb{R}^m$ è aperto di $\mathbb{R}^m\text{x}\mathbb{R}^m$. Osserviamo adesso che, indicando $\nu = (v,p)$, $TU \cap TN = \{\nu \in TU | \tilde{x}^{n+1}(\nu) = ... = \tilde{x}^m(\nu) = 0\}$. Questo vale perché $TU \cap TN = T(U \cap N)$ e $\tilde{\phi}(T(U \cap N)) = \phi(U \cap N)\text{x}\mathbb{R}^n = \{\nu \in TU | (x^1(p), ..., x^n(p), 0, ..., 0, c_1(\nu), ..., c_m(\nu)\}$, quindi è proprio nella forma che volevo.

Siccome vale $\forall \nu = (v,p)$ del fibrato TN, ho che questo è una sottovarietà.

2. *Una varietà differenziabile è detta orientabile se esiste un atlante di M rispetto al quale il determinante Jacobiano dei cambi di carte è positivo. Dimostrare che:*

- *a) $\mathbb{R}P^3$ è una varietà orientabile;*
- *b) il fibrato tangente TM di una varietà differenziabile M è orientabile.*

a)

Consideriamo l'usuale atlante differenziale di $\mathbb{R}P^3$, $\{U_i, \phi_i\}_{i=1,2,3}$, vediamo se il determinante del cambio di coordinate mantiene sempre lo stesso segno, cioè sia $p \in U_i \cap U_j$, allora vediamo se $\det J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(p)) > 0$.

Operiamo nel caso generale di $\mathbb{R}P^n$. Si ha infatti che $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(b_1, ..., b_n) = \left(\frac{b_1}{b_j}, ..., \frac{b_{j-1}}{b_j}, \frac{b_{j+1}}{b_j}, ..., \frac{b_i}{b_j}, \frac{1}{b_j}, \frac{b_{i+1}}{b_j}, ..., \frac{b_n}{b_j}\right)$. Scrivendo la matrice dello jacobiano si vede

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b_j} & 0 & ... & -\frac{b_1}{b_j^2} & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_j} & ... & -\frac{b_1}{b_j^2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -\frac{b_1}{b_j^2} & ... & \frac{1}{b_j} \end{pmatrix}$$

Il cui determinante è, applicando laplace sulla prima colonna ad esempio, $-\frac{1}{b_j^2} * \frac{1}{b_j^{n-1}} < 0$ se n è dispari, nel nostro caso quindi $(n = 3)$ funziona tutto.

b)

Consideriamo il solito atlante del fibrato $\{(TU_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ (supposto $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ l'atlante differenziabile di M) ,consideriamo allora un elemento $\nu \in TM$ e due carte $(TU_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)$ e $(TU_\beta, \tilde{\phi}_\beta)$. Allora lo Jacobiano del cambio di coordinate, in base ai calcoli fatti a lezione, sarà una matrice a blocchi come:
$\begin{pmatrix} \frac{\partial(\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1})^i}{\partial r^j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1})^i}{\partial r^j} \end{pmatrix}$

Il determinante allora non cambia mai di segno ricordando che $\frac{\partial(\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1})^i}{\partial r^j}$ è il determinante del cambio di coordinate di M che era per ipotesi orientabile.

3. *Dimostrare che l'applicazione che associa ad ogni varietà differenziabile il suo fibrato tangente e ad ogni applicazione $F : N \to M$ tra varietà differenziabili l'applicazione $F_* : TN \to TM$ definita come $F_*((p, v)) = (F(p), F_{*p}(v))$ per ogni $(p, v) \in TN$ definisce un funtore covariante dalla categoria delle varietà differenziabili in se stessa.*

L'applicazione $\mathcal{F}$ va effettivamente dalla categoria delle varietà differenziabili in se stessa. Verficihiamo ora le prorietà funtoriali:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(I_N) = I_* : TN \to TN \\ &(v, p) \to (Id_{*p}(v), Id(p)) \end{aligned}$$

Ma ora $Id_{*p}(v)(f) = v(f \circ Id) = v(f)$, perciò $I_* = I_{TN}$.

Inoltre date $F : N \to M$ e $G : M \to P$, con M,N,P varietà differenziabili

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(G \circ F) = (G \circ F)_* : TN \to TP \\ &(v, p) \to ((G \circ F)_{*p}(v), (G \circ F)(p)) = (G_{*(F(p)} \circ F_{*p}(v), G(F(p))) \end{aligned}$$

dove nell'uguaglianza abbiamo usato la regola della catena del differenziale. E equivalentemente

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(G) \circ \mathcal{F}(F) : TN \to TM \to TP \\ &(v, p) \to (G_{*(F(p)} \circ F_{*p}(v), G(F(p))) \end{aligned}$$

allora $\mathcal{F}(G) \circ \mathcal{F}(F) = \mathcal{F}(G \circ F)$.

4. *Una derivazione di un'algebra di Lie $(V, [,])$ su un campo $\mathbb{K}$ è un'applicazione lineare $D : V \to V$ tale che*

$$D([Y, Z]) = [DY, Z] + [Y, DZ], \quad \forall Y, Z \in V.$$

Dimostrare che dato $X \in V$ l'applicazione

$$D_X : V \to V, \quad Y \to [X, Y]$$

è una derivazione.

Abbiamo che $D_X([Y, Z]) = [X, [Y, Z]]$, ,ma per la proprietà di Jacobi so che $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. Ma allora ho che

$$[X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] = -[Y, -[X, Z]] - (-[[X, Y], Z]) =$$
$$= [Y, D_X(Z)] + [D_X(Y), Z]$$

5. *Sia $M = \mathbb{R}\ \{0\}$ e $X = \frac{d}{dx} \in \chi(M)$. Trovare la curva integrale di X massimale che inizia in un generico punto $p \in \mathbb{R}$.*

Per trovare la curva $c(t) = x(t)$ massimale che passa per p risolviamo il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ x(0) = p \end{cases}$ che ha come soluzione $x(t) = t + c$ e dalla condizione iniziale $c = p$. Ovvero $x(t) = t + p$. Siccome però $M = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ si ha che $t \neq p$. Pertanto l'intervallo massimale è:
$(-p, +\infty)$ se $p > 0$;
$(-\infty, -p)$ se $p < 0$

6. *Trovare il flusso (locale) dei seguenti campi di vettori:*

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \in \chi(\mathbb{R}^2)$$

Nel caso siano completi calcolare il loro gruppo di diffeomorfismi ad un parametro.

Svolgiamo il primo, gli altri 2 sono equivalenti. Consideriamo una curva $c(t) = (x(t), y(t))$ e risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ \dot{y}(t) = y(t) \\ x(0) = p^1 \\ y(0) = p^2 \end{cases}$$

Questa ammette come soluzione $c(t) = (p^1 e^t, p^2 e^{-t})$. Ora il flusso è globale perché vale $\forall (p^1, p^2) \in \mathbb{R}^2$ e $\forall t \in \mathbb{R}$. Il gruppo di diffeomorfismi ad un parametro è

$$F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(p^1, p^2) \to (p^1 e^t, p^2 e^{-t})$$

Cioè

$$F_t(p^1, p^2) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix}$$

7. *Dimostrare che il campo di vettori* $X = \frac{d}{dx} \in \chi(\mathbb{R}^2 \ (0,0)$ *non è completo.*

Per vedere che il campo di vettori non è completo consideriamo la curva $c(t) = (x(t), y(t))$ e il sistema, con $(p^1, p^2) \neq (0, 0)$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ x(0) = p^1 \\ y(0) = p^2 \end{cases}$$

Questo ammette come soluzione $c(t) = (p^1 + t, p^2)$. Si vede che il campo non è completo perché su tutti i punti p dell'asse delle x, cioè della forma $(x, 0)\, x \in \mathbb{R}$, il valore $t = -x$ non è accettabile, in quel caso infatti si avrebbe $c(-x) = (-x + x, 0) = (0, 0)$.

8. *Sia* M *una varietà differenziabile e* $X \in \chi(M)$ *tale che* $X_p = 0$ *per ogni* $p \in M$. *Dimostrare che la curva integrale che inizia in* p *è la curva costante* $c(t) = p$.

Per cercare la curva integrale che inizia in $p \in M$ imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = X_{c(t)} \\ c(0) = p \end{cases}$$

Siccome $c : I \to M$ allora $c(t) \in M \quad \forall t \in M$ e dunque $X_{c(t)} = 0$ pertanto abbiamo che il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = 0 \\ c(0) = p \end{cases}$$

Che ammette come soluzione $c(t) = p$, cioè la curva costante in p.

9. *Sia M una varietà differenziabile e $X \in \chi(M)$ il campo di vettori nullo, $X = 0$. Descrivere il gruppo di diffeomorfismi ad un parametro associato.*

Abbiamo visto dall'esercizio 8. che se X è il campo di vettori nullo il flusso è dato da $F(t,p) = p$, ovvero al variare di $t \in \mathbb{R}$ si ha $F_t(p) = p$. Pertanto il gruppo di diffeomorfismi è $F_t = Id_M$.

10. *Sia $F : N \to M$ un diffeomorfismo tra varietà differenziabili, $X \in \chi(M)$ e $f \in C^\infty(N)$. Dimostrare che*

$$F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*X$$

Si è visto a lezione che se F è un diffeomorfismo allora X è F-related a Y se e solo se Y è il puahforward di X. Pertanto $\forall q \in M$ e $\forall g \in C^\infty(M)$ si ha:

$[F_*(fX)]_q(g) = F_{*F^{-1}(q)}(fX)_{F^{-1}(q)}(g) =$ definizione di differenziale $= (fX)_{F^{-1}(q)}(g \circ F) = f(F^{-1}(q))X_{F^{-1}(q)}(g \circ F) = (f \circ F^{-1})(q)F_{*F^{-1}(q)}X_{F^{-1}(q)}(g) =$ definizione di pushforward $= (f \circ F^{-1})(q)(F_*X)_q(g) = [(f \circ F^{-1})F_*X]_q(g)$. Ma allora abbiamo proprio mostrato che $F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*X$

5 Lista 3.1-3.6

1. *Dimostrare che il prodotto diretto di due gruppi di Lie é un gruppo di Lie.*

Cominciamo l'esercizio notando che il prodotto di H, G varietà differenziabili è una varietà differenziabile. Difatti HxG è T_2 e N_2 perché prodotto di spazi T_2 e N_2, inoltre $\forall z = (p, q) \in H$xG consideriamo la carta (U, ϕ) di H intorno a p e la carta (V, ψ) di G intorno a q. Consideriamo ora $(U\text{x}V, \phi\text{x}\psi)$, questa è una carta di HxG intorno a (p, q) e data un'altra carta $(\bar{U}\text{x}\bar{V}, \bar{\phi}\text{x}\bar{\psi})$ intorno a (p, q) si ha che $(\bar{\phi}\text{x}\bar{\psi}) \circ (\phi\text{x}\psi)^{-1}(p, q) = (\bar{\phi} \circ \phi^{-1}(p), \bar{\psi} \circ \psi^{-1}(q))$ che è C^∞ avendo le componenti C^∞ perché sono cambi di carte di varietà.

Da Algebra 2 sappiamo che il prodotto diretto di gruppi è un gruppo, ci manca da vedere che le operazioni sono C^∞. Consideriamo adesso l'applicazione:

$$\begin{aligned}&\mu_{HG} : (H\text{x}G)\text{x}(H\text{x}G) \to H\text{x}G\\&((h_1, g_1), (h_2, g_2)) \to (h_1h_2, g_1g_2) = (\mu_H(h_1, h_2), \mu_G(g_1, g_2))\end{aligned}$$

Questa è un'applicazione C^∞ tra varietà perché le componenti sono C^∞ essendo G e H gruppi di Lie. Stesso discorso considerando

$$\begin{aligned}&i_{HG} : H\text{x}G \to H\text{x}G\\&(h, g) \to (i_H(h), i_G(g))\end{aligned}$$

2. *Sia $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $\pi(t, s) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$, $L = \{(t, \alpha t)|\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $f = \pi_{|L}\colon L \to S^1 \times S^1$. Sia τ_f la topologia indotta da f su $H = \pi(L)$ e τ_s quella indotta dall'inclusione $H \subset S^1 \times S^1$. Dimostrare che $\tau_s \subset \tau_f$. (Suggerimento: si usi il fatto, menzionato a lezione, che $f(L)$ è denso in $S^1 \times S^1$).*

Osserviamo per prima cosa che π è omomorfismo di gruppi di Lie, infatti

$$\pi(t_1 + t_2, s_1 + s_2) = \pi(t_1, s_1)\pi(t_2, s_2)$$

Allora poichè L è sottogruppo di $\mathbb{R}^2$, $\pi(L)$ è sottogruppo di $S^1 \times S^1$. Ora per mostrare quanto richiesto basta far vedere che $f\colon L \to H$ con H dotato della topologia τ_s è continua, infatti in tal caso $f^{-1}(U) \subset L$ aperto $\forall U \in \tau_s$, ossia $U \in \tau_f$ e quindi $\tau_s \subset \tau_f$.

3. *Sia $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dimostrare che $e^X = \begin{pmatrix} cosh1 & sinh1 \\ sinh1 & cosh1 \end{pmatrix}$*

Osserviamo che $X \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Allora

$$\begin{aligned} e^X &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I}{(2n)!} = X \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I}{(2n)!} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ricordando adesso gli sviluppi del seno e del coseno iperbolico si ha che $e^X = Xcosh1 + I_2 sinh1$, cioè $e^X = \begin{pmatrix} cosh1 & sinh1 \\ sinh1 & cosh1 \end{pmatrix}$

4. *Trovare due matrici A e B tali che $e^{A+B} \neq e^A e^B$.*

Dobbiamo sicuramente trovare due matrici tali che $AB \neq BA$. Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Queste adesso non commutano e anzi si vede che $A \cdot A = B \cdot B = 0$ (matrice nulla). Pertanto $e^A = I_2 + A$ e $e^B = I_2 + B$ e quindi $e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Adesso si vede invece che $A + B = X$ con X la matrice dell'esercizio 3., e dunque $e^{A+B} = e^X \neq e^A e^B$.

5. *Dimostrare che il gruppo unitario $U(n)$ è compatto per ogni $n \geq 1$.*

$U(n)$ è chiuso poichè controimmagine di I_n tramite $f \colon GL_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $f(A) = A^*A$. Esso inoltre è limitato (come sottoinsieme di $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{4n^2}$ spazio euclideo) in quanto $A \in U(n)$ se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$, per cui usando la norma usuale dello spazio euclideo si ottiene che

$$A \in U(n) \iff A = [v_1, \ldots, v_n]$$

dove i v_k sono vettori colonna e $< v_i, v_j >= \delta^i_j$, $||v_i|| = 1$. Allora $||A|| = \sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2} \leq ||v_1|| + \cdots + ||v_n|| = n$, ossia $U(n)$ è limitato. Per il Teorema di Heine-Borel, esso è dunque compatto.

6. *Sia G un gruppo di Lie e sia G_0 la componente connessa di G che contiene e (elemento neutro di G). Se μ e i denotano la moltiplicazione e l'inversione in G, provare che*

1. $\mu(\{x\} \times G_0) \subset G_0, \quad \forall x \in G_0$;
2. $i(G_0) \subset G_0$;
3. *G_0 è un sottoinsieme aperto di G;*
4. *G_0 è un sottogruppo di Lie di G.*

Da scrivere.

7. *Sia G un gruppo di Lie e $\mu\colon G \times G \to G$ la moltiplicazione. Dimostrare che*

$$\mu_{*(a,b)}(X_a, Y_b) = (R_b)_{*a}(X_a) + (L_a)_{*b}(Y_b), \quad \forall (a,b) \in GxG, \quad X_a \in T_aG, \quad Y_b \in T_bG,$$

dove L_a (risp. R_b) denota la traslazione a sinistra (risp. a destra) associata ad a (risp. b).

Usando un procedimento simile a quello visto a lezione scriviamo $\mu_{*(a,b)}(X_a, Y_b) = \mu_{*(a,b)}(X_a, 0) + \mu_{*(a,b)}(0, Y_b)$. Vediamo il primo.

Sia $c : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ tale che $c(0) = a, c'(0) = X_a$ e ora sia $\gamma(t) = (c(t), b)$. Allora in base alla proposizione vista a lezione si ha che $\mu_{*(a,b)}(X_a, 0) = (\mu(c(t), b))'(0) = (c(t)b)'(0) = (R_b c(t))'(0) = (R_{b_{*a}})(X_a)$. Ripetendo lo stesso ragionamento per il secondo si considera $\bar{c} : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ tale che $\bar{c}(0) = b, \bar{c}'(0) = Y_B$ e $\bar{\gamma} = (a, \bar{c}(t))$ e dunque $\mu_{*(a,b)}(0, Y_b) = (\mu(a, \bar{c}(t)))'(0) = (a\bar{c}(t))'(0) = (L_a \bar{c}(t))'(0) = (L_{a_{*b}})(Y_b)$.

8. *Sia G un gruppo di Lie con inversione $i : G \to G, \quad a \to i(a) = a^{-1}$. Dimostrare che*

$$i_{*a}(Y_a) = -(R_{a^{-1}})_{*e}(L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a), \quad \forall a \in G, \quad \forall Y_a \in T_aG.$$

Operiamo come per l'esercizio 7. Sia $c : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ tale che $c(0) = a, c'(0) = Y_a$ e $\gamma(t) = (ic(t), c(t))$. Ora $\mu(\gamma(t)) = e$ perciò ho che $\mu(\gamma(t))'(0) = 0$ e pertanto

$$0 = \mu_{*(a^{-1},a}((i \circ c)'(0), c'(0)) = (R_a)_{*a^{-1}}(i_{*a}(Y_a)) + (L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a)$$

Da qua invertiamo e troviamo

$$i_{*a}(Y_a) = -((R_a)_{*a^{-1}})^{-1} \circ (L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a) = -((R_{a^{-1}})_e) \circ (L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a)$$

Dove abbiamo usato che $((R_a)_{*a^{-1}})^{-1} = (R_{a^{-1}})_e$. Infatti:

$$(R_a)_{*a^{-1}} : T_{a^{-1}}G \to T_eG$$

e dato $Y_a \in T_{a^{-1}}G$ e $f \in C^\infty(G)$ allora

$$\begin{aligned}&(R_{a^{-1}})_e((R_a)_{*a^{-1}})^{-1}(Y_a)(f) = (R_{a^{-1}} \circ R_a)_{*a^{-1}}(Y_a)(f) = \\ &Y_a(f \circ R_{a^{-1}} \circ R_a)(a^{-1}) = Y_a(f(a^{-1})) = Id_{T_{a^{-1}}G}(Y_a)(f)\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio.

9. *Verificare che il commutatore tra matrici $[A, B] = AB - BA$ definisce un'algebra di Lie sullo spazio tangente all'identità dei gruppi $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$.*

Poichè quelli elencati sono sottogruppi di Lie di $GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C})$ e l'inclusione canonica è un omomorfismo di gruppi di Lie, allora abbiamo visto a lezione che

$$[A, B]_{|H} = [A, B]_{GL_n(K)}$$

Svolgiamo la verifica, che consiste nel provare che effettivamente il bracket di due elementi di $T_{I_n}H$ è ancora un elemento dell'algebra, qualsiasi sia il sottogruppo H tra quelli elencati.

- $H = O(n)$: $\quad T_{I_n}O(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, X^T = -X\}$ allora

  $$[A, B]^T = (AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = -BA + AB = -[B, A]$$

- $H = SO(n)$: $\quad T_{I_n}SO(n) = T_{I_n}O(n)$
- $H = U(n)$: $\quad T_{I_n}U(n) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \,|\, X + X^* = 0\}$ allora

  $$[A, B] + [A, B]^* = AB - BA + (AB)^* - (BA)^* = 0$$

- $H = SU(n)$: $\quad T_{I_n}SU(n) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \,|\, X + X^* = 0 \wedge \operatorname{tr}(X) = 0\}$ allora

  $$[A, B] + [A, B]^* = AB - BA + (AB)^* - (BA)^* = 0$$

  $$\operatorname{tr}([A, B]) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB + (BA)^*) = \operatorname{tr}(AB + A^*B^*) = 0$$

- $H = SL_n(\mathbb{R})$: $\quad T_{I_n}SL_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ allora

$$\mathrm{tr}([A, B]) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

- $H = SL_n(\mathbb{C})$: $\quad T_{I_n}SL_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$

10. *Verificare che l'esponenziale di una matrice definisce un'applicazione $e\colon T_{I_n}G \to G$, $e(A) = e^A$ per $G = GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$.*

Ciò è vero poichè qualsiasi G si scelga tra quelli elencati, $\exp_G$ è un sottogruppo ad un parametro e lo è anche $e(A) = e^A$ pensata come applicazione $t \to e^{tA}$, infatti $t + s \to e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA} \cdot e^{sA}$ e infine

$$\frac{d}{dt}e^{tA}{}_{|t=0} = A = \frac{d}{dt}\exp_G(tA)_{|t=0}$$

ossia il sottogruppo ad un parametro coincide.

11. *Sia $G = G_1 \times \cdots \times G_s$ il prodotto diretto di gruppi di Lie. Dimostrare che l'algebra di Lie di G è isomorfa alla somma diretta delle algebre di Lie dei G_i.*

Poichè $G \simeq G_1 \times \cdots \times G_s$, esiste un isomorfismo di gruppi di Lie, sia esso F. Allora $F_*\colon T_eG \to T_{e_1}G_1 + \cdots + T_{e_s}G_s$ è un isomorfismo di algebre di Lie per una proposizione vista a lezione.

12. *Dimostrare che ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.*

Da scrivere.

6 BONUS

Gruppo	T_IG	Dimensione	Compatto	Connesso
$GL_n(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	n^2	no	no
$GL_n(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$2n^2$	no	si
$SL_n(\mathbb{R})$	$\{B \in M_n(\mathbb{R}) \vert \mathrm{tr}B = 0\}$	$n^2 - 1$	no	si
$SL_n(\mathbb{C})$	$\{B \in M_n(\mathbb{C}) \vert \mathrm{tr}B = 0\}$	$2n^2 - 2$	no	si
$U(n)$	$\{B \in GL_n(\mathbb{C}) \vert B + B* = 0\}$	n^2	si	si
$SU(n)$	$\{B \in GL_n(\mathbb{C}) \vert B + B* = 0 \wedge \mathrm{tr}B = 0\}$	$n^2 - 1$	si	si
O_n	$\{B \in GL_n(\mathbb{R}) \vert B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si
SO_n	$\{B \in GL_n(\mathbb{R}) \vert B + B^T = 0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si