

Varietà differenziabili (prima parte)
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2021-2022
Docente: Andrea Loi

1. Sia S^n la sfera unitaria in \mathbb{R}^{n+1} . Trovare un atlante differenziabile di S^n con $2(n+1)$ carte.
2. Dimostrare che le strutture differenziabili su S^n definite dall'esercizio precedente e dalle proiezioni stereografiche coincidono.
3. Sia S uno spazio topologico e \sim una relazione d'equivalenza aperta su S . Dimostrare che lo spazio quoziente S/\sim è T_2 se e solo se $R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \sim y\}$ è un sottoinsieme chiuso di $S \times S$.
4. Sia S uno spazio topologico N_2 e \sim una relazione d'equivalenza aperta su S . Dimostrare che lo spazio quoziente S/\sim è N_2 .
5. Dimostrare che la grassmanniana $G(k, n)$ è uno spazio topologico connesso e compatto.
6. Siano M e N due varietà differenziabili e $q_0 \in N$. Dimostrare che

$$i_{q_0} : M \rightarrow M \times N, p \mapsto (p, q_0)$$

è un'applicazione liscia.

7. Sia S^1 il cerchio unitario di \mathbb{R}^2 . Dimostrare che una funzione liscia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si restringe ad una funzione liscia $f|_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$.
8. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, xy)$. Sia $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right) = a\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{F(p)} + b\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{F(p)} + c\frac{\partial}{\partial w}\Big|_{F(p)}.$$

9. Siano x, y le coordinate standard su \mathbb{R}^2 e $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. In U le coordinate polari (ρ, θ) , $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ sono definite come $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. Si scrivano $\frac{\partial}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$ in funzione di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.
10. Sia $p = (x, y)$ un punto di \mathbb{R}^2 . Allora

$$c_p(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

è una curva liscia in \mathbb{R}^2 che inizia in p . Calcolare $c'(0)$.

11. Siano M e N varietà differenziabili e $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ le proiezioni naturali. Dimostrare che per $(p, q) \in M \times N$ l'applicazione

$$(\pi_{1*p}, \pi_{2*q}) : T_{(p,q)}M \times N \rightarrow T_pM \times T_qN$$

è un isomorfismo.