Varietà differenziabili 2.1-2.3
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2020-2021
Docente: Andrea Loi

1. Sia S^n la sfera unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$. Trovare un atlante differenziabile di S^n con $2(n+1)$ carte.

2. Dimostrare che la strutture differenziabili su S^n definite dall'esercizio precedente e dalle proiezioni stereografiche coincidono.

3. Sia S uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza aperta su S. Dimostare che lo spazio quoziente $S/\sim$ é T_2 se e solo se $R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \sim y\}$ é un sottoinsieme chiuso di $S \times S$.

4. Sia S uno spazio topologico N_2 e $\sim$ una relazione d'equivalenza aperta su S. Dimostrare che lo spazio quoziente $S/\sim$ é N_2.

5. Dimostrare che la grassmanniana $G(k, n)$ é uno spazio topologico connesso e compatto.

6. Siano M e N due varietà differenziabili e $q_o \in N$. Dimostrare che

$$i_{q_0} : M \to M \times N, p \mapsto (p, q_0)$$

é un'applicazione liscia.

7. Sia S^1 il cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che una funzione liscia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si restringe ad una funzione liscia $f_{|S^1} : S^1 \to \mathbb{R}$.

8. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, xy)$. Sia $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$F_{*p}(\frac{\partial}{\partial x}|_p) = a\frac{\partial}{\partial u}|_{F(p)} + b\frac{\partial}{\partial v}|_{F(p)} + c\frac{\partial}{\partial w}|_{F(p)}.$$

9. Siano x, y le coordinate standard su $\mathbb{R}^2$ e $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. In U le coordinate polari (ρ, θ), $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ sono definite come $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$. Si scrivano $\frac{\partial}{\partial\rho}$ e $\frac{\partial}{\partial\theta}$ in funzione di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.

10. Sia $p = (x, y)$ un punto di $\mathbb{R}^2$. Allora

$$c_p(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é una curva liscia in $\mathbb{R}^2$ che inizia in p. Calcolare $c'(0)$.

11. Siano M e N varietà differenziabili e $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$ le proiezioni naturali. Dimostrare che per $(p.q) \in M \times N$ l'applicazione

$$(\pi_{1*p}, \pi_{2*q}) : T_{(p,q)}M \times N \to T_pM \times T_qN$$

é un isomorfismo.