

## Esercizi sulla teoria degli anelli

1. Sia  $\mathbb{H}$  l'insieme dei quaternioni, ovvero  $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ . Si ricordi che, dato  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = a + bi + cj + dk$ ,  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$  e che  $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$ .

a) si provino le seguenti uguaglianze:  $\overline{\bar{q}} = q$ ,  $\overline{q + q_1} = \bar{q} + \bar{q}_1$ ,  $\overline{q \cdot q_1} = \bar{q} \cdot \bar{q}_1$ ,  $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ,  $\|q \cdot q_1\| = \|q\| \cdot \|q_1\|$ .

b) si verifichi che  $\mathbb{H}$  forma un corpo (dove per  $q \neq 0$ ,  $q^{-1} = \|q\|^{-2} \cdot \bar{q}$ ).

2. Sul gruppo abeliano  $A = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$  si consideri la moltiplicazione definita da

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$

(a) Dimostrare che in questo modo  $(A, +, \cdot)$  risulta un anello unitario e  $\mathbb{R} \times \{0\}$  è un suo sottoanello.

(b) Caratterizzare gli elementi invertibili ed i divisori dello zero di  $A$ .

(c) Dire se esistono elementi che non sono né divisori dello zero né invertibili.

(d) Trovare gli ideali massimali di  $A$ .

3. Sia  $A$  un anello commutativo unitario e  $I$  e  $J$  ideali di  $A$ . Definiamo

$$IJ = \{i_1 j_1 + \dots + i_n j_n \mid n \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J, k = 1, \dots, n\}.$$

(a) Provare che  $IJ$  è un ideale di  $A$  contenuto nell'ideale  $I \cap J$  e mostrare con un esempio che  $IJ \neq I \cap J$ .

(b) Provare che se  $A = I + J$  allora  $IJ = I \cap J$ .

(c) Provare che l'affermazione in (b) non è vera se  $A$  non è un anello unitario.

(d) se  $I$  e  $J$  sono due ideali massimali distinti, allora  $IJ = I \cap J$ ;

(e) se  $I$  e  $J$  sono ideali principali,  $I = (a)$  e  $J = (b)$ , allora  $IJ = (ab)$ .

(f) descrivere  $IJ$  e  $I \cap J$  in  $A = \mathbb{Z}$  e dedurre quando  $IJ = I \cap J$ .

4. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ . Provare che  $A$  è un sottocampo di  $M_2(\mathbb{Z}_3)$ . Dimostrare inoltre che  $(A^*, \cdot)$  è un gruppo ciclico, determinare l'ordine di  $A^*$  e un suo generatore.

5. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Provare che  $A$  è un sottocampo di  $M_2(\mathbb{R})$  isomorfo a  $\mathbb{C}$ .
6. Sia  $A$  un anello unitario e  $I$  un ideale bilatero di  $A$ . Dimostrare che l'insieme  $U_I = \{x \in U(A) \mid x - 1 \in I\}$  è un sottogruppo normale di  $U(A)$ .
7. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ .
- Provare che  $A$  è un anello commutativo unitario, ma non è un dominio.
  - Determinare l'ideale  $N(A)$  degli elementi nilpotenti di  $A$ .
  - Mostrare che ogni ideale proprio di  $A$  è contenuto in  $N(A)$  e dedurre che  $A$  è un anello locale.
  - Determinare tutti gli ideali di  $A$ .
8. Nell'anello  $M_2(\mathbb{Z}_8)$ , sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_8 \right\}$ .
- Provare che  $A$  è un sottoanello commutativo di  $M_2(\mathbb{Z}_8)$ .
  - Dire se  $A$  è un dominio.
9. Sia  $p$  un primo e  $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n, (m, n) = 1 \right\}$ .
- Provare che  $\mathbb{Z}_{(p)}$  è un sottoanello di  $\mathbb{Q}$ .
  - Determinare gli elementi invertibili di  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .
  - Determinare gli ideali di  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .
  - Determinare gli ideali primi e massimali di  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .
  - Provare che  $\mathbb{Z}_{(p)}$  è un anello locale.
10. Dimostrare che:
- ogni campo è un anello locale senza elementi nilpotenti non nulli;
  - se  $\mathbb{Z}_m$  è locale e non ha elementi nilpotenti non nulli allora  $\mathbb{Z}_m$  è un campo;
  - dare un esempio di anello locale senza elementi nilpotenti non nulli che non sia un campo.
11. Un anello commutativo unitario si dice *regolare* se per ogni  $x \in A$  esiste  $y \in A$  tale che  $x = yx^2$ . Dimostrare che:
- ogni campo è un anello regolare e se  $A$  è un dominio regolare allora  $A$  è un campo;

- (b) l'anello quoziente di un anello regolare è regolare;
- (c) in un anello regolare ogni ideale primo è massimale;
- (d) in un anello regolare ogni ideale principale è generato da un idempotente;
- (e) se  $I$  e  $J$  sono due ideali di un anello regolare allora  $IJ = I \cap J$ ;
- (f) per ogni insieme non vuoto  $S$  e per ogni campo  $K$ , l'anello  $K^S$  è regolare.
12. Sia  $G$  un gruppo abeliano ed  $\text{End}(G)$  l'insieme degli endomorfismi di  $G$ . Siano  $f, g \in \text{End}(G)$  e si definisca  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , per  $x \in G$ . Sia  $\circ$  l'usuale composizione di funzioni, cioè  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  per  $x \in G$ .
- (a) Si dimostri che  $(\text{End}(G), +, \circ)$  è un anello unitario.
- (b) Sia  $A$  un anello unitario. Si dimostri che  $A$  si può identificare con un sottoanello di  $\text{End}(G)$  per qualche gruppo abeliano  $G$ .
13. Sia  $G$  un gruppo abeliano e  $f \in A = \text{End}(G)$ .
- (a) Dimostrare che se  $f$  è suriettivo, allora  $f$  non è divisore destro dello zero in  $A$ .
- (b) Dimostrare che se  $f$  è iniettivo, allora  $f$  non è divisore sinistro dello zero in  $A$ .
- (c) Trovare un anello dove esistono divisori sinistri dello zero che non sono divisori destri dello zero (suggerimento: considerare l'anello  $\text{End}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$ ).
14. Sia  $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ .
- (a) Dimostrare che  $A$  è un sottoanello di  $M_2(\mathbb{C})$ .
- (b) Sia  $q = a + bi + cj + dk$  un elemento del corpo dei quaternioni  $\mathbb{H}$ . Si dimostri che l'applicazione  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow A$  definita da
- $$\varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = a + ib, \quad \beta = c + id \in \mathbb{C}$$
- è un isomorfismo di anelli e pertanto di corpi.
- (c) Si verifichi che
- $$\det(\varphi(q)) = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$
- Si deduca che  $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$ , per ogni  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ .
- (d) Si verifichi che l'insieme dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ .
15. Determinare l'insieme degli endomorfismi unitari dei seguenti anelli:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ .

16. Sia  $f : A_1 \rightarrow A_2$  un omomorfismo di anelli unitari.
- Provare che  $f(U(A_1)) \subseteq U(A_2)$ .
  - Considerando l'omomorfismo canonico  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , mostrare che in (a) non vale l'uguaglianza se  $n > 6$ .
17. Sia  $A$  l'anello  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$
- Trovare la caratteristica di  $A$ .
  - Descrivere gli ideali (primi, massimali e principali) di  $A$ .
  - Determinare a quale degli anelli  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$ ,  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$  e  $\mathbb{Z}_{60}$  è isomorfo l'anello  $A$ .
  - Descrivere quali sono gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti di  $A$ .
18. Sia  $\mathbb{K}$  un campo e  $A = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$  ( $n$  fattori). Trovare gli ideali primi e massimali di  $A$  e dire quanti sono.
19. Nell'anello  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  si considerino gli ideali  $I = (2)$  e  $J = (3)$ . Dire se gli anelli quoziente  $A/I$  e  $A/J$  sono campi.
20. Nell'anello  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  sia  $I = (5)$  e si consideri l'anello quoziente  $A/I$ .
- Provare che se  $a \equiv 0 \pmod{5}$ , allora l'elemento  $a + b\sqrt{5} + I$  è nilpotente.
  - Provare che se  $a \not\equiv 0 \pmod{5}$ , allora l'elemento  $a + b\sqrt{5} + I$  è invertibile.
  - Determinare gli ideali di  $A/I$ .
21. Sia  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ . Per  $\alpha = x + \sqrt{5}y \in A$  definiamo la norma di  $\alpha$  come  $N(\alpha) = x^2 - 5y^2$ . Dimostrare che  $M = \{\alpha \in A \mid N(\alpha) \text{ pari}\}$  è un ideale massimale di  $A$ .

## Esercizi sui reticoli

1. Dimostrare che se un elemento di un reticolo distributivo e limitato ammette complemento, tale complemento è unico e che se  $a \wedge b = 0$  e  $a \vee b = 1$  allora  $b = \bar{a}$ .
2. Dimostrare che in ogni algebra di Boole  $B$  vale che  $\overline{\bar{x}} = x$  e valgono le leggi di De Morgan, ovvero:  $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  e  $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ , per ogni  $x, y \in B$ .
3. Dimostrare che l'insieme degli ideali di un reticolo limitato  $L$  forma un reticolo completo (suggerimento: mostrare che l'insieme è chiuso per intersezioni arbitrarie).
4. Un anello commutativo unitario  $A$  si dice *Booleano*, se, per ogni  $a \in A$ , vale  $a^2 = a$ .
  - (a) Provare che la caratteristica di  $A$  è 2 e che  $A$  è un anello commutativo;
  - (b) Provare che  $A$  ha divisori dello zero qualora  $|A| > 2$ ;
  - (c) Ogni ideale primo di  $A$  è massimale.
5. Sia  $(B, \vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}, 0, 1)$  un'algebra di Boole: si dimostri che, definendo  $a + b := (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$  e  $a \cdot b := a \wedge b$ ,  $(B, +, \cdot)$  è un anello Booleano. Viceversa, sia  $A$  un anello Booleano e si definiscano  $a \vee b := a + b + a \cdot b$ ,  $a \wedge b = a \cdot b$  e  $\bar{a} = 1 + a$ : si dimostri che  $(A, \vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}, 0, 1)$  è un'algebra di Boole.
6. Sia  $I$  un ideale di un reticolo distributivo e limitato  $L$ . Dimostrare che esiste un ideale massimale che estende  $I$  (per massimale si intende la stessa nozione data per gli anelli).
7. Sia  $f: L_1 \rightarrow L_2$  un omomorfismo di reticoli limitati. Dimostrare che l'insieme  $I = \{x \in L_1 \mid f(x) = 0\}$  è un ideale di  $L_1$ .
8. Sia  $L$  un reticolo distributivo e limitato. Un sottoinsieme non vuoto  $F \subseteq L$  si dice un *filtro* di  $L$  se soddisfa le seguenti proprietà:

- 1)  $a \wedge b \in F$ , per ogni  $a, b \in F$ ;
- 2) se  $a \in F$  e  $a \leq x$ , per qualche  $x \in L$ , allora  $x \in F$ .

Dimostrare che:

- (a)  $1 \in F$ ;
- (b) per ogni  $a \in L$ , l'insieme  $\uparrow a = \{x \in L \mid a \leq x\}$  è un filtro di  $L$ ;
- (c) se  $L$  è finito ogni filtro è della forma  $\uparrow a$ ;
- (d) se  $L$  è un'algebra di Boole, allora un sottoinsieme  $F$  di  $L$  è un filtro se e solo se l'insieme  $I = \{\bar{x} \mid x \in F\}$  è un ideale di  $L$ , dove  $\bar{x}$  è l'unico complemento dell'elemento  $x \in L$ .

## Esercizi sui polinomi

1. Sia  $A$  un anello commutativo unitario. Dimostrare che un polinomio  $p(x) \in A[x]$  è nilpotente sse tutti i coefficienti di  $p$  sono nilpotenti.
2. Sia  $A$  un anello commutativo unitario e  $p(x) \in A[x]$  con coefficiente direttivo invertibile e di grado  $n > 0$ . Dato l'ideale principale  $I = (p(x))$ , si dimostri che esiste una bigezione tra l'anello quoziente  $A[x]/I$  e le classi laterali  $r(x) + I$ , dove  $r(x)$  è un polinomio di grado minore di  $n$  oppure  $r(x) = 0$ .
3. Sia  $A$  un dominio. Dimostrare che  $U(A[x]) = U(A)$ . L'uguaglianza è vera anche nel caso in cui  $A$  non sia un dominio?
4. Sia  $A$  un anello commutativo unitario e  $I$  un ideale di  $A$ . Sia  $J$  l'insieme di tutti i polinomi che hanno coefficienti in  $I$ . Dimostrare che  $J$  è un ideale di  $A[x]$  e che  $A[x]/J \cong A/I[x]$ .
5. Si consideri l'anello dei polinomi  $\mathbb{Z}[x]$ . Sia  $I$  l'insieme dei polinomi di  $\mathbb{Z}[x]$  il cui termine di grado zero è pari. Verificare che  $I$  è un ideale di  $\mathbb{Z}[x]$  e che non è principale.